G.N. BERMAN

# PROBLÈMES D'ANALYSE MATHÉMATIQUE

G. BERMAN

# PROBLÈMES D'ANALYSE MATHÉMATIQUE

ÉDITIONS MIR • MOSCOU

# TABLE DES MATIÈRES

**Chapitre I. FONCTIONS** . . . . . 11

§ 1. Prologue aux fonctions . . . . . 11
§ 2. Propriétés élémentaires des fonctions . . . . . 15
§ 3. Fonctions élémentaires usuelles . . . . . 19
§ 4. Fonction inverse. Fonction puissance. Fonction exponentielle. Fonction logarithmique . . . . . 24
§ 5. Fonctions trigonométriques et trigonométriques inverses . . . . . 26
§ 6. Problèmes numériques . . . . . 30

**Chapitre II. LIMITE. CONTINUITÉ** . . . . . 32

§ 1. Définitions fondamentales . . . . . 32
§ 2. Grandeurs infinies. Critères d'existence de la limite . . . . . 34
§ 3. Fonctions continues . . . . . 36
§ 4. Limites. Comparaison des infiniment petits . . . . . 39

**Chapitre III. DÉRIVÉE ET DIFFÉRENTIELLE. CALCUL DIFFÉRENTIEL** . . . . . .

§ 1. Dérivée. Vitesse de variation d'une fonction . . . . . 49
§ 2. Dérivation des fonctions . . . . . 52
§ 3. Différentielle. Différentiabilité d'une fonction . . . . . 68
§ 4. La dérivée comme vitesse de variation (suite) . . . . . 72
§ 5. Dérivation successive . . . . . 79

**Chapitre IV. LES FONCTIONS ET LEURS GRAPHES** . . . . . 85

§ 1. Comportement des fonctions . . . . . 85
§ 2. Applications de la dérivée première . . . . . 86
§ 3. Applications de la dérivée seconde . . . . . 95
§ 4. Problèmes subsidiaires. Résolution des équations . . . . . 98
§ 5. Formule de Taylor et ses applications . . . . . 105
§ 6. Courbure . . . . . 107
§ 7. Problèmes numériques . . . . . 110

Chapitre V. INTÉGRALE DÉFINIE . . . . . 111

§ 1. Intégrale définie et ses propriétés élémentaires . . . . . 111
§ 2. Propriétés fondamentales de l'intégrale définie . . . . . 114

Chapitre VI. INTÉGRALE INDÉFINIE. CALCUL INTÉGRAL . . . . . 121
§ 1. Méthodes élémentaires d'intégration . . . . . 121
§ 2. Principales méthodes d'intégration . . . . . 124
§ 3. Principales classes de fonctions intégrables . . . . . 129

Chapitre VII. MÉTHODES DE CALCUL DES INTÉGRALES DÉFINIES. INTÉGRALES IMPROPRES . . . . . 136

§ 1. Méthodes de calcul exact des intégrales . . . . . 136
§ 2. Méthodes approchées . . . . . 144
§ 3. Intégrales impropres . . . . . 147

Chapitre VIII. APPLICATIONS DE L'INTÉGRALE . . . . . 152

§ 1. Quelques problèmes de géométrie et de statique . . . . . 152
§ 2. Quelques problèmes de physique . . . . . 167
Chapitre IX. SÉRIES . . . . . 176
§ 1. Séries numériques . . . . . 176
§ 2. Séries fonctionnelles . . . . . 180
§ 3. Séries entières . . . . . 184
§ 4. Quelques applications des séries de Taylor . . . . . 186

Chapitre X. FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES. CALCUL DIFFÉRENTIEL . . . . . 190

§ 1. Fonctions de plusieurs variables . . . . . 190
§ 2. Propriétés élémentaires des fonctions . . . . . 192
§ 3. Dérivées et différentielles des fonctions de plusieurs variables . . . 196
§ 4. Différentiation des fonctions . . . . . 200
§ 5. Différentiation successive . . . . . 203

Chapitre XI. APPLICATIONS DU CALCUL DIFFÉRENTIEL AUX FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES . . . . . 207

§ 1. Formule de Taylor. Extrémums des fonctions de plusieurs variables
§ 2. Courbes planes . . . . . 212
§ 3. Fonction vectorielle d'un argument scalaire. Courbes gauches. Surfaces . . . . . 214
§ 4. Champ scalaire. Gradient. Dérivée suivant une direction . . . . . 219

Chapitre XII. INTÉGRALES MULTIPLES ET INTÉGRATION MULTIPLE . . . . . 207 222
§ 1. Intégrales doubles et triples . . . . . 222
§ 2. Intégration multiple . . . . . 223
§ 3. Intégrales en coordonnées polaires, cylindriques et sphériques . . . 227
§ 4. Application des intégrales doubles et triples . . . . . 230
§ 5. Intégrales impropres. Intégrales dépendant d'un paramètre . . . . 238

Chapitre XIII. INTÉGRALES CURVILIGNES ET INTÉGRALES DE SURFACE . . . . . 245

§ 1. Intégrales curvilignes le long d'un arc de courbe . . . . . 245
§ 2. Intégrales curvilignes en coordonnées . . . . . 248
§ 3. Intégrales de surface . . . . . 253

Chapitre XIV. EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES . . . . . 257

§ 1. Equations du premier ordre . . . . . 257
§ 2. Equations du premier ordre (suite) . . . . . 268
§ 3. Equations du second ordre et d'ordre supérieur . . . . . 271
§ 4. Equations linéaires . . . . . 275
§ 5. Systèmes d'équations différentielles . . . . . 280
§ 6. Problèmes numériques . . . . . 283

Chapitre XV. SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES . . . . . 286

§ 1. Polynômes trigonométriques . . . . . 286
§ 2. Séries de Fourier . . . . . 287
§ 3. Méthode de Krylov. Analyse harmonique . . . . . 291

Chapitre XVI. ELÉMENTS DE LA THÉORIE DES CHAMPS . . 292

RÉPONSES . . . . . 299

COMPLÉMENT. Table de certaines fonctions élémentaires . . . . . 423

# AVANT-PROPOS

Le présent recueil de problèmes d'analyse mathématique est destiné aux élèves des établissements d'enseignement technique supérieur. Le choix judicieux et le classement systématique des exercices aideront à une meilleure assimilation des principaux chapitres d'analyse mathématique. Certains exercices paraîtront simples, trop simples même, mais le but poursuivi est d'amener progressivement l'élève aux problèmes les plus compliqués: ceux qui sont affectés d'un astérisque et dont on trouvera la solution détaillée dans les Réponses.

Aucun rappel théorique n'est fait, étant entendu que le lecteur se référera au cours d'analyse mathématique. Par contre, les problèmes de physique sont accompagnés des explications théoriques nécessaires.

Un hommage enfin à l'auteur G. Berman mort des suites d'une blessure à la Deuxième Guerre Mondiale et dont l'ouvrage a été réédité à maintes reprises en russe par le soin de ses collaborateurs et amis.

# CHAPITRE I

# FONCTIONS

## § 1. Prologue aux fonctions

### Fonctions et définition des fonctions

1. La somme des angles intérieurs d'un polygone convexe plan est fonction du nombre de ses côtés. Se donner analytiquement cette fonction. Quelles valeurs peut prendre l'argument?

2. Une fonction $y$ de $x$ est définie par le tableau suivant

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Variable indépendante $x$ . . . . . | 0 | 0,5 | | 1 | 1,5 | 2 | 3 |
| Fonction $y$ . . . . . | —1,5 | —1 | | 0 | 3,2 | 2,6 | 0 |
| Variable indépendante $x$ . . . . . | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Fonction $y$ . . . . . | —1,8 | —2,8 | 0 | 1,1 | 1,4 | 1,9 | 2,4 |

Tracer le graphe de cette fonction en joignant les points donnés par une ligne « continue » et remplir le tableau en déterminant les valeurs correspondant à $x = 2{,}5$ ; $3{,}5$ ; $4{,}5$ ; $5{,}5$ ; $6{,}5$ ; $7{,}5$ ; $8{,}5$ ; $9{,}5$.

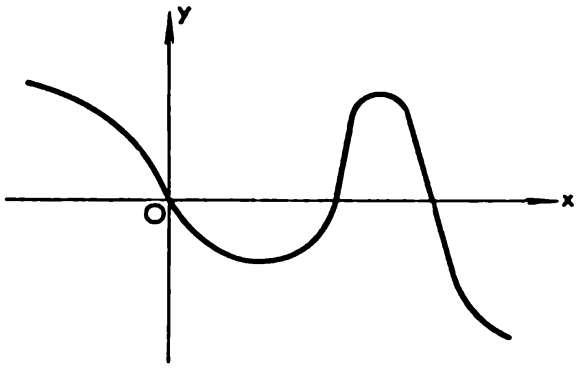


Fig. 1

3. Soit donnée une fonction dont la courbe représentative est celle de la fig. 1. Reproduire ce graphe sur du papier millimétré en choisissant l'échelle et quelques valeurs de la variable indépendante.

Relever les valeurs de la fonction correspondant à celles de la variable indépendante choisies et dresser le tableau de valeurs.

4. Une fonction est donnée par le graphe de la fig. 2. On demande :

a) pour quelles valeurs de la variable indépendante cette fonction s'annule-t-elle?

b) pour quelles valeurs de la variable indépendante est-elle positive?

c) pour quelles valeurs de la variable indépendante est-elle négative?

5. La force $F$ d'interaction de deux charges électriques $e_1$ et $e_2$, placées à une distance $r$ l'une de l'autre, s'exprime en vertu de la loi de Coulomb par la formule

$$F = \frac{e_1 \cdot e_2}{\varepsilon \cdot r^2}.$$

Poser $e_1 = e_2 = 1$ et $\varepsilon = 1$ et dresser le tableau de valeurs de cette fonction pour $r = 1, 2, \ldots, 10$. Construire son graphe en reliant les points trouvés par une ligne « continue ».

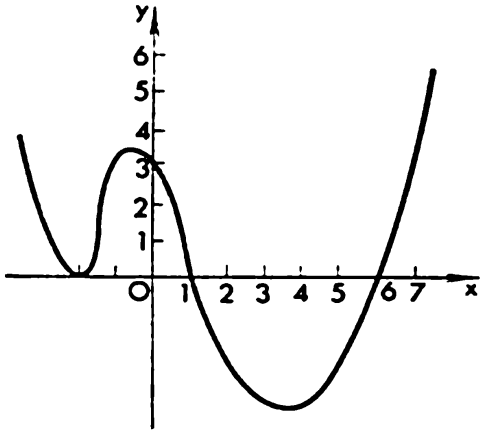

Fig. 2

6. Exprimer le rayon $r$ d'un cylindre en fonction de sa hauteur $h$ et de son volume $V$ supposé égal à 1. Calculer $r$ pour les valeurs suivantes de $h$ : 0,5 ; 1 ; 1,5 ; 2 ; 2,5 ; 3 ; 3,5 ; 4 ; 4,5 ; 5. Tracer le graphe de cette fonction.

7. Exprimer l'aire d'un trapèze isocèle de bases $a$ et $b$ en fonction de l'angle $\alpha$ adjacent à la base $a$. Tracer le graphe de cette fonction pour $a = 2$, $b = 1$.

8. Exprimer le côté $b$ de l'angle droit d'un triangle rectangle en fonction de l'autre côté $a$, l'hypothénuse $c$ étant supposée constante et égale à 5. Tracer le graphe de cette fonction.

9. On considère les fonctions

$$\text{a) } f(x) = \frac{x-2}{x+1}; \qquad \text{b) } \varphi(x) = \frac{|x-2|}{x+1}.$$

Calculer : $f(0)$ ; $f(1)$ ; $f(2)$ ; $f(-2)$ ; $f(-1/2)$ ; $f(\sqrt{2})$ ; $|f(1/2)|$ ; $\varphi(0)$ ; $\varphi(1)$ ; $\varphi(2)$ ; $\varphi(-2)$ ; $\varphi(4)$. Calculer si existent $f(-1)$ et $\varphi(-1)$.

10. On considère la fonction $f(u) = u^3 - 1$. Calculer : $f(1)$ ; $f(a)$ ; $f(a+1)$ ; $f(a-1)$ ; $2f(2a)$.

11. On considère les fonctions $F(z) = 2^{z-2}$ et $\varphi(z) = 2^{|z|-2}$. Calculer : $F(0)$ ; $F(2)$ ; $F(3)$ ; $F(-1)$ ; $F(2{,}5)$ ; $F(-1{,}5)$ et $\varphi(0)$ ; $\varphi(2)$ ; $\varphi(-1)$ ; $\varphi(x)$ ; $\varphi(-1) + F(1)$.

12. On donne la fonction $\psi(t) = t \cdot a^t$. Calculer : $\psi(0)$ ; $\psi(1)$ ; $\psi(-1)$ ; $\psi\left(\frac{1}{a}\right)$ ; $\psi(a)$ ; $\psi(-a)$.

13. $\varphi(t) = t^3 + 1$. Calculer: $\varphi(t^2)$ et $[\varphi(t)]^2$.

14. $F(x) = x^4 - 2x^2 + 5$. Montrer que $F(a) = F(-a)$.

15. $\Phi(z) = z^3 - 5z$. Montrer que $\Phi(-z) = -\Phi(z)$.

16. $f(t) = 2t^2 + \frac{2}{t^2} + \frac{5}{t} + 5t$. Montrer que $f(t) = f(1/t)$.

17. $f(x) = \sin x - \cos x$. Montrer que $f(1) > 0$.

18. $\psi(x) = \lg x$. Montrer que $\psi(x) + \psi(x+1) = \psi[x(x+1)]$.

19. $F(z) = a^z$. 1) Montrer que quel que soit $z$ l'on a la relation

$$F(-z) \cdot F(z) - 1 = 0.$$

2) Montrer que

$$F(x) \cdot F(y) = F(x + y).$$

20. On donne le graphe d'une fonction $y = f(x)$ et les valeurs $a$ et $b$ de la variable indépendante $x$ (fig. 3). Construire $f(a)$ et $f(b)$. Interpréter géométriquement le rapport $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

21. Montrer que si une corde quelconque de la courbe représentative d'une fonction $y = f(x)$ est située au-dessus de l'arc qu'elle sous-tend on a

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

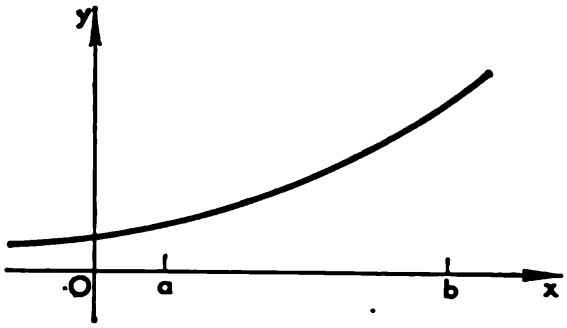

Fig. 3

pour tous les $x_1 \neq x_2$.

22. Soit $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Résoudre les équations a) $f(x) = f(0)$; b) $f(x) = f(-1)$.

23. Soit $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 23x$. Résoudre l'équation $f(x) = f(-2)$.

24. Soit donnée une fonction $f(x)$. Indiquer au moins une racine de l'équation $f(x) = f(a)$.

25. Trouver deux racines de l'équation $f(x) = f\left(\frac{x+8}{x-1}\right)$, sachant que la fonction $f(x)$ est définie sur l'intervalle $[-5, 5]$. Résoudre cette équation pour $f(x) = x^2 - 12x + 3$.

26. Soit $F(x) = x^2 + 6$; $\varphi(x) = 5x$. Résoudre l'équation $F(x) = |\varphi(x)|$.

27. Soit $f(x) = x + 1$; $\varphi(x) = x - 2$. Résoudre l'équation

$$|f(x) + \varphi(x)| = |f(x)| + |\varphi(x)|.$$

28. Déduire de l'expression $f(x) = ax^2 + bx + 5$ les valeurs de $a$ et $b$ telles que l'on ait l'identité $f(x+1) - f(x) \equiv 8x + 3$.

29. Soit $f(x) = a \cdot \cos(bx + c)$. Pour quelles valeurs des constantes $a$, $b$ et $c$ a-t-on l'identité $f(x+1) - f(x) \equiv \sin x$?

## Fonctions composées

**30.** Soit $y = z^2$, $z = x + 1$. Exprimer $y$ en fonction de $x$.

**31.** Soit $y = \sqrt{z+1}$, $z = \operatorname{tg}^2 x$. Exprimer $y$ en fonction de $x$.

**32.** Soit $y = z^2$, $z = \sqrt[3]{x+1}$, $x = a^t$. Exprimer $y$ en fonction de $t$.

**33.** Soit $y = \sin x$; $v = \lg y$; $u = \sqrt{1+v^2}$. Exprimer $u$ en fonction de $x$.

**34.** Soit $y = 1 + x$, $z = \cos y$; $v = \sqrt{1-z^2}$. Exprimer $v$ en fonction de $x$.

**35.** Décomposer les fonctions composées suivantes en fonctions élémentaires :

1) $y = \sin^3 x$; 2) $y = \sqrt[3]{(1+x)^2}$; 3) $y = \lg \operatorname{tg} x$;
4) $y = \sin^3 (2x+1)$; 5) $y = 5^{(3x+1)^2}$.

**36.** $f(x) = x^3 - x$; $\varphi(x) = \sin 2x$. Trouver :

a) $f\left[\varphi\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$; b) $\varphi[f(1)]$; c) $\varphi[(2)]$; d) $f[\varphi(x)]$;
e) $f[f(x)]$; f) $f\{f[f(1)]\}$; g) $\varphi[\varphi(x)]$.

**37.** Vérifier la validité de la méthode suivante de construction du graphe d'une fonction composée $y = f[\varphi(x)] = F(x)$ à partir des graphes des fonctions $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$. Par un point $A$ d'abscisse $x$ du graphe de la fonction $\varphi(x)$ (fig. 4) on mène une parallèle à l'axe $Ox$ qui coupe en $B$ la bissectrice du premier et du troisième quadrant ; puis par le point $B$ on trace une parallèle à l'axe $Oy$ qui rencontre en $C$ le graphe de la fonction $f(x)$. Le point d'intersection $D$ de la parallèle menée par $C$ à l'axe $Ox$ et de la parallèle menée par $A$ à l'axe $Oy$ est le point d'abscisse $x$ du graphe de $F(x)$.

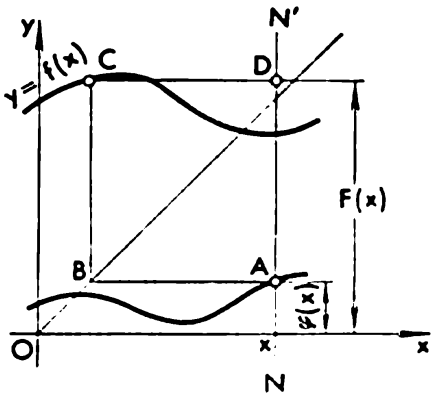

Fig. 4

## Fonctions implicites

**38.** Expliciter la fonction $y$ définie par les équations :

1) $x^2 + y^2 = 1$; 2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; 3) $x^3 + y^3 = a^3$; 4) $xy = C$;
5) $2^{xy} = 5$; 6) $\lg x + \lg(y+1) = 4$; 7) $2^{x+y}(x^2 - 2) = x^3 + 7$;
8) $(1+x)\cos y - x^2 = 0$.

**39*.** Montrer que pour $x > 0$ l'équation $y + |y| - x - |x| = 0$ définit une fonction représentée graphiquement par la bissectrice du premier quadrant et que pour $x \leqslant 0$ elle est vérifiée par tous les points du troisième quadrant (y compris les points frontières).

## § 2. Propriétés élémentaires des fonctions

### Domaine de définition

**40.** Dresser le tableau de valeurs de la fonction d'argument entier $y = \frac{1}{x!}$ pour $1 \leqslant x \leqslant 6$.

**41.** La fonction de l'argument entier $u = \varphi(n)$ est numériquement égale à la quantité de nombres premiers non supérieurs à $n$. Dresser le tableau de valeurs de $u$ pour $1 \leqslant n \leqslant 20$.

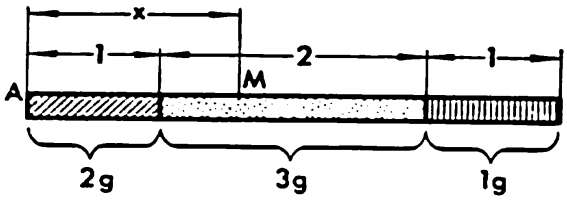


Fig. 5

**42.** Soit $u = f(n)$ une fonction de l'argument entier $n$ égale au nombre de diviseurs entiers de l'argument, différents de 1 et de $n$. Dresser le tableau de valeurs de $u$ pour $1 \leqslant n \leqslant 20$.

**43.** La poutre de la fig. 5 est composée de trois sections de 1 ; 2 ; 1 unité de longueur, respectivement de 2 ; 3 ; 1 unité de poids. Le poids du segment $AM$ de longueur $x$ est une fonction de $x$. Pour quelles valeurs de $x$ celle-ci est-elle définie? La mettre sous forme analytique et construire son graphe.

**44.** On considère une tour ayant la forme d'un cône tronqué droit circulaire de rayon de base $2R$ (inférieure) et $R$ (supérieure) et de hauteur $R$, supportant un cylindre de rayon $R$ et de hauteur $2R$, surmonté d'une demi-sphère de rayon $R$. Exprimer l'aire $S$ de la section transversale de la tour en fonction de la distance $x$ de la section à la base inférieure du cône. Représenter le graphe de la fonction $S = f(x)$.

**45.** Un cylindre est inscrit dans une sphère de rayon $R$. Exprimer le volume $V$ du cylindre en fonction de sa hauteur $x$. Trouver le domaine de définition de cette fonction.

**46.** Un cône droit est inscrit dans une sphère de rayon $R$. Exprimer l'aire de la surface latérale $S$ du cône en fonction de sa génératrice $x$. Déterminer le domaine de définition de cette fonction.

Déterminer le domaine de définition des fonctions:

**47.** 1) $y = 1 - \lg x$; 2) $y = \lg(x+3)$; 3) $y = \sqrt{5-2x}$;

4) $y = \sqrt{-px}\ (p > 0)$; 5) $y = \frac{1}{x^2-1}$; 6) $y = \frac{1}{x^2+1}$;

7) $y=\frac{1}{x^3-x}$; 8) $y=\frac{2x}{x^2-3x+2}$; 9) $y=1-\sqrt{1-x^2}$;

10) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-4x}}$; 11) $y=\sqrt{x^2-4x+3}$;

12) $y=\frac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$; 13) $y=\arcsin\frac{x}{4}$;

14) $y=\arcsin(x-2)$; 15) $y=\arccos(1-2x)$;

16) $y=\arccos\frac{1-2x}{4}$; 17) $y=\arcsin\sqrt{2x}$;

18) $y=\sqrt{1-|x|}$; 19) $y=\frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$;

20) $y=\frac{1}{\sqrt{x-|x|}}$; 21) $y=\sqrt{\lg\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)}$;

22) $y=\lg\sin x$; 23) $y=\arccos\frac{2}{2+\sin x}$;

24) $y=\log_x 2$.

48. 1) $y=\frac{1}{\lg(1-x)}+\sqrt{x+2}$;

2) $y=\sqrt{3-x}+\arcsin\frac{3-2x}{5}$;

3) $y=\arcsin\frac{x-3}{2}-\lg(4-x)$;

4) $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{\frac{1}{x-2}}-\lg(2x-3)$;

5) $y=\sqrt{x-1}+2\sqrt{1-x}+\sqrt{x^2+1}$;

6) $y=\frac{3}{4-x^2}+\lg(x^3-x)$;

7) $y=\lg\sin(x-3)+\sqrt{16-x^2}$;

8) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$; 9) $y=\frac{1}{\sqrt{\sin x}}+\sqrt[3]{\sin x}$;

10) $y=\lg\frac{x-5}{x^2-10x+24}-\sqrt[3]{x+5}$;

11) $y=\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$;

12) $y=\sqrt{x^2-3y+2}+\frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$;

13) $y=(x^2+x+1)^{-\frac{3}{2}}$; 14) $y=\lg(\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x})$;

15) $y=\lg[1-\lg(x^2-5x+16)]$.

49. Etablir l'identité des fonctions suivantes:

1) $f(x)=\frac{x}{x^2}$ et $\varphi(x)=\frac{1}{x}$; 2) $f(x)=\frac{x^2}{x}$ et $\varphi(x)=x$;

3) $f(x)=x$ et $\varphi(x)=\sqrt{x^2}$; 4) $f(x)=\lg x^2$ et $\varphi(x)=2\lg x$.

50. Imaginer un exemple de fonction analytiquement définie:
1) uniquement dans l'intervalle $-2 \leqslant x \leqslant 2$;
2) uniquement dans l'intervalle $-2 < x < 2$, sauf pour $x = 0$;
3) pour toutes les valeurs (réelles) de $x$ à l'exception de $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$.

51. Déterminer les domaines de définition des branches univoques de la fonction $y = \varphi(x)$ d'équation
1) $y^2 - 1 + \log_2 x(x-1) = 0$; 2) $y^4 - 2xy^2 + x^2 - x = 0$.

## Comportement des fonctions

52. Soit $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$; déterminer le domaine de définition de $f(x)$ et s'assurer que cette fonction n'est pas négative.

53. Etudier le signe des fonctions et trouver leurs racines:
1) $y = 3x - 6$; 2) $y = x^2 - 5x + 6$; 3) $y = 2^{x-1}$;
4) $y = x^3 - 3x^2 + 2x$; 5) $y = |x|$.

54. Etudier la parité des fonctions:

1) $y = x^4 - 2x^2$; 2) $y = x - x^2$; 3) $y = \cos x$; 4) $y = 2^x$;
5) $y = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$; 6) $y = \sin x$; 7) $y = \sin x - \cos x$;
8) $y = 1 - x^2$; 9) $y = \operatorname{tg} x$; 10) $y = 2^{-x^2}$;
11) $y = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$; 12) $y = \frac{a^x - a^{-x}}{2}$; 13) $y = \frac{x}{a^x - 1}$;
14) $y = \frac{a^x + 1}{a^x - 1}$; 15) $y = x \cdot \frac{a^x - 1}{a^x + 1}$;
16) $y = 2^{x - x^4}$; 17) $y = \ln \frac{1-x}{1+x}$.

55. Représenter les fonctions suivantes par la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire:
1) $y = x^3 + 3x + 2$; 2) $y = 1 - x^3 - x^4 - 2x^5$;
3) $y = \sin 2x + \cos \frac{x}{2} + \operatorname{tg} x$.

56. Montrer que $f(x) + f(-x)$ est une fonction paire et $f(x) - f(-x)$ une fonction impaire.

57. Ecrire les fonctions suivantes sous forme d'une somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire:
1) $y = a^x$; 2) $y(1+x)^{100}$ (voir exercice 56).

58. Montrer que le produit de deux fonctions paires est une fonction paire, le produit de deux fonctions impaires, une fonction paire et le produit d'une fonction paire par une fonction impaire, une fonction impaire.

59. Parmi les fonctions suivantes indiquer celles qui sont périodiques:

1) $y=\sin^2 x$; 2) $y=\sin x^2$; 3) $y=x\cdot\cos x$;

4) $y=\sin\frac{1}{x}$; 5) $y=1+\operatorname{tg} x$; 6) $y=5$;

7) $y=[x]$; 8) $y=x-[x]$.

(La fonction $[x]$ est définie comme suit: si $x$ est un entier, alors $[x]=x$. Si $x$ n'est pas entier, alors $[x]$ est égal au plus grand nombre entier inférieur à $x$. Ainsi $[2]=2$; $[3{,}25]=3$; $[-1{,}37]=-2$.)

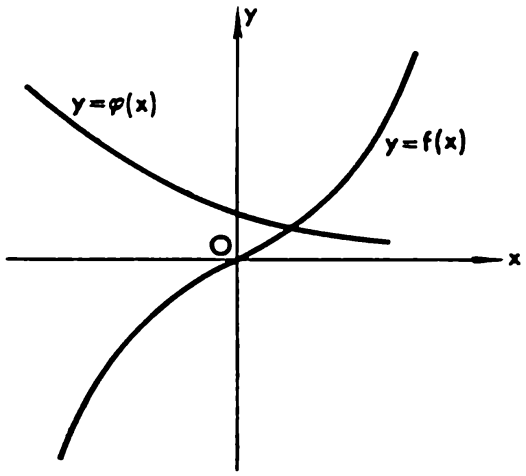


Fig. 6

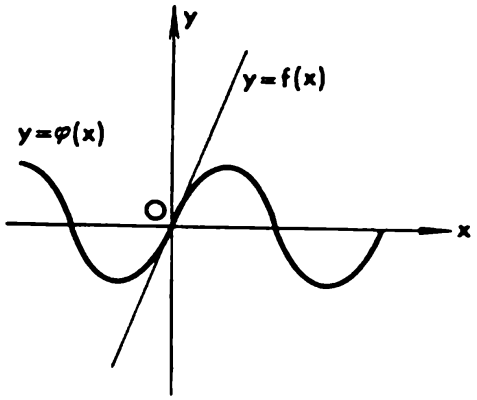


Fig. 7

60. Tracer le graphe de la fonction périodique de période $T=1$ donnée sur l'intervalle semi-ouvert $[0,1)$ par la formule

1) $y=x$; 2) $y=x^2$.

61. Indiquer les intervalles sur lesquels les fonctions indiquées sont croissantes, décroissantes ou constantes:

1) $y=|x|$; 2) $y=|x|-x$.

62. Trouver le minimum et le maximum des fonctions

1) $y=\sin^2 x$; 2) $y=\cos x^3$; 3) $y=1-\sin x$; 4) $y=2^{x^2}$.

63. Construire le graphe de la fonction $y=f(x)+\varphi(x)$ par addition des graphes:

1) de la fig. 6;

2) de la fig. 7.

64. Le graphe de la fonction $y=f(x)$ étant donné, construire celui des fonctions:

1) $y=|f(x)|$; 2) $y=\frac{1}{2}[|f(x)|+f(x)]$;

3) $y=\frac{1}{2}[|f(x)|-f(x)]$.

## § 3. Fonctions élémentaires usuelles

### Fonction linéaire

65. Sachant que la tension $E = 2{,}4$ V et l'intensité $I = 0{,}8$A, exprimer analytiquement, en utilisant la loi d'Ohm, la tension en fonction de l'intensité ; représenter le graphe de la fonction trouvée.

66. Un récipient de forme arbitraire est rempli d'un liquide. A la profondeur $h = 25{,}3$ cm la pression du liquide est $p = 18{,}4$ gf/cm$^2$. On demande :

a) d'établir une relation entre la pression et la profondeur ;

b) de calculer la pression à la profondeur $h = 14{,}5$ cm ;

c) de trouver à quelle profondeur la pression est égale à 26,5 gf/cm$^2$.

67. Un corps est animé d'un mouvement rectiligne sous l'action d'une force $F$. En utilisant la loi de Newton écrire la relation existant entre la force $F$ et l'accélération $w$ sachant que $a = 12$ m/s$^2$ et qu'après s'être déplacé de $s = 15$ m le corps a fourni un travail $A = 32$ joules.

68. Déterminer la fonction linéaire $y = ax + b$ en utilisant les données suivantes

1)

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 4 |
| 3 | 6 |

2)

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 2 | 4,3 |
| −1,6 | 0 |

3)

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 2,5 | 7,2 |
| 3,2 | 6,8 |

69. Un gaz occupe un volume de 107 cm$^3$ à 20° et un volume de 114 cm$^3$ à 40°. On demande :

a) d'exprimer le volume du gaz $V$ en fonction de la température $t$ en utilisant la loi de Gay-Lussac ;

b) de calculer le volume occupé à 0 °C.

70. Un point est animé d'un mouvement rectiligne uniforme. En 12 s il parcourt +32,7 cm, en 20 s, +43,4 cm. Exprimer l'espace $s$ en fonction du temps $t$.

71. Un circuit est soumis à une tension uniforme (variant suivant une loi linéaire). De 12 V au début d'une expérience qui dure 8 s, la tension tombe à 6,4 V. Exprimer la tension $V$ en fonction du temps $t$ et construire le graphe de cette fonction.

72. Trouver l'accroissement de la fonction linéaire $y = 2x - 7$ lorsque la variable indépendante croît de $x_1 = 3$ à $x_2 = 6$.

73. Trouver l'accroissement de la fonction linéaire $y = -3x + 1$ correspondant à l'accroissement $\Delta x = 2$ de la variable indépendante $x$.

74. On donne un accroissement $\Delta y = 10$ à la fonction $y = 2{,}5x + 4$. Trouver l'accroissement correspondant de l'argument.

75. On donne la fonction $y = \frac{x-a}{a^2-b^2}$ et la valeur initiale $x_1 = a - b$ de la variable indépendante. Trouver la valeur finale $x_2$ de la variable indépendante $x$ qui donne à $y$ l'accroissement $\Delta y = \frac{1}{a-b}$.

76. On se donne une fonction $\varphi(x)$ comme suit : $\varphi(x) = \frac{1}{2}x + 2$ pour $-\infty < x \leqslant 2$ ; $\varphi(x) = 5 - x$ pour $2 \leqslant x < +\infty$. Trouver analytiquement et graphiquement les racines de l'équation $\varphi(x) = 2x - 4$.

77. Construire le graphe de la fonction :

1) $y = |x+1| + |x-1|$ ; 2) $y = |x+1| - |x-1|$ ;
3) $y = |x-3| - 2|x+1| + 2|x| - x + 1$.

78*. Pour quelles valeurs de $x$ est vérifiée l'inégalité

$$|f(x) + \varphi(x)| < |f(x)| + |\varphi(x)|,$$

si $f(x) = x - 3$ et $\varphi(x) = 4 - x$.

79. Pour quelles valeurs de $x$ est vérifiée l'inégalité

$$|f(x) - \varphi(x)| > |f(x)| - |\varphi(x)|,$$

si $f(x) = x$ et $\varphi(x) = x - 2$.

80. Une fonction $f(x)$ est définie comme suit : dans tout intervalle $n \leqslant x < n + 1$, où $n$ est un entier positif, la fonction $f(x)$ varie linéairement et $f(n) = -1$, $f(n + 1/2) = 0$. Construire le graphe de cette fonction.

## Fonction du second degré

81. Construire le graphe et étudier les variations des fonctions indiquées :

1) $y = \frac{1}{2}x^2$ ; 2) $y = x^2 - 1$ ; 3) $y = |x^2 - 1|$ ; 4) $y = 1 - x^2$ ;
5) $y = x^2 - x + 4$ ; 6) $y = x - x^2$ ; 7) $y = |x - x^2|$ ;
8) $y = 2x^2 + 3$ ; 9) $y = 2x^2 - 6x + 4$ ; 10) $y = -3x^2 + 6x - 1$ ;
11) $y = |-3x^2 + 6x - 1|$ ; 12) $y = -x|x|$.

82. Ecrire l'expression analytique d'une fonction univoque définie dans l'intervalle $(-\infty, 6]$ sachant que son graphe est composé :
des points de l'axe $Ox$ d'abscisses inférieures à $-3$ ;
des points de la parabole d'axe de symétrie $Oy$ passant par $A(-3, 0)$, $B(0, 5)$ ;
du segment $CD$ d'extrémités $C(3, 0)$ et $D(6, 2)$.

83. Trouver le maximum des fonctions :

1) $y = -2x^2 + x - 1$; 2) $y = -x^2 - 3x + 2$ ;
3) $y = 5 - x^2$ ; 4) $y = -2x^2 + ax - a^2$ ; 5) $y = a^2x - b^2x^2$.

84. Trouver le minimum des fonctions :

1) $y = x^2 + 4x - 2$ ; 2) $y = 2x^2 - 1{,}5x + 0{,}6$ ;
3) $y = 1 - 3x + 6x^2$ ; 4) $y = a^2x^2 + a^4$ ;
5) $y = (ax + b)(ax - 2b)$.

85. Représenter un nombre $a$ par une somme de deux nombres tels que leur produit soit maximal.

86. Représenter un nombre donné $a$ par une somme de deux nombres tels que la somme de leurs carrés soit minimale.

87. On veut clôturer un terrain rectangulaire près d'un mur en pierre. La longueur totale de la clôture est de 8 m. Quelle est la longueur du côté parallèle au mur qui rend maximale l'aire délimitée par la clôture et le mur?

88. La somme de deux côtés adjacents d'un triangle est égale à 100 cm. Quelle doit être la longueur respective de ces côtés pour que l'aire du triangle soit maximale?

89. Parmi les cylindres tels que la section axiale ait un périmètre $P = 100$ cm, trouver celui qui possède la plus grande surface latérale.

90. Parmi les cônes tels que le périmètre de la section axiale soit égal à $P$, trouver celui qui possède la plus grande surface latérale.

91. Soit un corps ayant la forme d'un cylindre circulaire droit et supportant un cône (de même base) d'angle au sommet 60°. Sachant que le périmètre de la section axiale est égal à 100 cm trouver le rayon du cylindre qui rend maximum la surface latérale de ce corps.

92. Dans un triangle isocèle de base $a$ et de hauteur $h$ on inscrit un rectangle comme l'indique la fig. 8. Trouver la largeur du rectangle d'aire maximale.

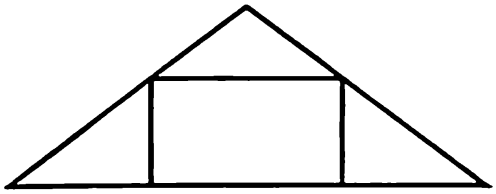

Fig. 8

93. Dans un cône droit donné on inscrit un cylindre de base concentrique à celle du cône. Pour quel rapport des rayons de base du cône et du cylindre ce dernier aura-t-il la plus grande surface latérale?

94. On donne un cône circulaire de rayon de base $R$ et de hauteur $H$. On y inscrit un cylindre de base concentrique à celle du cône. Trouver le rayon du cylindre de plus grande surface totale. Etudier le cas $H > 2R$ et $H \leqslant 2R$.

95. Trouver le rayon du cercle dont un secteur de périmètre égal à un nombre donné $P$ admet la plus grande aire.

96. Une fenêtre a la forme d'un rectangle surmonté d'un triangle équilatéral. Le périmètre de la fenêtre est égal à $P$. Pour quelle valeur de la largeur du rectangle la fenêtre a-t-elle la plus grande surface?

97. Une fenêtre a la forme d'un rectangle surmonté d'un demi-cercle. Pour quelle valeur de la largeur du rectangle cette fenêtre a-t-elle la plus grande surface si son périmètre est égal à 2 m?

98. Une feuille de carton a la forme d'un rectangle de $30 \times 50$ cm. On demande de découper les coins de telle sorte qu'en pliant cette feuille suivant les lignes pointillées (fig. 9) on obtienne une boîte de plus grande surface latérale. Trouver le côté des carrés découpés.

**99.** On veut construire un parallélépipède rectangle de base carrée avec un fil de fer de 120 cm de longueur. Pour quelle valeur du côté de base la surface totale de ce parallélépipède est-elle la plus grande?

**100.** On coupe un fil de fer de longueur $a$ cm en deux parties dont l'une sert à construire un carré, l'autre un triangle équilatéral. Comment faut-il couper ce fil pour que la somme des surfaces des deux figures soit minimale?

**101.** Trouver sur la droite $y = x$ un point tel que la somme des carrés des distances aux points $(-a, 0)$, $(a, 0)$ et $(0, b)$ soit minimale.

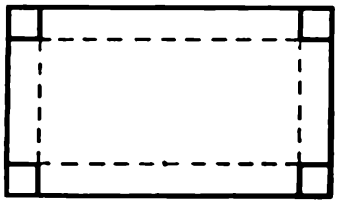

Fig. 9

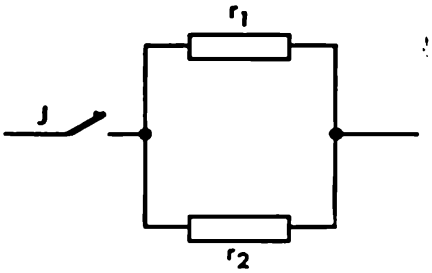


Fig. 10

**102.** Trouver sur la droite $y = x + 2$ un point tel que la somme des carrés des distances aux droites $3x - 4y + 8 = 0$ et $3x - y - 1 = 0$ soit minimale?

**103.** Un courant électrique d'intensité $J$ traverse deux circuits de résistances $r_1$ et $r_2$ (fig. 10). Montrer que la perte d'énergie due au réchauffement du conducteur par unité de temps est la plus petite lorsque la distribution des courants est inversement proportionnelle aux résistances des circuits. (On se servira de la loi de la quantité de chaleur dégagée: $Q = 0{,}24\ J^2Rt$.)

**104.** Construire la parabole $y = x^2$ et l'utiliser à la résolution graphique des équations suivantes:

1) $x^2 - x - 2{,}25 = 0$; 2) $2x^2 - 3x - 5 = 0$;

3) $3{,}1x^2 - 14x + 5{,}8 = 0$;

4) $4x^2 - 12x + 9 = 0$; 5) $3x^2 - 8x + 7 = 0$.

**105.** On donne la fonction $\varphi(x)$ comme suit: $\varphi(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ pour $-\infty < x \leqslant \frac{11}{3}$; $\varphi(x) = 1 + x$ pour $\frac{11}{3} \leqslant x < +\infty$. Trouver analytiquement et graphiquement toutes les racines réelles de l'équation $[\varphi(x)]^2 = 7x + 25$.

**106.** Etablir le domaine de définition de la fonction

$$y = \lg(ax^2 + bx + c).$$

**107.** Trouver $f(x + 1)$ si $f(x - 1) = 2x^2 - 3x + 1$.

**108*.** Montrer que la fonction $f(x) = \frac{x^2+2x+c}{x^2+4x+3c}$ est à valeurs réelles si $0 < c \leqslant 1$.

**109.** En se servant de la loi de Boyle-Mariotte exprimer le volume d'un gaz en fonction de la pression avec $t$ constant sachant que ce gaz occupe un volume de 2,3 l à une pression de 760 mm Hg. Tracer le graphe de cette fonction.

**110.** Exprimer $x$ en fonction de $v$ sachant que $x$ est inversement proportionnel à $y$, $y$ inversement proportionnel à $z$ et $z$ inversement proportionnel à $v$.

**111.** Exprimer $x$ en fonction de $v$ sachant que $x$ est inversement proportionnel à $y$, $y$ directement proportionnel à $z$, $z$ directement proportionnel à $u$ et $u$ inversement proportionnel à $v$.

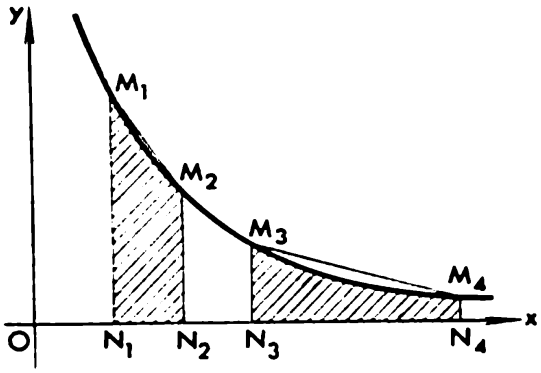


Fig. 11

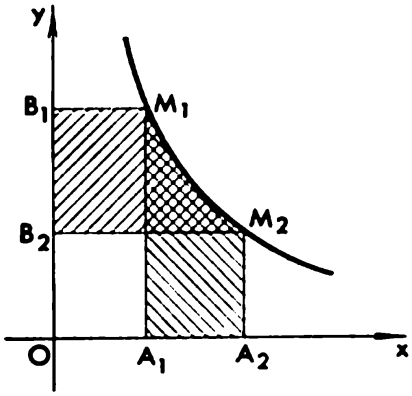


Fig. 12

**112.** La quantité de matière se déposant sur une électrode est proportionnelle à l'intensité du courant, l'intensité à la conductance de l'électrolite, la conductance de l'électrolite à la concentration de l'électrolite et, enfin, la concentration de l'électrolite inversement proportionnelle au volume du solvant pour cette quantité de matière. Exprimer la quantité de matière déposée sur l'électrode en fonction du volume du solvant.

**113.** Construire le graphe de la fonction homographique:

1) $y=\frac{x-1}{x-2}$; 2) $y=\frac{2x}{3-x}$; 3) $y=\frac{2x-5}{3x-7,5}$;

4) $y=\frac{x}{1-\frac{1}{2}x}$; 5) $y=\frac{4-3x}{3-2,25x}$.

**114.** Déterminer graphiquement les extrémums de la fonction homographique dans l'intervalle donné:

1) $y=\frac{4}{x}$ [1, 5]; 2) $y=\frac{x}{2x-5}$ [−1, 2]; 3) $y=\frac{1-x}{1+x}$ [0, 4].

**115.** Montrer que: 1) si les abscisses des quatre points $M_1$ $(x_1; y_1)$, $M_2$ $(x_2; y_2)$, $M_3$ $(x_3; y_3)$, $M_4$ $(x_4; y_4)$ du graphe de la fonction $y=\frac{k}{x}$

(fig. 11) forment la proportion $\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_3}{x_4}$, alors les trapèzes rectilignes $M_1M_2N_2N_1$ et $M_3M_4N_4N_3$ sont égaux.

2) si les points $M_1$ et $M_2$ sont situés sur le graphe de la fonction $y=\frac{k}{x}$ (fig. 12), alors les aires des figures $A_1M_1M_2A_2$ et $B_1M_1M_2B_2$ sont égales.

**116.** Construire par addition le graphe de la fonction $y=\frac{x^2+1}{x}$.

## § 4. Fonction inverse. Fonction puissance. Fonction exponentielle. Fonction logarithmique

### Fonction inverse

**117.** Trouver la fonction inverse de

1) $y=x$; 2) $y=2x$; 3) $y=1-3x$; 4) $y=x^2+1$;

5) $y=\frac{1}{x}$; 6) $y=\frac{1}{1-x}$; 7) $y=x^2-2x$; 8) $y=\sqrt[3]{x^2+1}$;

9) $y=10^{x+1}$; 10) $y=1+\lg(x+2)$; 11) $y=\log_x 2$;

12) $y=\frac{2^x}{1+2^x}$; 13) $y=\frac{10^x-10^{-x}}{10^x+10^{-x}}+1$; 14) $y=2\sin 3x$;

15) $y=1+2\sin\frac{x-1}{x+1}$; 16) $y=4\arcsin\sqrt{1-x^2}$.

**118.** Montrer que l'inverse de la fonction homographique $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ (sous réserve que $ad-bc\neq 0$) est également homographique.

**119.** Sous quelles conditions la fonction homographique $f(x)=\frac{ax+b}{cx+b}$ coïncide-t-elle avec son inverse ?

**120.** Montrer que si $f(x)=\sqrt[n]{a-x^n}$, $x>0$, alors $f[f(x)]=x$. Trouver la fonction inverse de $f(x)$.

**121.** Quelle est la propriété du graphe d'une fonction identique à son inverse?

**122.** Soit la fonction implicite $y^2-1+\log_2(x-1)=0$. Trouver son domaine de définition et son inverse.

**123.** Soit la fonction implicite $y^2+\sin^3 x-y+2=0$. Trouver son inverse.

### Fonction puissance

**124.** Construire le graphe de la fonction

1) $y=\frac{1}{3}x^3$; 2) $y=-\frac{1}{2}x^3$; 3) $y=x^3+3x^2$;

4) $y=x^3-x+1$; 5) $y=-x^3+2x-2$; 6) $y=2x^{\frac{3}{2}}$;

7) $y=\frac{1}{2}x^{\frac{5}{4}}$; 8) $y=x^{0,3}$; 9) $y=x^{2,1}$; 10) $y=x^{0,62}$;

11) $y=\frac{1}{2}x^{-0,2}$; 12) $y=5x^{-2,5}$; 13) $y=1-\sqrt{|x|}$.

**125.** Trouver graphiquement les valeurs approchées des racines réelles de l'équation $x+3=4\sqrt[3]{x^2}$.

**126*.** Construire le graphe de la parabole cubique $y=x^3$ et résoudre graphiquement les équations:

1) $x^3+x-4=0$; 2) $x^3-3x^2-x+3=0$;

3) $x^3-6x^2+9x-4=0$; 4) $x^3+3x^2+6x+4=0$.

**127.** Résoudre graphiquement les problèmes suivants:

1) Trouver un nombre dont le carré soit égal à la somme de ce nombre et de son inverse.

2) Une sphère en bois de 10 cm de rayon et de densité 0,8 g/cm³ flotte à la surface de l'eau. Trouver la hauteur du segment immergé.

3) Un cube et une pyramide en bois de base carrée pèsent 0,8 kg. L'arête du cube est égale au côté de la base de la pyramide; la hauteur de la pyramide est égale à 45 cm. Trouver l'arête du cube. Le poids spécifique du bois est 0,8 gf/cm³.

**128.** Soit donnée une fonction $y=x^n$, $x>0$. Pour quelles valeurs de $x$ cette fonction prend-elle des valeurs respectivement plus grandes et plus petites que la fonction inverse?

## Fonctions exponentielle et hyperboliques

**129.** Tracer les graphes des fonctions:

1) $y=-2^x$; 2) $y=2^{x+3}$; 3) $y=\frac{1}{3}\cdot 3^x$;

4) $y=1-3^{x-3}$; 5) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$; 6) $y=2^{-x^2}$.

**130.** Utiliser le graphe de la fonction $y=2^x$ pour construire sans calculs supplémentaires celui des fonctions:

1) $y=2^{x-1}$; 2) $y=\frac{1}{12}\cdot 2^{\frac{x}{2}}$; 3) $y=\frac{1}{3}\cdot 2^{\frac{x-1}{2}}+1$.

**131.** Montrer que le graphe de la fonction $y=k\cdot a^x$ $(k>0)$ se déduit du graphe de la fonction $y=a^x$ par une translation de vecteur parallèle à l'axe des $y$.

**132.** Construire par addition les graphes des fonctions

1) $y=x^2+2^x$; 2) $y=x^2-2^x$.

**133.** Résoudre graphiquement l'équation $2^x-2x=0$.

**134.** Construire l'aire limitée par les courbes $y=2^x$, $y=\frac{l+x}{x}$ et $x=3$. Déterminer approximativement sur le graphe les coordonnées des points d'intersection de ces courbes.

**135.** Trouver la plus grande valeur de $n$ telle que $2^x > x^n$ pour $x \geqslant 100$ ($n$ est entier).

**136.** Montrer que $y = \operatorname{sh} x$ et $y = \operatorname{th} x$ sont des fonctions impaires et $y = \operatorname{ch} x$ une fonction paire. Sont-elles périodiques?

**137.** Etablir les relations suivantes:

1) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$; 2) $\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x$;

3) $2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} 2x$; 4) $\operatorname{sh}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sh} \alpha \cdot \operatorname{ch} \beta \pm \operatorname{sh} \beta \cdot \operatorname{ch} \alpha$;

5) $\operatorname{ch}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{ch} \alpha \cdot \operatorname{ch} \beta \pm \operatorname{sh} \alpha \cdot \operatorname{sh} \beta$; 6) $1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;

7) $1 - \operatorname{cth}^2 x = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

### Fonction logarithmique

**138.** Tracer les graphes des fonctions:

1) $y = -\log_2 x$; 2) $y = \lg \frac{10}{x}$; 3) $y = |\lg x|$;

4) $y = \log_2 |x|$; 5) $y = 1 + \lg(x+2)$; 6) $y = \log_2 |1-x|$;

7) $y = a^{\log_a x}$; 8) $y = \log_x 2$.

**139.** Tracer le graphe de la fonction $y = \lg x$. En déduire les graphes des fonctions

1) $y = \frac{1}{2} \lg(x+1)$; 2) $y = 2 \lg \left(\frac{x+1}{2}\right)$.

**140.** Soit donnée la fonction $y = x + \lg \frac{1}{x}$. Construire par addition le graphe de cette fonction et en déterminer graphiquement le minimum sur l'intervalle $(0,2]$.

**141.** Montrer que le graphe de la fonction $y = \log_a (x + \sqrt{x^2+1})$ est symétrique par rapport à l'origine des coordonnées. Trouver la fonction inverse.

**142.** Montrer que l'ordonnée de tout point du graphe de la fonction $y = \log_a x$ est égale au produit par $n$ de l'ordonnée du point de même abscisse situé sur le graphe de la fonction $y = \log_{a^n} x$.

## § 5. Fonctions trigonométriques et trigonométriques inverses

### Fonctions trigonométriques

**143.** Déterminer l'amplitude et la période des harmoniques:

1) $y = \sin 3x$; 2) $y = 5 \cos 2x$; 3) $y = 4 \sin \pi x$;

4) $y = 2 \sin \frac{x}{2}$; 5) $y = \sin \frac{3\pi x}{4}$; 6) $y = 3 \sin \frac{5x}{8}$.

**144.** Déterminer l'amplitude, la période, la fréquence et la phase initiale des harmoniques :

1) $y = 2\sin(3x+5)$ ; 2) $y = -\cos\frac{x-1}{2}$ ;

3) $y = \frac{1}{3}\sin 2\pi\left(\omega - \frac{1}{6}\right)$ ; 4) $y = \sin\frac{2t+3}{6\pi}$.

**145.** Tracer le graphe des fonctions :

1) $y = -\sin x$ ; 2) $y = 1 - \sin x$ ; 3) $y = 1 - \cos x$ ;

4) $y = \sin 2x$ ; 5) $y = \sin\frac{x}{2}$; 6) $y = -2\sin\frac{x}{3}$ ;

7) $y = \cos 2x$ ; 8) $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ ;

9) $y = 2\sin\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right)$ ; 10) $y = \frac{1}{2}\sin(2\pi x - 1{,}2)$ ;

11) $y = 2 + 2\sin\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$ ; 12) $y = 2\cos\frac{x-\pi}{3}$ ;

13) $y = |\sin x|$ ; 14) $y = |\cos x|$ ; 15) $y = |\operatorname{tg} x|$ ;

16) $y = |\operatorname{ctg} x|$ ; 17) $y = \sec x$ ; 18) $y = \operatorname{cosec} x$;

19) $y = \begin{cases} \cos x & \text{pour} \quad -\pi \leqslant x \leqslant 0, \\ 1 & \text{pour} \quad 0 < x < 1, \\ \frac{1}{x} & \text{pour} \quad 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$

**146.** Les côtés d'un triangle sont respectivement égaux à 1 et 2 cm. Représenter le graphe de l'aire de ce triangle comme une fonction de l'angle $x$ compris entre les côtés donnés. Trouver le domaine de définition de cette fonction et la valeur de l'argument $x$ qui rend maximum l'aire du triangle.

**147.** Un point est animé d'un mouvement uniforme sur un cercle de rayon $R$ centré à l'origine des coordonnées dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre (sens rétrograde) à une vitesse linéaire $v$ cm/s. L'abscisse du point de départ est $a$. Etablir l'équation de ce mouvement harmonique.

**148.** Un point est animé d'un mouvement uniforme sur le cercle $x^2 + y^2 = 1$. Entre les instants $t_0$ et $t_1$ il passe de l'ordonnée $y_0$ à l'ordonnée $y_1$. Etablir l'équation de ce mouvement (i.e. exprimer l'ordonnée du point courant $y$ en fonction du temps, de la période et de la phase initiale des oscillations).

**149.** La fig. 13 représente une manivelle de moteur. Le rayon du volant est $R$, la longueur de la bielle est $a$. Le volant est animé d'une rotation uniforme dans le sens des aiguilles d'une montre et fait $n$ tours par seconde. A l'instant $t = 0$, lorsque la bielle et la manivelle sont alignées (point mort), la crosse ($A$) se trouve au point $O$. Exprimer le déplacement $x$ de la crosse (A) en fonction du temps $t$.

**150.** Construire par addition les graphes des fonctions:

1) $y = \sin x + \cos x$; 2) $y = \sin 2\pi x + \sin 3\pi x$;

3) $y = 2 \sin \frac{x}{2} + 3 \sin \frac{x}{3}$; 4) $y = x + \sin x$;

5) $y = x - \sin x$; 6) $y = -2^x + \cos x$.

**151.** Résoudre graphiquement l'équation

1) $x = 2 \sin x$; 2) $x = \operatorname{tg} x$; 3) $x - \cos x = 0$;

4) $4 \sin x = 4 - x$; 5) $2^{-x} = \cos x$.

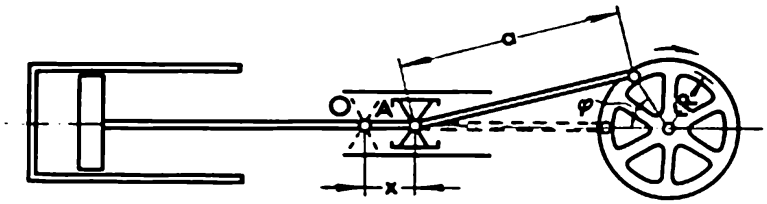


Fig. 13

**152.** Trouver la période de l'harmonique:

1) $y = 2 \sin 3x + 3 \sin 2x$; 2) $y = \sin t + \cos 2t$;

3) $y = \sin \frac{\pi t}{3} + \sin \frac{\pi t}{4}$;

4) $y = \sin \left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + 2 \sin \left(3\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + 3 \sin 5\pi t$.

**153.** Tracer le graphe d'un harmonique simple:

1) $y = \sin x + \cos x$;

2) $y = \sin x + 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

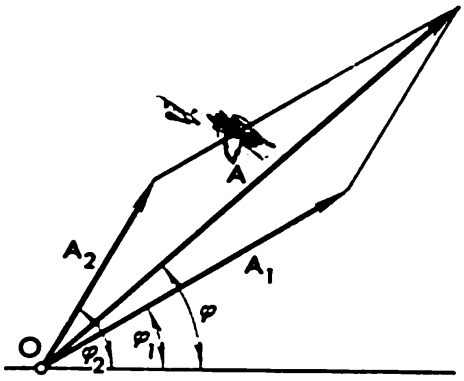


Fig. 14

**154.** Démontrer la méthode graphique suivante d'addition des oscillations harmoniques. Soient donnés les harmoniques

$A_1 \sin (\omega x + \varphi_1)$ et $A_2 \sin (\omega x + \varphi_2)$.

Construisons les vecteurs $\boldsymbol{A}_1$ et $\boldsymbol{A}_2$ de longueur respectivement $A_1$ et $A_2$ et faisant les angles $\varphi_1$ et $\varphi_2$ avec l'axe horizontal (fig. 14). La somme des vecteurs $\boldsymbol{A}_1$ et $\boldsymbol{A}_2$ est un vecteur $\boldsymbol{A}$ de longueur $A$ faisant un angle $\varphi$ avec l'horizontale; $A$ et $\varphi$ sont respectivement l'amplitude et la phase initiale de la somme

$$A_1 \sin (\omega x + \varphi_1) + A_2 \sin (\omega x + \varphi_2) = A \sin (\omega x + \varphi).$$

**155*.** Trouver la période et tracer les graphes des fonctions:

1) $y=|\sin x|+|\cos x|$; 2) $y=\frac{1}{2}\left(\frac{|\sin x|}{\cos x}+\frac{\sin x}{|\cos x|}\right)$.

**156.** Trouver le domaine de définition et tracer les graphes des fonctions:

1) $y=\lg\sin x$; 2) $y=\sqrt{\lg\sin x}$; 3) $y=\sqrt{\lg\frac{1}{|\sin x|}}$.

## Fonctions trigonométriques inverses

**157.** Tracer les graphes des fonctions:

1) $y=\operatorname{arcctg} x$; 2) $y=2\arcsin\frac{x}{2}$; 3) $y=1+\operatorname{arctg} 2x$;

4) $y=\frac{\pi}{2}-\arccos 2x$; 5) $y=\arcsin\frac{1-x}{4}$.

**158.** Un secteur d'angle au centre $\alpha$ est enroulé en cône. Exprimer l'angle au sommet $\omega$ du cône en fonction de l'angle au centre $\alpha$ et tracer le graphe de la fonction obtenue.

**159.** Un tableau de hauteur $a$ (m) est accroché à un mur sous un angle dièdre $\varphi$. Le côté inférieur du tableau est situé à $b$ mètres au-dessus de l'œil d'un observateur se tenant à une distance $l$ du mur. Exprimer l'angle $\gamma$ sous lequel l'observateur voit le tableau en fonction de l'angle $\varphi$.

**160.** Se servir des données de l'exercice 149 (fig. 13) et exprimer l'angle $\alpha$ de rotation de la manivelle en fonction du déplacement $x$ de la crosse.

**161.** Pour quelles valeurs de $x$ sont vérifiées les égalités:

1) $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$; 2) $\arcsin\sqrt{x}+\arccos\sqrt{x}=\frac{\pi}{2}$;

3) $\arccos\sqrt{1-x^2}=\arcsin x$; 4) $\arccos\sqrt{1-x^2}=-\arcsin x$;

5) $\operatorname{arctg} x=\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$; 6) $\operatorname{arctg} x=\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}-\pi$;

7) $\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}=2\operatorname{arctg} x$; 8) $\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}=-2\operatorname{arctg} x$;

9) $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} 1=\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$;

10) $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} 1=\pi+\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$.

**162.** Utiliser les identités de l'exercice 161 pour trouver le domaine de définition et tracer les graphes des fonctions:

1) $y=\arccos\sqrt{1-x^2}$; 2) $y=\arcsin\sqrt{1-x}+\arcsin\sqrt{x}$;

3) $y=\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$; 4) $y=\operatorname{arctg} x-\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$.

**163*.** Tracer le graphe de la fonction $y = \arcsin(\sin x)$. Vérifier qu'elle est périodique.

**164.** Tracer le graphe de la fonction $y = \arccos(\cos x)$.

**165.** Tracer le graphe de la fonction $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

**166.** Tracer le graphe de la fonction:

1) $y = x - \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$;
2) $y = x - \arcsin(\sin x)$;
3) $y = x \arcsin(\sin x)$;
4) $y = \arccos(\cos x) - \arcsin(\sin x)$.

## § 6. Problèmes numériques

**167.** Tracer le graphe de la fonction $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 7$ sur l'intervalle $[-4, 2]$ en faisant varier $x$ par valeurs de 0,2; l'échelle des ordonnées est 20 fois inférieure à celle des abscisses. Déterminer graphiquement les extrémums de cette fonction sur l'intervalle $[-3, 2]$. A partir de quel point commence-t-elle à décroître? En quel point de l'intervalle $[-4, 2]$ s'annule-t-elle? Précision des calculs 0,1.

**168.** Lorsqu'on étudie les lois de la théorie de dispersion du tir l'on a à tracer le graphe de la fonction $y = e^{A\cos^2\alpha}$; $e \approx 2{,}718$. Construire ce graphe pour $A = 2$ en faisant varier $\alpha$ de 0 à 90° par valeurs de 5°. Précision des calculs 0,01.

**169.** Soient donnés trois points: $M_1$ (1,8); $M_2$ (5,6) et $M_3$ (9,3). Tracer la parabole $y = ax^2 + bx + c$ qui passe par ces points. Trouver les racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. Précision des calculs 0,01.

**170.** Soit donnée une feuille de tôle de $30 \times 30$ cm². On découpe sur les coins des carrés égaux, de manière à construire un caisson de 1 600 cm³ avec la partie restante. Trouver le côté $x$ de chaque carré découpé. Précision des calculs 0,01.

**171.** Vérifier que si dans l'équation $x^4 + px^2 + qx + s = 0$ l'on fait $x^2 = y$, alors cette équation se transforme en le système

$$\begin{cases} x^2 = y, \\ (y - y_0)^2 + (x - x_0)^2 = r^2, \end{cases}$$

où $y_0 = \frac{1-p}{2}$, $x_0 = -\frac{q}{2}$ et $r^2 = y_0^2 + x_0^2 - s$.

Appliquer cette transformation à la résolution graphique de l'équation $x^4 - 3x^2 - 8x - 29 = 0$. Précision des calculs 0,1.

**172*.** Se servir de la transformation de l'exercice 171 pour prouver, moyennant le changement de variable $x = x' + \alpha$, que les racines réelles de l'équation du quatrième degré $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ peuvent être trouvées graphiquement comme les points d'intersection d'un cercle avec la parabole $y = x^2$.

Se servir de cette transformation pour résoudre graphiquement l'équation $x^4 + 1{,}2x^3 - 22x^2 - 39x + 31 = 0$. Précision des calculs 0,1.

173. Trouver graphiquement les racines de l'équation $e^x \sin x = 1$, $e \approx 2{,}718$ comprises entre 0 et 10 ; établir une formule approchée pour les autres racines. Précision des calculs 0,01.

174. Résoudre graphiquement le système :

$$x + y^2 = 1; \qquad 16x^2 + y = 4.$$

Précision des calculs 0,01.

175. Tracer les graphes des fonctions (dans un système de coordonnées polaires) en faisant varier l'angle polaire $\varphi$ par valeurs de $\pi/12$ *).

1) $\rho = a\varphi$ (spirale d'Archimède) ;
2) $\rho = a/\varphi$ (spirale hyperbolique) ;
3) $\rho = e^{a\varphi}$ ($e \approx 2{,}718$) (spirale logarithmique) ;
4) $\rho = a \sin 3\varphi$ (rose à trois branches) ;
5) $\rho = a \cos 2\varphi$ (rose à deux branches) ;
6) $\rho = a(1 - \cos \varphi)$ (cardioïde).

Précision des calculs 0,01. La constante $a > 0$ est arbitraire.

*) L'on admet ici que si $\rho(\varphi) < 0$ le rayon correspondant ne définit aucun point du graphe.

# CHAPITRE II

# LIMITE. CONTINUITÉ

## § 1. Définitions fondamentales

**176.** Une fonction d'un argument entier prend les valeurs suivantes

$$u_1 = 0{,}9\,;\ u_2 = 0{,}99;\ \ u_3 = 0{,}999\,;\ \ldots,\ u_n = \underbrace{0{,}999\ldots9}_{n \text{ fois}}\,;\ldots$$

Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$. Déterminer $n$ pour que la valeur absolue de la différence entre $u_n$ et sa limite ne soit pas supérieure à 0,0001.

**177.** Une fonction $u_n$ prend les valeurs

$$u_1 = 1\,;\quad u_2 = \frac{1}{4}\,;\quad u_3 = \frac{1}{9}\,;\ \ldots\,;\ u_n = \frac{1}{n^2}\,;\ \ldots$$

Trouver $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$. Pour quelle valeur de $n$ l'écart entre $u_n$ et sa limite est-il inférieur à un nombre positif donné $\varepsilon$?

**178.** Démontrer que $u_n = \frac{n-1}{n+1}$ tend vers 1 lorsque $n$ croît indéfiniment. A partir de quelle valeur de $n$ l'écart entre $u_n$ et 1 n'est-il pas supérieur en valeur absolue à $10^{-4}$?

**179.** La fonction $v_n$ prend les valeurs

$$v_1 = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{1}\,;\quad v_2 = \frac{\cos\pi}{2}\,;\ v_3 = \frac{\cos\frac{3\pi}{2}}{3}\,;\ \ldots\,;\ v_n = \frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}\,;\ \ldots$$

Trouver $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$. A partir de quelle valeur de $n$ l'écart entre $v_n$ et sa limite n'est-il pas supérieur à 0,001 en valeur absolue?

Etablir si $v_n$ prend sa valeur limite.

**180.** Le terme général de la suite $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{5}{4}$, $u_3 = \frac{7}{8}$, $u_4 = \frac{17}{16}, \ldots$ est $\frac{2^n-1}{2^n}$ si $n$ est impair et $\frac{2^n+1}{2^n}$ si $n$ est pair.

Trouver $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$. Pour quelles valeurs de $n$ l'écart entre $u_n$ et sa limite est-il en valeur absolue $\leqslant 10^{-4}$; $\leqslant$ à un nombre positif $\varepsilon$ donné?

**181.** Montrer que la suite $u_n = \frac{4n^2+1}{3n^2+2}$ croît monotonement et tend vers 4/3 lorsque $n \to \infty$. A partir de quelle valeur de $n$ a-t-on $4/3 - u_n \leqslant \varepsilon$? ($\varepsilon$ est un nombre positif donné.)

**182.** Montrer que la suite $u_n = \frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}$ tend vers 1 lorsque $n \to \infty$. A partir de quelle valeur de $n$ a-t-on $|1 - u_n| \leqslant \varepsilon$?

Etudier le caractère de variation de $u_n$ à la limite.

**183.** La fonction $v_n$ prend les valeurs des coefficients binomiaux

$$v_1 = m,\ v_2 = \frac{m(m-1)}{1\cdot 2},\ v_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3},\ \ldots,$$

$$\ldots,\ v_n = \frac{m(m-1)(m-2)\ \ldots\ [m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ \ldots\ n},\ \ldots,$$

où $m$ est un entier positif. Trouver $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

**184.** Montrer que la suite $u_n = 1 + (-1)^n$ ne possède pas de limite lorsque $n \to \infty$.

**185.** Montrer que lorsque $n \to \infty$ la suite $u_n = \frac{2^n + (-2)^n}{2^n}$ ne possède pas de limite, alors que la suite $v_n = \frac{2^n + (-2)^n}{3^n}$ en possède une. Laquelle?

**186.** Etablir (si elles existent) les limites des suites:

$$1)\ u_n = n \sin\frac{n\pi}{2}; \qquad 2)\ u_n = \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{\lg n} \qquad (n > 1).$$

**187.** Démontrer le théorème: si les suites $u_1, u_2, \ldots, u_n \ldots$ et $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ tendent vers une limite commune $a$, alors vers cette limite tendra également la suite $u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_n, v_n, \ldots$

**188.** Démontrer le théorème: si la suite $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ tend vers une limite $a$ alors vers cette limite tendra toute suite partielle infinie (exemple $u_1, u_3, u_5, \ldots$).

**189.** Soit une suite $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ admettant $a \neq 0$ pour limite. Démontrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. Que peut-on dire de cette limite si $a = 0$? (Citer des exemples.)

## Fonctions d'argument continu

**190.** Soit $y = x^2$. Lorsque $x \to 2$ alors $y \to 4$. Déterminer $\delta$ tel que $|x-2| < \delta$ entraîne $|y-4| < \varepsilon = 0{,}001$.

**191.** Soit $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$. Lorsque $x \to 2$, alors $y \to \frac{3}{5}$. Déterminer $\delta$ tel que $|x-1| < \delta$ entraîne $\left|y - \frac{3}{5}\right| < 0{,}1$.

192. Soit $y=\frac{x-1}{2(x+1)}$. Lorsque $x \to 3$ on a $y \to \frac{1}{4}$. Déterminer $\delta$ tel que $|x-3|<\delta$ entraîne $\left|\frac{1}{4}-y\right|<0{,}01$.

193. Montrer que $\sin x \to 1$ lorsque $x \to \frac{\pi}{2}$. Quelles conditions doit satisfaire $x$ au voisinage du point $x=\pi/2$ pour que $1-\sin x < 0{,}01$?

194. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+1}=0$. Déterminer $N$ tel que $|x|>N$ entraîne $y<\varepsilon$.

195. $\lim\limits_{x\to\infty} y=\frac{x^2-1}{x^2+3} \to 1$. Déterminer $N$ tel que $|x|>N$ entraîne $|y-1|<\varepsilon$.

## § 2. Grandeurs infinies. Critères d'existence de la limite

### Grandeurs infinies

196. La fonction $u_n$ prend les valeurs

$$u_1=3,\ u_2=5,\ u_3=7,\ \ldots,\ u_n=2n+1,\ \ldots$$

Démontrer que $u_n$ est un infiniment grand lorsque $n \to \infty$. A partir de quelle valeur de $n$ la grandeur $u_n$ est-elle plus grande que $N$?

197. Montrer que le terme général $u_n$ de toute progression arithmétique est un infiniment grand lorsque $n \to \infty$. (Etudier son signe.) Cette assertion vaut-elle pour une progression géométrique quelconque?

198. $\lim\limits_{x\to 0} y=\frac{1+2x}{x} \to \infty$. Déterminer $x$ tel que l'on ait $|y|>10^4$.

199. Vérifier que la fonction $y=\frac{x}{x-3}$ est un infiniment grand lorsque $x \to 3$. Pour quelles valeurs de $x$ a-t-on $|y|>1000$?

200. Lorsque $x \to 1$ la fonction $y=\frac{1}{(x-1)^2}$ est un infiniment grand. Déterminer $\delta$ tel que $|x-1|<\delta$ entraîne $\frac{1}{(x-1)^2}>N=10^4$.

201. La fonction $y=\frac{1}{2^x-1}$ tend vers l'infini lorsque $x \to 0$. A quelles inégalités doit satisfaire $x$ pour que $|y|>100$?

202. Lorsque $x \to \infty$ l'on a $y=\lg x \to \infty$. Déterminer $M$ tel que $x>M$ entraîne $y>N=100$.

203. Quelles sont les principales fonctions élémentaires qui restent bornées dans leur domaine de définition tout entier?

204. Montrer que la fonction $y=\frac{x^2}{1+x^4}$ est bornée sur l'axe numérique tout entier.

**205.** Etablir si la fonction $y = \frac{x^2}{1+x^5}$ est bornée a) sur l'axe numérique tout entier; b) sur l'intervalle $[0, \infty]$.

**206.** Etablir si la fonction $y = \lg \sin x$ est bornée dans son domaine de définition tout entier.

Même question pour la fonction $y = \lg \cos x$.

**207.** 1) Montrer que les fonctions $y = x \sin x$ et $y = x \cos x$ ne sont pas bornées lorsque $x \to \infty$ (construire pour chacune de ces fonctions au moins une suite $x_n$ telle que $y_n \to \infty$).

2) Les fonctions mentionnées seront-elles des infiniment grands?

3) Tracer les graphes de ces fonctions.

**208.** Tracer les graphes des fonctions $f(x) = 2^{x \sin x}$ et $f(x) = 2^{-x \sin x}$.

Pour chacune de ces fonctions construire deux suites $x_n$ et $x$ telles que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n') = 0$.

**209.** Pour quelles valeurs de $a$ la fonction $y = a^x \sin x$ n'est-elle pas bornée lorsque $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$?

**210.** Peut-on dire des fonctions non bornées suivantes qu'elles sont des infiniment grands:

1) $f(x) = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$ pour $x \to 0$;

2) $f(x) = x \operatorname{arctg} x$ pour $x \to \infty$;

3) $f(x) = 2^x \arcsin(\sin x)$ pour $x \to +\infty$;

4) $f(x) = (2 + \sin x) \lg x$ pour $x \to +\infty$;

5) $f(x) = (1 + \sin x) \lg x$ pour $x \to +\infty$?

**211.** La fonction $u_n$ prend les valeurs

$$u_1 = 2, \quad u_2 = \frac{3}{4}, \quad u_3 = \frac{4}{9}, \ldots, \quad u_n = \frac{n+1}{n^2}, \ \ldots$$

S'assurer que $u_n$ est un infiniment petit lorsque $n \to \infty$.

**212.** La fonction $u_n$ prend les valeurs

$$u_1 = -7, \quad u_2 = -\frac{1}{2}, \quad u_3 = \frac{1}{27}, \quad u_4 = \frac{1}{8}, \ \ldots, \quad u_n = \frac{n^2-8}{n^3}, \ \ldots$$

S'assurer que $u_n$ est un infiniment petit lorsque $n \to \infty$.

**213.** Montrer que $y = \frac{x}{x+1} \to 0$ lorsque $x \to 0$. Déterminer $x$ tel que l'on ait $|y| < 10^{-4}$.

**214.** Montrer que lorsque $x \to \infty$ la fonction $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ tend vers 0. Déterminer $N$ tel que $x > N$ entraîne $y < \varepsilon$.

**215.** Montrer que si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$, on peut représenter $f(x)$ par la somme $f(x) = a + \varphi(x)$, où $\varphi(x)$ est un infiniment petit lorsque $x \to \infty$.

Représenter par une telle somme les fonctions suivantes:

1) $y=\frac{x^3}{x^3-1}$; 2) $y=\frac{x^2}{2x^2+1}$; 3) $y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

### Critère d'existence de la limite

**216*.** La fonction $u_n$ prend les valeurs

$$u_1=\frac{1}{4},\quad u_2=\frac{1}{4}+\frac{1}{10},\ \ldots,\ u_n=\frac{1}{3+1}+$$
$$+\frac{1}{3^2+1}+\ldots+\frac{1}{3^n+1},\ \ldots$$

Montrer que $u_n$ admet une limite lorsque $n\to\infty$.

**217.** La fonction $u_n$ prend les valeurs

$$u_1=\frac{1}{2},\quad u_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot4},\quad u_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{2\cdot4\cdot6},\ \ldots$$
$$\ldots,\ u_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot4}+\ldots+\frac{1}{2\cdot4\ldots(2n)},\ \ldots$$

Montrer que $u_n$ admet une limite lorsque $n\to\infty$.

**218.** Démontrer le théorème:

Si la différence de deux fonctions dont l'une est croissante et l'autre décroissante est un infiniment petit pour une même variation de la variable indépendante, alors ces fonctions tendent vers une même limite.

**219.** On donne deux nombres: $u_0$ et $v_0$ ($u_0<v_0$). Les termes des suites $u_n$ et $v_n$ sont définis par les formules

$$u_1=\frac{u_0+v_0}{2},\quad v_1=\frac{u_0+2v_0}{3};\quad u_2=\frac{u_1+v_1}{2},\quad v_2=\frac{u_1+2v_1}{3};$$

et en général

$$u_n=\frac{u_{n-1}+v_{n-1}}{2},\quad v_n=\frac{u_{n-1}+2v_{n-1}}{3}.$$

Se servir du théorème précédent pour montrer que les deux suites $u_n$ et $v_n$ tendent vers une même limite comprise entre $u_0$ et $v_0$.

**220.** On donne la suite $u_n$:

$$u_1=\sqrt{6},\quad u_2=\sqrt{6+u_1},\ \ldots,\ u_n=\sqrt{6+u_{n-1}},\ \ldots$$

Montrer qu'elle admet une limite qu'on évaluera.

## § 3. Fonctions continues

**221.** Une fonction $y$ est définie comme suit:

$$\begin{array}{lll} y=0 & \text{pour} & x<0; \\ y=x & \text{pour} & 0\leqslant x<1; \\ y=-x^2+4x-2 & \text{pour} & 1\leqslant x<3; \\ y=4-x & \text{pour} & x\geqslant 3. \end{array}$$

Etudier la continuité de cette fonction.

222. Trois cylindres dont les rayons de base sont respectivement égaux à 3, 2 et 1 m et la hauteur commune à 5 m sont posés l'un sur l'autre. Exprimer l'aire de la section transversale en fonction de la distance de cette section à la base du cylindre inférieur. Etudier la continuité de cette fonction et tracer son graphe.

223. Soit donnée

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{si } x\leqslant 1; \\ 3-ax^2, & \text{si } x>1. \end{cases}$$

Pour quelles valeurs de $a$ $f(x)$ est-elle continue? (Tracer son graphe.)

224. Soit

$$f(x)=\begin{cases} -2\sin x & \text{pour } x\leqslant -\frac{\pi}{2}; \\ A\sin x+B & \text{pour } -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}; \\ \cos x & \text{pour } x\geqslant\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Choisir $A$ et $B$ de telle sorte que la fonction $f(x)$ soit continue; tracer son graphe.

225. Trouver les points de discontinuité des fonctions $y=\frac{1}{x-2}$ et $y=\frac{1}{(x+2)^2}$. Tracer les graphes de ces fonctions. Indiquer la différence qui existe entre le comportement de ces deux fonctions au voisinage des points de discontinuité.

226. La fonction $f(x)=\frac{x^2-1}{x^3-1}$ n'est pas définie pour $x=1$. Quelle valeur faut-il donner à $f(1)$ pour que la fonction ainsi définie soit continue lorsque $x=1$?

227. De quelle espèce sont les discontinuités des fonctions $y=\frac{\sin x}{x}$ et $y=\frac{\cos x}{x}$ lorsque $x=0$? Etudier l'allure du graphe de ces fonctions au voisinage du point $x=0$.

228. Etudier la continuité de la fonction suivante: $y=\frac{|x|}{x}$ pour $x\neq 0$, $y=0$ pour $x=0$. Tracer son graphe.

229. Trouver le nombre et l'espèce des points de discontinuité de la fonction $y=\frac{1}{\lg|x|}$. Tracer son graphe.

230. La fonction $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ n'est pas définie au point $x=0$. Peut-on lui ajouter au point $x=0$ une quantité telle qu'elle la rende continue en ce point? Tracer le graphe de cette fonction.

231. Etudier la continuité de la fonction

$$f(x)=\sin\frac{\pi}{2x} \quad \text{pour} \quad x\neq 0,\ f(0)=1.$$

Tracer son graphe.

232. Tracer le graphe de la fonction $f(x) = x \sin \frac{\pi}{x}$. Quelle valeur doit prendre $f(0)$ pour que la fonction $f(x)$ soit partout continue?

233. Montrer que la fonction $y = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$ présente une discontinuité de première espèce au point $x = 0$. Tracer schématiquement le graphe de cette fonction au voisinage du point $x = 0$.

234. Etudier le caractère de discontinuité de la fonction $y = 2^{-2^{\frac{1}{1-x}}}$ au point $x = 1$. Peut-on définir $y$ pour $x = 1$ de telle sorte que la fonction $y$ soit continue pour $x = 1$?

235. Etudier le caractère de discontinuité de la fonction $y = \frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$ au point $x = 0$.

236. La fonction $f(x)$ est définie comme suit: $f(x) = (x+1)\, 2^{-\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{x}\right)}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Montrer que dans l'intervalle $-2 \leqslant x \leqslant 2$ elle prend toutes les valeurs comprises entre $f(-2)$ et $f(2)$ sans exception, alors qu'elle est discontinue (en quel point?). Tracer son graphe.

237. Etudier la continuité de la fonction $y = \frac{1}{1+2^{\operatorname{tg} x}}$. Quelle est l'allure de son graphe?

238. Soit la fonction: si $x$ est rationnel, $f(x) = 0$; si $x$ est irrationnel, $f(x) = x$. Pour quelle valeur de $x$ cette fonction est-elle continue?

239. Etudier la continuité et tracer le graphe des fonctions:

$$1)\ y = x - [x]; \quad 2)\ y = \frac{1}{x-[x]}; \quad 3)\ y = (-1)^{[x]}.$$

[La fonction $[x]$ est égale au plus grand entier non supérieur à $x$ (voir exercice 59)].

240. Utiliser les propriétés des fonctions continues pour montrer que l'équation $x^5 - 3x = 1$ possède au moins une racine comprise entre 1 et 2.

241*. Montrer: a) qu'un polynôme de degré impair possède au moins une racine réelle; b) qu'un polynôme de degré pair possède au moins deux racines réelles s'il prend au moins une valeur de signe contraire au coefficient du terme supérieur.

242. Montrer que l'équation $x \cdot 2^x = 1$ possède au moins une racine positive non supérieure à 1.

243. Montrer que l'équation $x = a \sin x + b$, où $0 < a < 1$, $b > 0$, possède au moins une racine positive non supérieure à $b + a$.

244. Montrer que l'équation $\frac{a_1}{x-\lambda_1}+\frac{a_2}{x-\lambda_2}+\frac{a_3}{x-\lambda_3}=0$, où $a_1>0$, $a_2>0$, $a_3>0$ et $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$, possède deux racines réelles comprises dans les intervalles $(\lambda_1,\lambda_2)$ et $(\lambda_2,\lambda_3)$.

## § 4. Limites. Comparaison des infiniment petits

### Fonctions d'un argument entier

Trouver les limites.

245. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}$. 246. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2n^2}$. 247. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$.

248. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-100n^2+1}{100n^2+15n}$. 249. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1000n^3+3n^2}{0{,}001n^4-100n^3+1}$.

250. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^4+(n-1)^4}$. 251. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^4-(n-1)^4}{(2n+1)^4+(n-1)^4}$.

252. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$. 253. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}$.

254. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+1}+n)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$. 255. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3-2n^2+1}+\sqrt[3]{n^4+1}}{\sqrt[4]{n^6+6n^5+2}-\sqrt[5]{n^7+3n^3+1}}$.

256. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n^5+2}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2}-\sqrt{n^3+1}}$. 257. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!-n!}$.

258. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$. 259. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$.

260. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$.

261. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(1+2+3+\ldots+n)$.

262. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+3+\ldots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)$.

263. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1-2+3-4+\ldots-2n}{\sqrt{n^2+1}}\right)$.

264*. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}\right)$.

265. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$.

266. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n+1}$. 267. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{1}{n}}+1}$.

Trouver les limites.

268. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+5}{x^2-3}$.

269. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x^3-3x+1}{x-4}+1\right)$.

270. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x}{1-x}$.

271. $\lim\limits_{x\to \sqrt{3}} \dfrac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$.

272. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$.

273. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$.

274. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$.

275. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$.

276. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$.

277. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

278. $\lim\limits_{x\to 2} \left[\dfrac{1}{x(x-2)^2}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right]$.

279. $\lim\limits_{x\to 1} \left[\dfrac{x+2}{x^2-5x+4}+\dfrac{x-4}{3(x^2-3x+2)}\right]$.

280. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ ($m$ et $n$ sont des entiers).

281. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$.

282. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$.

283. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2-1}{2x^2+1}$.

284. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$.

285. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x\right)$.

286. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$.

287. $\lim\limits_{x\to \infty} \left[\dfrac{3x^2}{2x+1}-\dfrac{(2x-1)(3x^2+x+2)}{4x^2}\right]$.

288. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{(x+1)^{10}+(x+2)^{10}+\ldots+(x+100)^{10}}{x^{10}+10^{10}}$.

289. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$.

290. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}}$.

291. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt[5]{x^7+3}+\sqrt[4]{2x^3-1}}{\sqrt[6]{x^8+x^7+1}-x}$.

292. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt[5]{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^7+1}}$.

293. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

294. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}$.

295. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

296. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.

297. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$.

298. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$.

299. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$.

300. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$.

301. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}$ $(a>b)$.

302. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$ ($n$ et $m$ sont des entiers).

303*. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}$.

304. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt{3+x^2}}{x-1}$.

305. Etudier les variations des racines du trinôme du second degré $ax^2+bx+c=0$ lorsque $b$ et $c$ sont constants ($b\neq 0$) et $a\to 0$.

Trouver les limites.

306. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$.

307. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$.

308. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (\sqrt{x^2+1}-x)$ *).

309. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

310. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)$.

311. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3})$.

312. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2})$.

313. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1})$.

314. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x}$.

315. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} kx}{x}$.

316. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$.

317. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x}$.

318. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\sin(\alpha^n)}{(\sin\alpha)^m}$ ($n$ et $m$ sont des entiers positifs).

319. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\arcsin x}{3x}$.

320. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x-\arcsin x}{2x+\operatorname{arctg} x}$.

321. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

322. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$.

323. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt[3]{(1-\cos\alpha)^2}}$.

324. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$.

325. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}{\alpha^3}$.

326. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{(1-\cos\alpha)^2}{\operatorname{tg}^3\alpha-\sin^3\alpha}$.

327. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$.

328. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$.

329. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}}$.

330. $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

---

*) Dans les exemples où $x\to\pm\infty$ il faut traiter séparément le cas $x\to+\infty$ et $x\to-\infty$.

331. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \operatorname{tg} x.$

332. $\lim\limits_{\alpha \to \pi} \frac{\sin \alpha}{1 - \frac{\alpha^2}{\pi^2}}.$

333. $\lim\limits_{z \to 1} (1 - z) \operatorname{tg} \frac{\pi z}{2}.$

334. $\lim\limits_{y \to a} \left(\sin \frac{y - a}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi y}{2a}\right).$

335. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}.$

336. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x}.$

337. $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{1 - \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} \left(\cos \frac{x}{4} - \sin \frac{x}{4}\right)}.$

338. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(2x \operatorname{tg} x - \frac{\pi}{\cos x}\right).$

339. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos (a + x) - \cos (a - x)}{x}.$

340. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2}.$

341. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin (a + x) - \sin (a - x)}{\operatorname{tg} (a + x) - \operatorname{tg} (a - x)}.$

342. $\lim\limits_{\alpha \to \beta} \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\alpha^2 - \beta^2}.$

343. $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin (a + 2h) - 2 \sin (a + h) + \sin a}{h^2}.$

344. $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\operatorname{tg} (a + 2h) - 2 \operatorname{tg} (a + h) + \operatorname{tg} a}{h^2}.$

345. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x}.$

346. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\operatorname{tg} x}.$

347. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - \sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$

348. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{x^2}.$

349. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \operatorname{arctg} 3x} - \sqrt[3]{1 - \arcsin 3x}}{\sqrt{1 - \arcsin 2x} - \sqrt{1 + \operatorname{arctg} 2x}}.$

350*. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{\sqrt{\pi} - \sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x + 1}}.$

---

351. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x}{1 + x}\right)^x.$

352. $\lim\limits_{t \to \infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^t.$

353. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x+1}{x}}.$

354. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^{mx}.$

355. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x + 1}{x - 2}\right)^{2x - 1}.$

356. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{3x - 4}{3x + 2}\right)^{\frac{x+1}{3}}.$

357. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$.

358. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^{x}$.

359. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{x}$.

360. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x}$.

361. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$.

362. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x}$.

363. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\operatorname{cosec} x}$.

364. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$.

365. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{x}$.

366. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$.

367. $\lim\limits_{x\to\infty}\{x[\ln(x+a)-\ln x]\}$.

368. $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$.

369. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$.

370. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{3x}$.

371. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x-1}$.

372*. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$.

373. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$.

374. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{x}$.

375. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$.

376. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$.

377. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x)$.

378. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\operatorname{th} x$.

## Limites

Trouver les limites.

379. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(ax+1)^n}{x^n+A}$. Considérer séparément les cas où $n$: 1) est un entier positif, 2) un entier négatif, 3) nul.

380. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right)$.

381. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{a^x}{a^x+1}$ $(a>0)$.

382. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$ $(a>0)$.

383. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$.

384. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$.

385. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x+\cos x}$.

386. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\arcsin x}{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

387. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin(a+3h)-3\sin(a+2h)+3\sin(a+h)-\sin a}{h^3}$.

388. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}^2 x\left(\sqrt{2\sin^2 x+3\sin x+4}-\sqrt{\sin^2 x+6\sin x+2}\right)$.

389. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$.

390*. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{4}\ldots\cos\dfrac{x}{2^n}\right)$.

391. $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(1-\cos\dfrac{1}{x}\right)$.

392. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x}\right)$.

393*. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x+2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

394. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x+2}-\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+2}\right)$.

395*. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-\operatorname{arctg}x}{x^3}$.

396. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^n}\right)^x\ (n>0)$.

397*. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

398. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}$.

399. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$.

400. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

401. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+a\sin bx)^{\frac{1}{x}}$.

## Comparaison des infiniment petits

402. Un infiniment petit $u_n$ prend les valeurs

$$u_1=1,\ u_2=\frac{1}{2},\ u_3=\frac{1}{3},\ \ldots,\ u_n=\frac{1}{n},\ \ldots,$$

et un infiniment petit $v_n$ les valeurs

$$v_1=1,\ v_2=\frac{1}{2!},\ v_3=\frac{1}{3!},\ \ldots,\ v_n=\frac{1}{n!},\ \ldots$$

Comparer $u_n$ et $v_n$; lequel d'entre eux possède le plus grand ordre de petitesse.

403. La fonction $u_n$ prend les valeurs

$$u_1=0,\ u_2=\frac{3}{8},\ u_3=\frac{8}{27},\ \ldots,\ u_n=\frac{n^2-1}{n^3},\ \ldots,$$

et la fonction $v_n$ respectivement les valeurs

$$v_1=2,\ v_2=\frac{5}{8},\ v_3=\frac{10}{27},\ \ldots,\ v_n=\frac{n^2+1}{n^3},\ \ldots$$

Comparer ces infiniment petits.

404. Un infiniment petit $u_n$ prend les valeurs

$$u_1=0,\ u_2=\frac{1}{4},\ u_3=\frac{2}{9},\ \ldots,\ u_n=\frac{n-1}{n^2},\ \ldots,$$

et un infiniment petit $v_n$ les valeurs

$$v_1 = 3, \quad v_2 = \frac{5}{4}, \quad v_3 = \frac{7}{9}, \ \ldots, \ v_n = \frac{2n+1}{n^2}, \ \ldots$$

Montrer que $u_n$ et $v_n$ sont d'un même ordre de grandeur mais ne sont pas équivalents.

**405.** Les fonctions $y = \frac{1-x}{1+x}$ et $y = 1 - \sqrt{x}$ sont des infiniment petits lorsque $x \to 1$. Laquelle d'entre elles possède le plus grand ordre de petitesse?

**406.** Soit donnée la fonction $y = x^3$. Montrer que lorsque $x \neq 0$ et $\Delta x \to 0$, les grandeurs $\Delta y$ et $\Delta x$ sont des infiniment petits d'un même ordre.

Vérifier que pour $x = 0$ la grandeur $\Delta y$ est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à $\Delta x$.

Pour quelle valeur de $x$ les accroissements $\Delta x$ et $\Delta y$ seront-ils équivalents?

**407.** Montrer que lorsque $x \to 1$ les infiniment petits $1 - x$ et $1 - \sqrt[3]{x}$ sont d'un même ordre. Sont-ils équivalents?

**408.** $\sqrt{a + x^3} - \sqrt{a}$ $(a > 0)$ est un infiniment petit lorsque $x \to 0$. Déterminer son ordre par rapport à $x$.

**409.** Trouver l'ordre des infiniment petits par rapport à $x$ lorsque $x \to 0$:

1) $x^3 + 1000x^2$; 2) $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}$; 3) $\frac{x(x+1)}{1+\sqrt{x}}$; 4) $\frac{7x^{10}}{x^3+1}$.

**410.** Montrer que les accroissements des fonctions $u = a\sqrt{x}$ et $v = bx^2$ pour $x > 0$ et $\Delta x \to 0$ sont d'un même ordre de petitesse. Pour quelle valeur de $x$ sont-ils équivalents ($a$ et $b$ sont non nuls)?

**411.** Montrer que lorsque $x \to 1$ les infiniment petits $1 - x$ et $a(1 - \sqrt[k]{x})$, où $a \neq 0$ et $k$ un entier positif, sont d'un même ordre. Pour quelle valeur de $a$ sont-ils équivalents?

**412.** Montrer que lorsque $x \to \frac{\pi}{2}$ les fonctions $\sec x - \operatorname{tg} x$ et $\pi - 2x$ sont des infiniment petits d'un même ordre. Seront-elles équivalentes?

**413.** Montrer que lorsque $x \to 0$ les infiniment petits $e^{2x} - e^x$ et $\sin 2x - \sin x$ sont équivalents.

**414.** Trouver l'ordre de petitesse par rapport à $x$ lorsque $x \to 0$ des infiniment petits:

1) $\sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}} - 1$; 2) $\sqrt{1+2x} - 1 - \sqrt{x}$; 3) $e^{\sqrt{x}} - 1$;

4) $e^{\sin x} - 1$; 5) $\ln(1 + \sqrt{x \sin x})$; 6) $\sqrt{1+x^2} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$;

7) $e^x - \cos x$; 8) $e^{x^2} - \cos x$; 9) $\cos x - \sqrt[3]{\cos x}$;

10) $\sin(\sqrt{1+x} - 1)$; 11) $\ln(1+x^2) - 2\sqrt[3]{(e^x - 1)^2}$;

12) $\arcsin(\sqrt{4+x^2} - 2)$.

**415.** Soit un triangle équilatéral de côté $a$ et de hauteur $h$; on construit un autre triangle équilatéral de côté $h$. On poursuit cette opération $n$ fois. Trouver la limite de la somme des aires de tous les triangles lorsque $n \to \infty$.

**416.** Dans un cercle de rayon $R$ on inscrit un carré, dans ce carré un cercle, dans ce cercle un carré et ainsi de suite $n$ fois. Trouver la

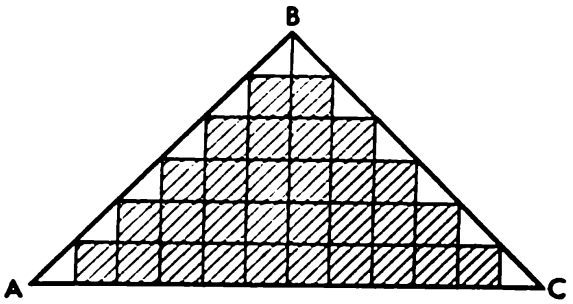


Fig. 15

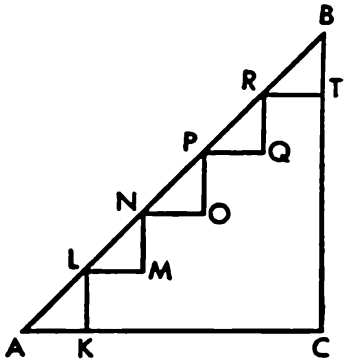


Fig. 16

limite de la somme des aires des cercles et la limite de la somme des aires des carrés lorsque $n \to \infty$.

**417.** Dans un triangle rectangle isocèle dont la base est divisée en $2n$ parties égales on inscrit une figure en escalier comme l'indique la fig. 15. Montrer que lorsque $n \to \infty$ la différence entre l'aire du triangle et celle de la figure en escalier est un infiniment petit.

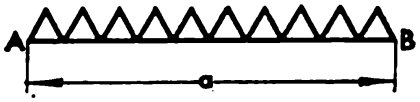


Fig. 17

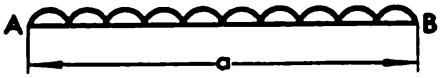


Fig. 18

**418.** On considère un triangle rectangle isocèle de côté $a$ et dont l'hypoténuse est divisée en $n$ parties égales. En menant à partir des points de division des droites parallèles aux côtés de l'angle droit on obtient la ligne polygonale AKLMNOPQRTB (fig. 16). La longueur de cette ligne est égale à $2a$ quel que soit $n$, donc sa limite est égale à $2a$. Or, lorsque $n \to \infty$, cette ligne se rapproche indéfiniment de l'hypoténuse. Donc l'hypoténuse est égale à la somme des côtés de l'angle droit. Trouver la lacune de ce raisonnement.

**419.** Un segment $AB$ de longueur $a$ est divisé en parties égales par $n$ points, d'où l'on mène des droites faisant un angle de $\frac{\pi}{2n}$ avec $AB$ (fig. 17). Trouver la limite de la ligne polygonale obtenue lorsque $n \to \infty$. La comparer avec celle de l'exercice précédent.

**420.** Un segment $AB$ de longueur $a$ est divisé en $n$ parties égales Sur chacune d'elles on construit un arc de cercle égal à $\pi/n$ radians (fig. 18). Trouver la limite de la longueur de la ligne obtenue lorsque $n \to \infty$. Comment varie ce résultat si l'arc de cercle considéré est un demi-cercle?

**421.** Un cercle de rayon $R$ est partagé en $n$ parties égales par les points $M_1, M_2, \ldots, M_n$. En prenant chaque point pour centre on

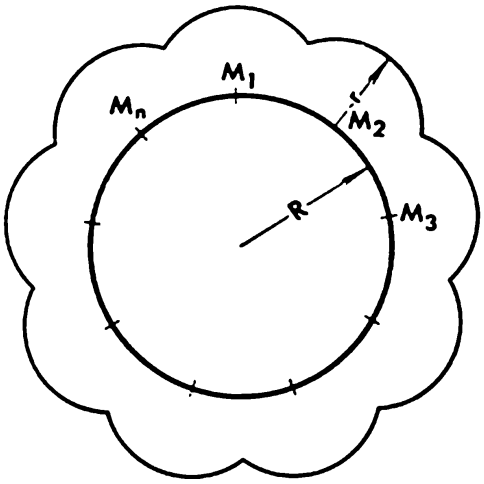


Fig. 19

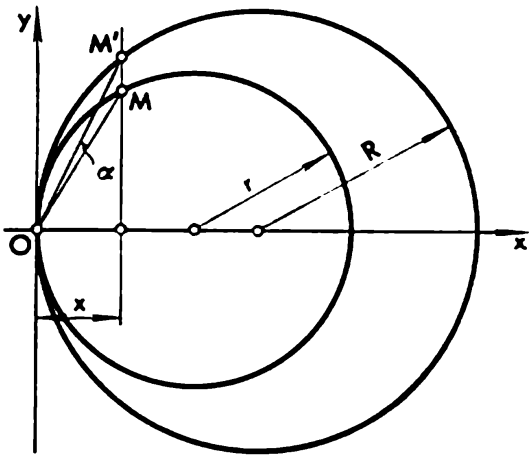


Fig. 20

trace un arc de cercle jusqu'à ce qu'il coupe les arcs de cercle voisins (fig. 19). Trouver la limite de la courbe fermée obtenue lorsque $n \to \infty$.

**422.** Deux cercles de rayons $R$ et $r$ $(R > r)$ sont tangents en l'origine des coordonnées et situés à droite de l'axe $OY$ (fig. 20). De quel ordre par rapport à $x$ sont les infiniment petits $MM'$ et $\alpha$ lorsque $x \to 0$?

**423.** Soit un cercle de centre $O$ et un point $P$ situé à l'extérieur. De $P$ on mène une tangente $PT$ au cercle, puis du point $T$ on abaisse une perpendiculaire $TN$ sur $OP$. Montrer que les segments $AP$ et $AN$, où $A$ est le point où $OP$ coupe le cercle, sont des infiniment petits équivalents lorsque $P \to A$.

**424.** Par les extrémités et le milieu d'un arc de cercle $AB$ on mène des tangentes, puis l'on joint $A$ et $B$. Montrer que le rapport des aires des deux triangles ainsi obtenus tend vers 4 lorsque l'arc $AB$ décroit indéfiniment.

## Problèmes numériques

**425.** Se servir de l'équivalence des fonctions $\sqrt{1+x} - 1$ et $1/2x$ lorsque $x \to 0$ pour calculer approximativement:

1) $\sqrt{105}$; 2) $\sqrt{912}$; 3) $\sqrt{260}$; 4) $\sqrt{1632}$; 5) $\sqrt{0{,}31}$; 6) $\sqrt{0{,}021}$.

**426.** Montrer que lorsque $x \to 0$, les fonctions $\sqrt[n]{1+x}-1$ et $\frac{x}{n}$ sont des infiniment petits. Utiliser ce résultat pour le calcul approché des racines : 1) $\sqrt[3]{1047}$ ; 2) $\sqrt[3]{8144}$ ; 3) $\sqrt[5]{1,1}$ ; 4) $\sqrt[5]{1080}$. Calculer ces racines à l'aide des tables logarithmiques et comparer les résultats obtenus.

**427.** Se servir de l'équivalence de $\ln(1+x)$ et $x$ lorsque $x \to 0$ pour le calcul approché des logarithmes naturels des nombres suivants : 1,01 ; 1,02 ; 1,1 ; 1,2. Trouver les logarithmes décimaux de ces nombres et comparer avec les données tabulaires.

# CHAPITRE III

# DÉRIVÉE ET DIFFÉRENTIELLE. CALCUL DIFFÉRENTIEL

## § 1. Dérivée. Vitesse de variation d'une fonction

### Quelques problèmes de physique

**428.** Soit l'équation du mouvement rectiligne d'un point

$$s = 5t + 6.$$

Calculer la vitesse moyenne du mouvement : a) pendant les 6 premières secondes ; b) pendant l'intervalle de temps compris entre la fin de la 3-ème et la fin de la 6-ème seconde.

**429.** Un point $M$ s'éloigne d'un point fixe $A$ de telle sorte que la distance $AM$ reste proportionnelle au carré du temps. 2 mn après le départ la distance $AM$ est égale à 12 m. Trouver la vitesse moyenne du mouvement : a) pendant les 5 premières minutes ; b) pendant l'intervalle de temps compris entre $t = 4$ mn et $t = 7$ mn ; c) pendant l'intervalle de temps compris entre $t = t_1$ et $t = t_2$.

**430.** Soit l'équation d'un mouvement rectiligne : $s = t^3 + \frac{3}{t}$.

Calculer la vitesse moyenne de $t=4$ à $t=4 + \Delta t$ en supposant $\Delta t = 2$ ; 1 ; 0,1 ; 0,03.

**431.** On sait que la chute libre d'un corps obéit à la loi $s = \frac{gt^2}{2}$, où $g$ ($= 9{,}80$ m/s$^2$) est l'accélération de la pesanteur. Trouver la vitesse moyenne dans l'intervalle de temps de $t = 5$ s à $(t + \Delta t)$ s en supposant $\Delta t=1$ s ; 0,1 s ; 0,05 s ; 0,001 s ; calculer la vitesse d'un corps tombant en chute libre à la fin de la 5-ème, à la fin de la 10-ème seconde. Etablir la vitesse de ce corps pour $t$ quelconque.

**432.** On considère une tige fine non homogène de longueur $L = 20$ cm. La masse du segment $AM = 2$ cm qui est de 8 g est proportionnelle au carré de la distance du point $M$ au point $A$. Calculer : a) la densité linéaire moyenne du segment de tige $AM = 2$ cm ; b) de toute la tige ; c) la densité de la tige au point $M$.

**433.** On considère une tige fine non homogène $AB$ de longueur 30 cm dont la masse (en g) est répartie suivant la loi $m = 3l^2 + 5l$, où $l$ est la distance au point $A$. Calculer : 1) la densité linéaire moyenne de la tige ; 2) la densité linéaire : a) au point situé à une distance $l = 5$ cm de $A$, b) au point $A$, c) à l'extrémité de la tige.

**434.** La quantité de chaleur $Q$ (en calories) nécessaire pour élever la température d'un gramme d'eau de 0 à t °C est définie par la

formule

$$Q = t + 0{,}00002t^2 + 0{,}0000003t^3.$$

Calculer la chaleur spécifique de l'eau pour $t = 30°$ et $t = 100°$.

**435*.** La vitesse angulaire d'un mouvement de rotation uniforme est par définition le rapport de l'angle de rotation à l'intervalle de temps correspondant. Donner la définition de la vitesse angulaire d'un mouvement de rotation non uniforme.

**436.** Si la désintégration radio-active était uniforme, par vitesse on entendrait la quantité de matière qui se désintègre par unité de temps. Or ce processus n'est pas uniforme. On demande de définir la vitesse de la désintégration radio-active.

**437.** L'intensité du courant continu est par définition la quantité d'électricité traversant la section transversale du conducteur dans l'unité de temps. Donner par analogie la définition de l'intensité du courant alternatif.

**438.** Le coefficient thermique de la dilatation linéaire d'une tige est par définition l'accroissement de sa longueur lorsque la température s'élève d'un degré C sous réserve que cette dilatation soit uniforme. En vérité ce processus n'est pas uniforme. On demande donc de définir le coefficient de dilatation linéaire en supposant $l = f(t)$, où $l$ est la longueur de la tige et $t$ la température.

**439.** Le coefficient de distension est par définition l'accroissement de l'unité de longueur d'un ressort sollicité par une force unitaire agissant sur chaque unité de surface de la section du ressort. On suppose que l'allongement est proportionnel à l'action (loi de Hooke). Donner une définition du coefficient $k$ si l'on s'écarte de la loi de Hooke. (On suppose que $l$ est la longueur du ressort, $S$ la section, $P$ la force de distension et $l = \varphi(P)$.)

## Fonction dérivée

**440.** Calculer l'accroissement de la fonction $y = x^3$ au point $x_1 = 2$ en supposant que l'accroissement $\Delta x$ de la variable indépendante est égal à : 1) 2 ; 2) 1 ; 3) 0,5 ; 4) 0,1.

**441.** Calculer le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ pour les fonctions :

1) $y = 2x^3 - x^2 + 1$ pour $x = 1$ ; $\Delta x = 0{,}1$ ;

2) $y = \frac{1}{x}$ pour $x = 2$ ; $\Delta x = 0.01$ ;

3) $y = \sqrt{x}$ pour $x = 4$ ; $\Delta x = 0{,}4$.

Montrer que lorsque $\Delta x \to 0$ la limite de ce rapport est égale à 4, (—1/4) et 1/4 respectivement dans le premier, le second et le troisième cas.

442. Soit la fonction $y = x^2$. Calculer la valeur approchée de la dérivée au point $x = 3$ en supposant $\Delta x$ égal à : a) 0,5 ; b) 0,1 ; c) 0,01 ; d) 0,001.

443. $f(x) = x^2$ ; calculer $f'(5)$ ; $f'(-2)$ ; $f'(-3/2)$.

444. $f(x) = x^3$ ; calculer $f'(1)$ ; $f'(0)$ ; $f'(-\sqrt{2})$ ; $f'(1/3)$.

445. $f(x) = x^2$ ; trouver le point où $f(x) = f'(x)$.

446. Montrer que la fonction $f(x) = x^2$ vérifie la relation $f'(a + b) = f'(a) + f'(b)$. Cette relation est-elle vérifiée par la fonction $f(x) = x^3$?

447. Calculer la dérivée de la fonction $y = \sin x$ pour $x = 0$.

448. Calculer la dérivée de la fonction $y = \lg x$ pour $x = 1$.

449. Calculer la dérivée de la fonction $y = 10^x$ pour $x = 0$.

450. On sait que $f(0) = 0$ et qu'existe la limite de l'expression $\frac{f(x)}{x}$ lorsque $x \to 0$. Montrer que cette limite est égale à $f'(0)$.

451. Démontrer le théorème : si $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont nulles pour $x = 0$ et possèdent des dérivées pour $x = 0$, ($\varphi'(0) \neq 0$), alors

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(0)}{\varphi'(0)}.$$

452. Montrer que si $f(x)$ admet une dérivée pour $x = a$, alors

$$\lim_{x \to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a} = f(a) - af'(a).$$

453. Montrer que la dérivée d'une fonction paire est une fonction impaire et inversement que la dérivée d'une fonction impaire est une fonction paire.

## Interprétation géométrique de la dérivée

454. Calculer le coefficient angulaire de la tangente à la parabole $y = x^2$ : 1) à l'origine des coordonnées, 2) au point (3 ; 9), 3) au point (—2 ; 4), aux points d'intersection avec la droite $y = 3x - 2$.

455. Trouver les points où le coefficient angulaire de la tangente à la parabole cubique $y = x^3$ est égal à 3.

456. Trouver le point où la tangente à la parabole $y = x^3$ est : 1) parallèle à l'axe $Ox$, 2) fait un angle de 45° avec l'axe des $x$.

457. Montrer que la tangente à la parabole cubique $y = x^3$ ne peut faire un angle obtus avec l'axe $Ox$.

458. Calculer l'angle sous lequel se coupent la parabole $y = x^2$ et la droite $3x - y - 2 = 0$.

459. Calculer l'angle sous lequel se coupent les paraboles $y = x^2$ et $y^2 = x$.

460. Calculer l'angle sous lequel se coupent l'hyperbole $y = 1/x$ et la parabole $y = \sqrt{x}$.

461. Ecrire l'équation de la tangente et de la normale menées à la courbe $y = x^3$ au point d'abscisse 2. Calculer la sous-tangente et la sous-normale.

462. Pour quelle valeur de la variable indépendante les tangentes aux courbes $y = x^2$ et $y = x^3$ sont-elles parallèles?

463. En quel point de la parabole $y = x^2$ la tangente est: 1) parallèle à la droite $y = 4x - 5$; 2) perpendiculaire à la droite $2x - 6y + 5 = 0$; 3) fait un angle de 45° avec la droite $3x - y + 1 = 0$?

464. Montrer que la sous-tangente d'un point quelconque de la parabole $y = ax^2$ est égale à la moitié de l'abscisse du point de tangence. Utiliser cette propriété pour donner une méthode de construction de la tangente à une parabole en un point donné.

465. Montrer que la normale à une parabole en un quelconque de ses points est la bissectrice de l'angle formé par le rayon vecteur de ce point et la droite qui passe par ce point et qui est parallèle à l'axe de la parabole. (On rappelle que le rayon vecteur d'un point est le vecteur qui joint ce point au foyer de la parabole.)

## § 2. Dérivation des fonctions

### Fonctions puissances

Dans ce paragraphe on désignera les variables indépendantes par $x$, $y$, $z$, $t$, $u$, $v$, $s$ et les constantes par $a$, $b$, $c$, $d$, $m$, $n$, $p$, $q$.

466. Calculer les dérivées des fonctions:

1) $3x^2-5x+1$; 2) $x^4-\frac{1}{3}x^3+2{,}5x^2-0{,}3x+0{,}1$;

3) $ax^2+bx+c$; 4) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2}$; 5) $2\sqrt{x}-\frac{1}{x}+\sqrt[4]{3}$;

6) $0{,}8\sqrt[4]{y}-\frac{y^3}{0{,}3}+\frac{1}{5y^2}$; 7) $\frac{x}{n}+\frac{n}{x}+\frac{x^2}{m^2}+\frac{m^2}{x^2}$;

8) $\frac{mx^2}{\sqrt{x}}+\frac{nx\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}-\frac{p\sqrt{x}}{x}$; 9) $\frac{mz^2+nz+4p}{p+q}$;

10) $0{,}1t^{-\frac{2}{3}}-\frac{5{,}2}{t^{1,4}}+\frac{2{,}5}{\sqrt[5]{t}}$; 11) $(x-0{,}5)^2$;

12) $\sqrt{x}\left(x^3-\sqrt{x}+1\right)$; 13) $(v+1)^2(v-1)$;

14) $0{,}5-3(a-x)^2$; 15) $\frac{ax^3+bx^2+c}{(a+b)x}$; 16) $\left(\frac{mu+n}{p}\right)^3$.

467. $f(x)=3x-2\sqrt{x}$. Trouver: $f(1)$; $f'(1)$; $f(4)$; $f'(4)$; $f(a^2)$; $f'(a^2)$.

468. $f(t)=\frac{t^2-5t-1}{t^3}$. Trouver: $f(-1)$; $f'(-1)$; $f'(2)$; $f'\left(\frac{1}{a}\right)$.

469. $f(z)=\frac{2z^3-3z+\sqrt{z}-1}{z}$. Trouver: $f'\left(\frac{1}{4}\right)$.

470. $f(x)=4-5x+2x^3-x^5$. Montrer que

$$f'(a)=f'(-a).$$

Dans les problèmes 471-489 dériver les fonctions.

471. 1) $y=(x^2-3x+3)(x^2+2x-1)$;

2) $y=(x^3-3x+2)(x^4+x^2-1)$;

3) $y=(\sqrt{x}+1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)$;

4) $y=\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-\sqrt{3}\right)\left(4x\sqrt[3]{x}+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{3x}\right)$;

5) $y=(\sqrt[3]{x}+2x)(1+\sqrt[3]{x^2}+3x)$;

6) $y=(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)$;

7) $y=(1+\sqrt{x})(1+\sqrt{2x})(1+\sqrt{3x})$.

472. $y=\frac{x+1}{x-1}$.

473. $y=\frac{x}{x^2+1}$.

474. $s=\frac{3t^2+1}{t-1}$.

475. $u=\frac{v^3-2v}{v^2+v+1}$.

476. $y=\frac{ax+b}{cx+d}$.

477. $z=\frac{x^2+1}{3(x^2-1)}+(x^2-1)(1-x)$.

478. $u=\frac{v^5}{v^3-2}$.

479. $y=\frac{1-x^3}{1+x^3}$.

480. $y=\frac{2}{x^3-1}$.

481. $u=\frac{v^2-v+1}{a^2-3}$.

482. $y=\frac{1-x^3}{\sqrt{\pi}}$.

483. $z=\frac{1}{t^2+t+1}$.

484. $s=\frac{1}{t^2-3t+6}$.

485. $y=\frac{2x^4}{b^2-x^2}$.

486. $y=\frac{x^2+x-1}{x^3+1}$.

487. $y=\frac{3}{(1-x^2)(1-2x^3)}$.

488. $y=\frac{ax+bx^2}{am+bm^2}$.

489. $y=\frac{a^2b^2c^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}$.

490. $f(x)=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$; trouver $f'(0)$ et $f'(1)$.

491. $F(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$; trouver $F'(0)$; $F'(1)$ et $F'(2)$.

492. $F(x)=\frac{1}{x+2}+\frac{3}{x^2+1}$; trouver $F'(0)$ et $F'(-1)$.

493. $s(t)=\frac{3}{5-t}+\frac{t^2}{5}$; trouver $s'(0)$ et $s'(2)$.

494. $y(x)=(1+x^3)\left(5-\frac{1}{x^2}\right)$; trouver $y'(1)$ et $y'(a)$.

495. $\rho(\varphi)=\frac{\varphi}{1-\varphi^2}$; trouver $\rho'(2)$ et $\rho'(0)$.

496. $\varphi(z)=\frac{a-z}{1+z}$; trouver $\varphi'(1)$.

497. $z(t)=(\sqrt{t^3}+1)\,t$; trouver $z'(0)$.

Dans les problèmes 498-513 dériver les fonctions.

498. 1) $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$; 2) $(x^2+1)^4$;
3) $(1-x)^{20}$; 4) $(1+2x)^{30}$; 5) $(1-x^2)^{10}$;
6) $(5x^3+x^2-4)^5$; 7) $(x^3-x)^6$;
8) $\left(7x^2-\frac{4}{x}+6\right)^6$; 9) $s=\left(t^3-\frac{1}{t^3}+3\right)^4$;
10) $y=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$; 11) $y=\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right)^5$;
12) $y=(2x^3+3x^2+6x+1)^4$.

499. $v=\frac{(s+4)^2}{s+3}$.

500. $s=\frac{t^3}{(1-t)^2}$.

501. $y=\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2x}}$.

502. $y=\frac{1-\sqrt[3]{2x}}{1+\sqrt[3]{2x}}$.

503. $y=\sqrt{1-x^2}$.

504. $y=(1-2x^{\frac{1}{2}})^4$.

505. $u=\left(\frac{v}{1-v}\right)^m$.

506. $y=\frac{2}{(x^2-x+1)^2}$.

507. $y=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

508. $y=\sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}}$.

509. $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^4-x^8}}$.

510. $y=\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$.

511. $y=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

512. $u=\frac{1}{v-\sqrt{a^2+v^2}}$.

513. $y=\frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}}+\frac{5}{\sqrt[4]{(x^2+2)^3}}$.

514. $u(v)=(v^2+v+2)^{\frac{3}{2}}$; trouver $u'(1)$.

515. $y(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$; trouver $y'(2)$.

516. $y(x)=\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$; trouver $y'(0)$.

## Fonctions trigonométriques

Dans les problèmes 517-546 dériver les fonctions.

517. $y=\sin x+\cos x$.

518. $y=\frac{x}{1-\cos x}$.

519. $y=\frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

520. $\rho=\varphi\sin\varphi+\cos\varphi$.

521. $z=\frac{\sin\alpha}{\alpha}+\frac{\alpha}{\sin\alpha}$.

522. $s=\frac{\sin t}{1+\cos t}$.

523. $y=\frac{x}{\sin x+\cos x}$.

524. $y=\frac{x\sin x}{1+\operatorname{tg} x}$.

525. $y=\cos^2 x$.

526. $y=\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x$.

527. $y=\cos x-\frac{1}{3}\cos^3 x$.

528. $y=3\sin^2 x-\sin^3 x$.

529. $y=\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg} x+x$.

530. $y=x\sec^2 x-\operatorname{tg} x$.

531. $y=\sec^2 x+\operatorname{cosec}^2 x$.

532. $y=\sin 3x$.

533. $y=a\cos\frac{x}{3}$.

534. $y=3\sin(3x+5)$.

535. $y=\operatorname{tg}\frac{x+1}{2}$.

536. $y=\sqrt{1+2\operatorname{tg} x}$.

537. $y=\sin\frac{1}{x}$.

538. $y=\sin(\sin x)$.

539. $y=\cos^3 4x$.

540. $y=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$.

541. $y=\sin\sqrt{1+x^2}$.

542. $y=\operatorname{ctg}\sqrt[3]{1+x^2}$.

543. $y=(1+\sin^2 x)^4$.

544. $y=\sqrt{1+\operatorname{tg}\left(x+\frac{1}{x}\right)}$.

545. $y=\cos^2\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

546. $y=\sin^2(\cos 3x)$.

547. Déduire les formules

$$(\sin^n x\cos nx)'=n\sin^{n-1}x\cos(n+1)x;$$
$$(\sin^n x\sin nx)'=n\sin^{n-1}x\sin(n+1)x;$$
$$(\cos^n x\sin nx)'=n\cos^{n-1}x\cos(n+1)x;$$
$$(\cos^n x\cos nx)'=-n\cos^{n-1}x\sin(n+1)x.$$

## Fonctions trigonométriques inverses

Dans les problèmes 548-572 dériver les fonctions.

548. $y=x\arcsin x$.

549. $y=\frac{\arcsin x}{\arccos x}$.

550. $y=(\arcsin x)^2$.

551. $y=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$.

552. $y=\frac{1}{\arcsin x}$.

553. $y=x\sin x\operatorname{arctg} x$.

554. $y=\frac{\arccos x}{x}$.

555. $y=\sqrt{x}\cdot\operatorname{arctg} x$.

556. $y=(\arccos x+\arcsin x)^n$.

557. $y=\operatorname{arcsec} x$.

558. $y=\frac{x}{1+x^2}-\operatorname{arctg} x$.

559. $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

560. $y=\frac{x^2}{\operatorname{arctg} x}$.

561. $y=\arcsin(x-1)$.

562. $y=\arccos\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

563. $y=\operatorname{arctg} x^2$.

564. $y=\arcsin\frac{2}{x}$.

565. $y=\arcsin(\sin x)$.

566. $y=\operatorname{arctg}^2\frac{1}{x}$.

567. $y=\sqrt{1-(\arccos x)^2}$.

568. $y=\arcsin\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

569. $y=\frac{1}{2}\sqrt[4]{\arcsin\sqrt{x^2+2x}}$.

570. $y=\arcsin\frac{\sin\alpha\sin x}{1-\cos\alpha\sin x}$.

571. $y=\arccos\frac{b+a\cos x}{a+b\cos x}$.

572. $y=\operatorname{arctg}(x-\sqrt{1+x^2})$.

## Fonctions logarithmiques

Dans les problèmes 573-597, dériver les fonctions.

573. $y=x^2\log_3 x$.

574. $y=\ln^2 x$.

575. $y=x\lg x$.

576. $y=\sqrt{\ln x}$.

577. $y=\frac{x-1}{\log_2 x}$.

578. $y=x\sin x\ln x$.

579. $y=\frac{1}{\ln x}$.

580. $y=\frac{\ln x}{x^n}$.

581. $y=\frac{1-\ln x}{1+\ln x}$.

582. $y=\frac{\ln x}{1+x^2}$.

583. $y=x^n\ln x$.

584. $y=\sqrt{1+\ln^2 x}$.

585. $y=\ln(1-2x)$.

586. $y=\ln(x^2-4x)$.

587. $y=\ln\sin x$.

588. $y=\log_3(x^2-1)$.

589. $y=\ln\operatorname{tg} x$.

590. $y=\ln\arccos 2x$.

591. $y=\ln^4\sin x$.

592. $y=\operatorname{arctg}[\ln(ax+b)]$.

593. $y=(1+\ln\sin x)^n$.

594. $y=\log_2[\log_3(\log_5 x)]$.

595. $y=\ln\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}$.

596. $y=\arcsin^2[\ln(a^3+x^3)]$.

597. $y=\sqrt[3]{\ln\sin\frac{x+3}{4}}$.

## Fonctions exponentielles

Dans les problèmes 598-633 dériver les fonctions.

598. $y=2^x$.

599. $y=10^x$.

600. $y=\frac{1}{3^x}$.

601. $y=\frac{x}{4^x}$.

602. $y=x\cdot 10^x$.

603. $y=xe^x$.

604. $y=\frac{x}{e^x}$. 605. $y=\frac{x^3+2^x}{e^x}$. 606. $y=e^x\cos x$.

607. $y=\frac{e^x}{\sin x}$. 608. $y=\frac{\cos x}{e^x}$. 609. $y=2^{\frac{x}{\ln x}}$.

610. $y=x^3-3^x$. 611. $y=\sqrt{1+e^x}$.

612. $y=(x^2-2x+3)\,e^x$. 613. $y=\frac{1+e^x}{1-e^x}$.

614. $y=\frac{1-10^x}{1+10^x}$. 615. $y=\frac{e^x}{1+x^2}$.

616. $y=xe^x(\cos x+\sin x)$. 617. $y=e^{-x}$.

618. $y=10^{2x-3}$. 619. $y=e^{\sqrt{x+1}}$.

620. $y=\sin(2^x)$. 621. $y=3^{\sin x}$.

622. $y=a^{\sin^3 x}$. 623. $y=e^{\arcsin 2x}$.

624. $y=2^{3^x}$. 625. $y=e^{\sqrt{\ln x}}$.

626. $y=\sin(e^{x^2+3x-2})$. 627. $y=10^{1-\sin^4 3x}$.

628. $y=e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}$. 629. $y=\ln\sin\sqrt[3]{\operatorname{arctg} e^{3x}}$.

630. $y=ae^{-b^2x^2}$. 631. $y=x^2e^{-\frac{x^2}{a^2}}$.

632. $y=Ae^{-k^2x}\sin(\omega x+\alpha)$. 633. $y=a^xx^a$.

## Fonctions hyperboliques

Dans les problèmes 634-649 dériver les fonctions.

634. $y=\operatorname{sh}^3 x$. 635. $y=\ln\operatorname{ch} x$.

636. $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{th} x)$. 637. $y=\operatorname{th}(1-x^2)$.

638. $y=\operatorname{sh}^2 x+\operatorname{ch}^2 x$. 639. $y=\operatorname{ch}(\operatorname{sh} x)$.

640. $y=\sqrt{\operatorname{ch} x}$. 641. $y=e^{\operatorname{ch}^2 x}$.

642. $y=\operatorname{th}(\ln x)$. 643. $y=x\operatorname{sh} x-\operatorname{ch} x$.

644. $y=\sqrt[4]{(1+\operatorname{th}^2 x)^3}$. 645. $y=\frac{1}{2}\operatorname{th}\frac{x}{2}-\frac{1}{6}\operatorname{th}^3\frac{x}{2}$.

646. $y=\sqrt[4]{\frac{1+\operatorname{th} x}{1-\operatorname{th} x}}$.

647. $y=\frac{1}{2}\operatorname{th} x+\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{1+\sqrt{2}\operatorname{th} x}{1-\sqrt{2}\operatorname{th} x}$.

648. $y=\frac{1}{x}\operatorname{ch} 2x+\sqrt{x}\operatorname{sh} 2x$. 649. $y=x^2e^{3x}\operatorname{cosech} x$.

## Dérivation logarithmique

Dans les problèmes 650-666 dériver les fonctions données en se servant de la règle de dérivation logarithmique.

650. $y=x^{x^2}$. 651. $y=x^{x^x}$.

652. $y=(\sin x)^{\cos x}$. 653. $y=(\ln x)^x$.

654. $y=(x+1)^{2/x}$.

655. $y=x^3e^{x^2}\sin 2x$.

656. $y=\frac{(x-2)^2\sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^3}$.

657. $y=x^{\ln x}$.

658. $y=\frac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$.

659. $y=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$.

660. $y=\sqrt{\frac{1-\arcsin x}{1+\arcsin x}}$.

661. $y=x^{\frac{1}{x}}$.

662. $y=x^{\sin x}$.

663. $y=\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$.

664. $y=2x^{\sqrt{x}}$.

665. $y=(x^2+1)^{\sin x}$.

666. $y=\sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$.

## Fonctions diverses

Dans les problèmes 667-770 dériver les fonctions.

667. $y=(1+\sqrt[3]{x})^3$.

668. $y=a\operatorname{tg}\left(\frac{x}{k}+b\right)$.

669. $y=\sqrt{1+\sqrt{2px}}$.

670. $y=\operatorname{arctg}(x^2-3x+2)$.

671. $y=\lg(x-\cos x)$.

672. $y=3\cos^2 x-\cos^3 x$.

673. $y=5\operatorname{tg}\frac{x}{5}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$.

674. $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}$.

675. $y=\sin\frac{x}{2}\sin 2x$.

676. $y=\sin x\cdot e^{\cos x}$.

677. $y=y^5\sqrt[3]{x^6-8}$.

678. $y=e^{-x^2}\ln x$.

679. $y=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$.

680. $y=\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x-1}$.

681. $y=e^{2x+3}\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right)$.

682. $y=\frac{2\sin^2 x}{\cos 2x}$.

683. $y=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$.

684. $y=\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{x}$.

685. $y=\sin^2\frac{x}{3}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

686. $y=\frac{\sqrt[9]{4x^5+2}}{3x^4}$.

687. $y=\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$.

688. $y=x\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

689. $y=\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x}$.

690. $y=\cos 2x\ln x$.

691. $y=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{1-x^2}$.

692. $y=\arcsin(n\sin x)$.

693. $y=\arcsin\sqrt{\sin x}$.

694. $y=\frac{1}{18}\sin^6 3x-\frac{1}{24}\sin^8 3x$.

695. $y=x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x$. 696. $y=\cos\frac{\arcsin x}{2}$.

697. $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$. 698. $y=\arccos\sqrt{1-3x}$.

699. $y=\sin^2\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)$. 700. $y=\log_3(x^2-\sin x)$.

701. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. 702. $y=\ln\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{x}$.

703. $y=x\arcsin(\ln x)$. 704. $y=\operatorname{tg}\frac{1-e^x}{1+e^x}$.

705. $y=\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}$.

706. $y=0{,}4\left(\cos\frac{2x+1}{2}-\sin 0{,}8x\right)^2$.

707. $y=x\cdot 10^{\sqrt{x}}$. 708. $y=\frac{1}{\operatorname{tg}^2 2x}$.

709. $y=\ln\operatorname{arctg}\frac{1}{1+x}$. 710. $y=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$.

711. $y=\sqrt[3]{1+x\sqrt{x+3}}$. 712. $y=x^2\sqrt{1+\sqrt{x}}$.

713. $y=\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$. 714. $y=x^3\operatorname{arctg}x^3$.

715. $y=\frac{\ln\sin x}{\ln\cos x}$. 716. $y=\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$.

717. $y=\frac{\arcsin 4x}{1-4x}$. 718. $y=e^{\frac{1}{\ln x}}$.

719. $y=\ln\frac{1-e^x}{e^x}$. 720. $y=10^{x\operatorname{tg}x}$.

721. $y=\sin^2 x\cdot\sin x^2$. 722. $y=\frac{2\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$.

723. $y=x\sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$. 724. $y=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$.

725. $y=2^{\frac{x}{\ln x}}$. 726. $y=\sqrt{(a-x)(x-b)}-(a-b)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a-x}{x-b}}$.

727. $y=\frac{\sin 3x}{2\sin^2 x\cos x}$. 728. $y=e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$.

729. $y=\sqrt{a^2-x^2}-a\arccos\frac{x}{a}$.

730. $y=\sqrt{x^2+1}-\ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$.

731. $y=\frac{\sin^2 x}{1+\operatorname{ctg}x}+\frac{\cos^2 x}{1+\operatorname{tg}x}$.

732. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

733. $y=e^{ax}(a\sin x-\cos x)$. 734. $y=xe^{1-\cos x}$.

735. $y=\frac{1}{\operatorname{arctg} e^{-2x}}$.

736. $y=e^x(\sin 3x-3\cos 3x)$.

737. $y=3x^3\arcsin x+(x^2+2)\sqrt{1-x^2}$.

738. $y=\frac{1}{\sqrt{1+e^{-\sqrt{x}}}}$.

739. $y=2\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{6}}-\sqrt{2+4x-x^2}$.

740. $y=\ln(e^x\cos x+e^{-x}\sin x)$.

741. $y=\frac{1+x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}$.

742. $y=\frac{1}{\cos(x-\cos x)}$.

743. $y=e^x\sin x\cos^3 x$.

744. $y=\sqrt[11]{9+6\sqrt[5]{x^9}}$.

745. $y=x-\ln\left(2e^x+1+\sqrt{e^{2x}+4e^x+1}\right)$.

746. $y=e^{\operatorname{arctg}\sqrt{1+\ln(2x+3)}}$.

747. $y=\frac{e^{x^2}}{e^x+e^{-x}}$.

748. $y=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg} x\ln(1+\sin x)-x$.

749. $y=2\ln\left(2x-3\sqrt{1-4x^2}\right)-6\arcsin 2x$.

750. $y=\frac{3x^2-1}{3x^3}+\ln\sqrt{1+x^2}+\operatorname{arctg} x$.

751. $y=\frac{1}{2}(3-x)\sqrt{1-2x-x^2}+2\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}$.

752. $y=\ln\left(x\sin x\sqrt{1-x^2}\right)$.

753. $y=x\sqrt{1+x^2}\sin x$.

754. $y=\frac{\sqrt{x+2}\,(3-x)^4}{(x+1)^5}$.

755. $y=\sqrt[5]{(1+xe^{\sqrt{x}})^3}$.

756. $y=\frac{1}{\sqrt{x}}e^{x^2-\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}\ln x+1}$.

757. $y=\frac{\sin x}{4\cos^4 x}+\frac{3\sin x}{8\cos^2 x}+\frac{3}{8}\ln\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$.

758. $y=\frac{xe^x\operatorname{arctg} x}{\ln^5 x}$.

759. $y=\frac{(1-x^2)e^{3x-1}\cos x}{(\arccos x)^3}$.

760. $y=x\sqrt{(x^2+a^2)^3}+\frac{3a^2x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{3a^4}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$.

761. $y=x(\arcsin x)^2-2x+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x$.

762. $y=\ln\cos\operatorname{arctg}\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

763. $y=\frac{1}{m\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\left(e^{mx}\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$.

764. $y=\frac{1}{3}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

765. $y=\ln\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

766. $y=(\operatorname{tg} 2x)^{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}$.

767. $y=\sqrt[3]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+4}}}$.

768. $y=\ln\sqrt[4]{\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$.

769. $y=\arccos\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$.

770. $y=-\frac{x}{1+8x^3}+\frac{1}{12}\ln\frac{(1+2x)^2}{1-2x-4x^2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\frac{4x-1}{\sqrt{3}}$.

771. Montrer que la fonction $y=\ln\frac{1}{1+x}$ vérifie la relation $xy'+1=e^y$.

772. Montrer que la fonction

$$y=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}+\ln\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$$

satisfait à la relation $2y = xy' + \ln y'$.

773. Montrer que la fonction $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ vérifie la relation $(1-x^2)\,y'-xy=1$.

774*. Calculer les sommes:

a) $1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}$;

b) $2+2\cdot 3x+3\cdot 4x^2+\ldots+n(n-1)\,x^{n-2}$.

## Fonctions inverses

775. Supposons que la règle de dérivation d'une fonction puissance ne soit établie que pour un exposant positif entier. Etablir la formule de dérivation pour un exposant fractionnaire en utilisant la règle de dérivation de la fonction inverse.

776. $x=e^{\arcsin y}$; exprimer $\frac{dy}{dx}$ en fonction de $y$, puis de $x$.

777. $t=2-3s+s^3$; exprimer $\frac{ds}{dt}$ en fonction de $s$.

778. $u=\frac{1}{2}\ln\frac{1+v}{1-v}$; vérifier la relation $\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{du}=1$.

779. Sachant que les fonctions $\arcsin\sqrt{x}$ et $\sin^2 x$ sont inverses l'une de l'autre et que $(\sin^2 x)'=\sin 2x$, calculer $(\arcsin\sqrt{x})'$.

780. Désignons par $\alpha(x)$ la fonction inverse de la fonction puissance-exponentielle $y=x^x$, i.e. supposons que $y=x^x$ entraîne $x=\alpha(y)$. Trouver la formule de la dérivée de la fonction $y=\alpha(x)$.

781. Les fonctions inverses des fonctions hyperboliques sont désignées par les symboles Arsh $x$, Arch $x$, Arth $x$. Calculer les dérivées de ces fonctions.

782. $s=te^{-t}$; calculer $\frac{dt}{ds}$.

783. $y=\frac{1-x^4}{1+x^4}$. Exprimer $\frac{dx}{dy}$ en fonction de $x$, puis de $y$. Démontrer la relation $\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=1$.

784. $x=y^3-4y+1$. Calculer $\frac{dy}{dx}$.

785. $t=\arcsin 2^s$. Exprimer $\frac{ds}{dt}$ en fonction de $s$, puis de $t$.

786. Démontrer que $\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=1$, si $x$ et $y$ sont liés par la relation :

1) $y = x^2 + ax + b$ ; 2) $y = x^{-n}$ ; 3) $y = \ln (x^2 - 1)$.

## Fonctions implicites

787. Montrer par dérivation que les dérivées des deux membres de l'égalité $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ sont identiquement égales.

788. Montrer par dérivation que les dérivées des deux membres de l'égalité

$$\frac{2\sin^2 x-1}{\cos x}+\frac{\cos x\,(2\sin x+1)}{1+\sin x}=\operatorname{tg} x$$

sont identiquement égales.

789. Calculer le coefficient angulaire de la tangente à l'ellipse $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=1$ au point $(1, \sqrt{2})$.

790. Calculer le coefficient angulaire de la tangente à l'hyperbole $xy = a$ $(a \neq 0)$ au point $(a, 1)$.

791. Calculer le coefficient angulaire de la tangente au cercle $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 17$ au point $(2, 1)$.

Calculer les dérivées des fonctions implicites $y$ :

792. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

793. $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$.

794. $x^3+y^3-3axy=0$.

795. $y^2\cos x=a^2\sin 3x$.

796. $y^3-3y+2ax=0$.

797. $y^2-2xy+b^2=0$.

798. $x^4+y^4=x^2y^2$.

799. $x^3+ax^2y+bxy^2+y^3=0$.

800. $\sin(xy)+\cos(xy)=\operatorname{tg}(x+y)$.

801. $2^x+2^y=2^{x+y}$.

802. $2y\ln y=x$.

803. $x-y=\arcsin x-\arcsin y$.

804. $x^y=y^x$.

805. $y=\cos(x+y)$.

806. $\cos(xy)=x$.

807. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

808. $y=1+xe^y$.

809. $x\sin y-\cos y+\cos 2y=0$.

810. $\operatorname{tg}\frac{y}{2}=\sqrt{\frac{1-k}{1+k}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

811. $y\sin x-\cos(x-y)=0$.

812. $y = x + \operatorname{arctg} y$.

813. Montrer que la fonction $y$ de l'équation $xy - \ln^y = 1$ vérifie également la relation

$$y^2 + (xy - 1)\frac{dy}{dx} = 0.$$

## Applications de la dérivée

814. On trace une sécante par les points d'abscisse $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$ de la parabole $y = x^2$. Trouver le point de contact de la tangente à la parabole parallèle à cette sécante.

815. Par le foyer d'une parabole on mène une corde perpendiculaire à l'axe de cette parabole. Montrer que les tangentes aux points où cette corde coupe la parabole sont orthogonales.

816. Ecrire l'équation de la tangente et de la normale à l'hyperbole $y = 1/x$ au point d'abscisse $x = -1/2$. Calculer la sous-tangente et la sous-normale.

817. Montrer que le point de contact d'une tangente à l'hyperbole $y = a/x$ est le milieu du segment de tangente compris entre les axes de coordonnées.

818. Etant donnée une hyperbole $xy = a$ montrer que l'aire du triangle formé par une tangente quelconque et les axes de coordonnées est numériquement égale au carré du demi-axe de l'hyperbole.

819. Un point se déplace sur une droite de telle sorte que la distance $s$ qui le sépare de sa position initiale est égale à $s = \frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2$ au bout de $t$ secondes.

a) A quels instants ce point occupait-il sa position de départ?

b) A quels instants sa vitesse est-elle nulle?

820. Un corps pesant 3 kg est animé d'un mouvement rectiligne d'équation

$$s = 1 + t + t^2;$$

$s$ est exprimé en cm, $t$ en secondes. Calculer l'énergie cinétique $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ de ce corps 5 s après son départ.

821. L'angle de rotation $\alpha$ d'une poulie est donné en fonction du temps $t$ par l'expression $\alpha = t^2 + 3t - 5$. Calculer la vitesse angulaire pour $t = 5$ s.

822. Une roue est animée d'un mouvement circulaire tel que l'angle de rotation est proportionnel au carré du temps. Sachant que le premier tour a été effectué en 8 s, calculer la vitesse angulaire $\omega$ de la roue 32 s après le début du mouvement.

823. Après $t$ secondes une roue a tourné d'un angle $\theta$ défini par $\theta = at^2 - bt + c$, où $a$, $b$ et $c$ sont des constantes positives. Calculer la vitesse angulaire $\omega$ de la roue. A quel instant cette vitesse est-elle nulle?

824. La quantité de courant traversant un conducteur à partir de l'instant $t = 0$ est donnée par la formule

$$Q = 2t^2 + 3t + 1 \text{ (en coulombs).}$$

Calculer l'intensité du courant à la fin de la cinquième seconde.

825. Trouver les points où les tangentes à la courbe $y = x^2 (x - 2)^2$ sont parallèles à l'axe des abscisses.

826. Montrer qu'en chacun de ses points la courbe $y = x^5 + 5x - 12$ fait un angle aigu avec l'axe $Ox$.

827. Trouver les points où la tangente à la courbe $y = x^3 + x - 2$ est parallèle à la droite $y = 4x - 1$.

828. Ecrire l'équation des tangentes à la courbe $y = x - \frac{1}{x}$ en ses points d'intersection avec l'axe $Ox$.

829. Ecrire l'équation de la tangente à la courbe $y = x^3 + 3x^2 - 5$ qui est perpendiculaire à la droite $2x - 6y + 1 = 0$.

Ecrire l'équation de la tangente et de la normale aux courbes suivantes:

830. $y = \sin x$ au point $M(x_0, y_0)$.

831. $y = \ln x$ au point $M(x_0, y_0)$.

832. $y = \frac{8a^3 x}{4a^2 + x^2}$ au point d'abscisse $x = 2a$.

833. $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ (cissoïde) au point $M(x_0, y_0)$.

834. Montrer que la sous-tangente à la parabole du $n$-ième degré $y = x^n$ est égale à la $n$-ième partie de l'abscisse du point de contact.

Indiquer une méthode de construction de la tangente à la courbe $y = x^n$.

835. Calculer les sous-tangentes et les sous-normales aux courbes $y = x^3$; $y^2 = x^3$ et $xy^2 = 1$. Indiquer une méthode de construction des tangentes à ces courbes.

836. Ecrire l'équation de la tangente et de la normale à la parabole $x^2 = 4ay$ au point $(x_0, y_0)$; montrer que la tangente à la parabole au point d'abscisse $x_0 = 2am$ a pour équation $x = \frac{y}{m} + am$.

837. Etant donnée la parabole $y = x^2 - 2x + 5$ on demande d'écrire l'équation de la tangente qui est parallèle à la corde passant par les points de la parabole d'abscisse $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$.

838. Ecrire l'équation de la normale à la courbe $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x^2}$ au point d'abscisse $x = 3$.

839. Ecrire l'équation de la normale à la courbe $y = -\sqrt{x} + 2$ à son point d'intersection avec la bissectrice du premier angle de coordonnées.

840. On considère la parabole $y = x^2 - 6x + 6$. Ecrire l'équation de la normale qui est perpendiculaire à la droite passant par l'origine des coordonnées et le sommet de la parabole.

841. Montrer que les normales à la courbe $y = x^2 - x + 1$ aux points d'abscisses $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ et $x_3 = 5/2$ sont concourantes.

842. Calculer l'aire du triangle formé par les normales et la corde passant par les points d'intersection de la droite $x - y + 1 = 0$ avec la parabole $y = x^2 - 4x + 5$.

843. Montrer que les tangentes à l'hyperbole $y = \frac{x-4}{x-2}$ en ses points d'intersection avec les axes des coordonnées sont parallèles.

844. Etant donnée l'hyperbole $y = \frac{x+9}{x+5}$ trouver l'équation de la tangente qui passe par l'origine des coordonnées.

845. Trouver le point où la tangente à la courbe $y = \frac{1}{1+x^2}$ est parallèle à l'axe $Ox$.

846. Trouver l'équation de la tangente à la courbe

$$x^2 (x + y) = a^2 (x - y)$$

en l'origine des coordonnées.

847. Montrer que les tangentes à la courbe $y = \frac{1+3x^2}{3+x^2}$ aux points d'ordonnée $y = 1$ se coupent à l'origine des coordonnées.

848. Tracer la normale à la courbe $y = x \ln x$ qui est parallèle à la droite $2x - 2y + 3 = 0$.

849. Calculer la distance de l'origine des coordonnées à la normale à la courbe $y = e^{2x} + x^2$ au point $x = 0$.

850. Construire le graphe de la fonction $y = \sin (2x - \pi/3)$ et trouver le point d'intersection des tangentes à la courbe aux points d'abscisses $x_1 = 0$ et $x_2 = 5\pi/12$.

851. Montrer que les sous-tangentes à la courbe $y = ae^{bx}$ ($a$ et $b$ sont des constantes) sont constantes.

852. Montrer que toute sous-normale à la courbe $y = x \ln (cx)$ ($c$ est une constante arbitraire) est quatrième proportionnelle entre l'abscisse, l'ordonnée et la somme de l'abscisse et de l'ordonnée du point de contact.

853. Montrer que toute tangente à la courbe

$$y = \frac{1}{2} \sqrt{x - 4x^2}$$

coupe l'axe des ordonnées en un point équidistant du point de contact et de l'origine des coordonnées.

854. Montrer que la tangente à l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ au point $M(x_0, y_0)$ a pour équation $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

855. Montrer que la tangente à l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ au point $M(x_0, y_0)$ a pour équation $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

856. Montrer que toute normale à l'ellipse est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs du point de contact (fig. 21). En déduire une méthode de construction de la tangente et de la normale à l'ellipse.

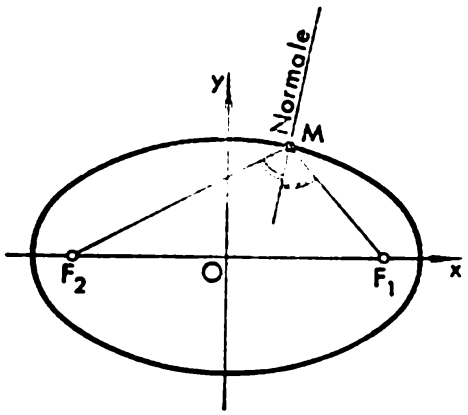

Fig. 21

857. Ecrire l'équation des tangentes à l'hyperbole $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{7}=1$, perpendiculaires à la droite $2x+4y-3=0$.

858. Par l'origine des coordonnées on trace une droite parallèle à la tangente en un point quelconque $M$ d'une courbe. Trouver le lieu géométrique du point d'intersection $P$ de cette droite avec la droite parallèle à l'axe des ordonnées qui passe par le point $M$.

Trouver ces lieux géométriques dans le cas: a) de la parabole $y^2=2px$; b) de la courbe logarithmique $y=\log_b x$, c) du cercle $x^2+y^2=a^2$, d) de la tractrice $y=\sqrt{a^2-x^2}-a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}$.

Calculer les angles sous lesquels se coupent les courbes:

859. 1) $y=\frac{x+1}{x+2}$ et $y=\frac{x^2+4x+8}{16}$.

2) $y=(x-2)^2$ et $y=4x-x^2+4$.

860. 1) $x^2+y^2=8$ et $y^2=2x$.

2) $x^2+y^2-4x=1$ et $x^2+y^2+2y=9$.

861. $x^2-y^2=5$ et $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$.

862. $x^2+y^2=8ax$ et $y^2=\frac{x}{2a-x}$.

863. $x^2=4ay$ et $y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}$.

864. $y=\sin x$ et $y=\cos x$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$.

865. Former l'équation de la tangente et de la normale à la courbe

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n=2$$

au point d'abscisse $a$.

866. Montrer que la somme des segments découpés sur les axes des coordonnées par toute tangente à la courbe $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$ est égale à $a$.

867. Montrer que le segment de tangente à l'astroïde compris entre les axes des coordonnées possède une longueur constante $a$.

868. Montrer que le segment de tangente à la tractrice

$$y=\frac{a}{2}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}}-\sqrt{a^2-x^2},$$

compris entre l'axe des ordonnées et le point de contact possède une longueur constante.

869. Soit un point quelconque $M$ $(x_0, y_0)$ de l'hyperbole équilatère $x^2 - y^2 = a^2$. Montrer que le segment de normale d'origine $M$ et d'extrémité le point d'intersection de cette normale avec l'axe des abscisses est égal au rayon polaire de $M$.

870. Montrer que le segment découpé sur l'axe des abscisses par la tangente à la courbe $\frac{a}{x^2}+\frac{b}{y^2}=1$ en un point quelconque est proportionnel au cube de l'abscisse du point de contact.

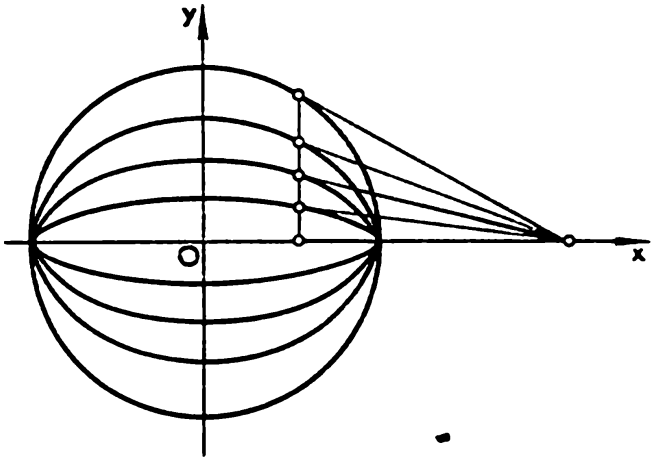


Fig. 22

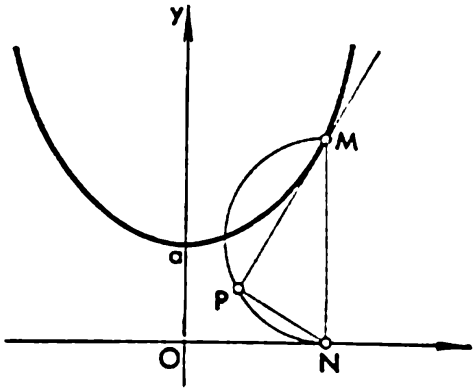


Fig. 23

871. Montrer que l'ordonnée d'un point quelconque de la courbe $2x^2y^2 - x^4 = c$ ($c$ est une constante) est moyenne proportionnelle entre l'abscisse et la différence de l'abscisse et de la sous-normale en ce point.

872. Montrer que les tangentes aux ellipses $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, dont l'axe $2a$ est commun et les axes $2b$ distincts (fig. 22), aux points d'abscisse égale se coupent en un point situé sur l'axe $Ox$. En déduire une méthode simple de construction de la tangente à l'ellipse.

873. Montrer que la courbe $y = e^{kx} \sin mx$ est tangente aux courbes $y = e^{kx}$, $y = -e^{kx}$ en chacun de ses points communs avec elles.

874. Montrer que l'on peut se servir du procédé suivant pour construire une tangente à la chaînette $y = a \operatorname{ch}\frac{x}{a}$ : on trace un demi-cercle de diamètre l'ordonnée $MN$ du point $M$ (fig. 23), puis l'on porte la corde $NP = a$ ; la droite $MP$ est la tangente cherchée.

### Dérivation graphique

875. Lorsque le courant traverse la bobine d'un électro-aimant la température varie comme l'indique le tableau ci-dessous:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Temps $t$ min . . . . . | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
| Température $\theta$ °C . . . . . | 20 | 26 | 32,5 | 41 | 46 | 49 |
| Temps $t$ min . . . . . | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 | 55 |
| Température $\theta$ °C . . . . . | 52,5 | 54,5 | 56,5 | 58 | 59,5 | 61 |

Exprimer la température en fonction du temps et construire son graphe. Effectuer une dérivation graphique et construire le graphe de la vitesse de variation de la température en fonction du temps.

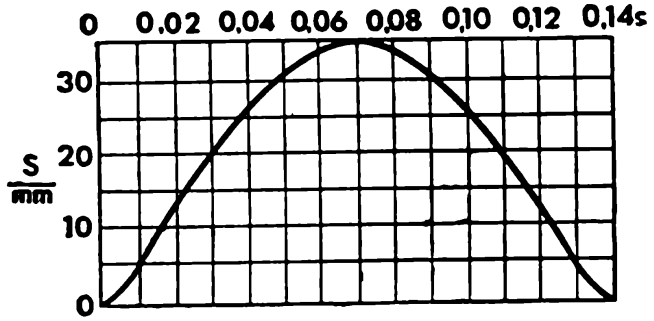


Fig. 24

876. Sur la fig. 24 est représentée la courbe décrite par la soupape d'entrée du cylindre d'une machine à vapeur de basse pression. Construire la courbe de vitesse par dérivation graphique.

## § 3. Différentielle. Différentiabilité d'une fonction

### Différentielle

877. Trouver l'accroissement de la fonction $y = x^2$ correspondant à l'accroissement $\Delta x$ de la variable indépendante. Calculer $\Delta y$ pour $x = 1$ et $\Delta x = 0{,}1$ ; $0{,}01$. Quelle est l'erreur (absolue et relative) commise sur la valeur de $\Delta y$ si l'on se limite au terme en $\Delta x$?

878. Calculer l'accroissement $\Delta v$ du volume $v$ d'une sphère lorsque le rayon $R = 2$ varie de $\Delta R$. Calculer $\Delta v$ pour $\Delta R = 0{,}5$ ; $0{,}1$ ; $0{,}01$. Quelle est l'erreur affectant $\Delta v$ si l'on se limite au terme en $\Delta R$?

879. Soit la fonction $y = x^3 + 2x$. Trouver l'accroissement et la partie principale linéaire lorsque $x$ passe de $x = 2$ à $x = 2{,}1$.

880. Calculer l'accroissement de la fonction $y = 3x^2 - x$ lorsque la variable indépendante passe de $x = 1$ à $x = 1{,}02$. Quelle est la valeur de la partie principale linéaire correspondante? Calculer le rapport de la deuxième grandeur à la première.

881. Soit la fonction $y = f(x)$. On donne un accroissement $\Delta x = 0{,}2$ à la variable en un point quelconque $x$; la partie principale correspondante de l'accroissement de la fonction est égale à 0,8. Calculer la dérivée de cette fonction au point $x$.

882. Soit donnée la fonction $f(x) = x^2$. On sait que si en un point $x$ on donne à la variable indépendante l'accroissement $\Delta x = 0{,}2$, la partie principale de l'accroissement de la fonction est $df(x) = -0{,}8$. Calculer la valeur initiale de la variable indépendante.

883. Calculer l'accroissement et la différentielle de la fonction $y = x^2 - x$ pour $x = 10$ et $\Delta x = 0{,}1$. Calculer les erreurs absolue et relative réalisées en remplaçant l'accroissement par la différentielle. Faire un dessin.

884. Calculer l'accroissement et la différentielle de la fonction $y = \sqrt{x}$ pour $x = 4$ et $\Delta x = 0{,}41$. Calculer les erreurs absolue et relative. Faire un dessin.

885. $y = x^3 - x$. Calculer $\Delta y$ et $dy$ pour $x = 2$ en donnant à la variable les accroissements $\Delta x = 1$; $\Delta x = 0{,}1$; $\Delta x = 0{,}01$. Calculer les valeurs correspondantes de l'erreur relative $\delta = \frac{|\Delta y - dy|}{|\Delta y|}$.

886. On considère la fonction $y = 2^x$. Trouver graphiquement (en faisant un dessin sur papier millimétré avec une grande échelle) l'accroissement, la différentielle et calculer les erreurs absolue et relative commises en remplaçant l'accroissement par la différentielle si $x = 2$ et $\Delta x = 0{,}4$.

887. Soit un carré de côté 8 cm. Calculer l'accroissement de son aire correspondant à un accroissement de ses côtés de: a) 1 cm; b) 0,5 cm; c) 0,1 cm. Trouver la partie principale linéaire de l'accroissement de l'aire et évaluer la valeur relative (en pourcentage) lorsqu'on remplace l'accroissement par sa partie principale.

888. L'on sait qu'en donnant un accroissement de 0,3 cm aux côtés d'un carré arbitraire la partie principale linéaire de l'accroissement de l'aire est égale à 2,4 cm². Trouver la partie principale linéaire de l'accroissement de l'aire correspondant à un accroissement de chaque côté de a) 0,6 cm; b) 0,75 cm; c) 1,2 cm.

889. Calculer la différentielle des fonctions

1) $0{,}25\sqrt{x}$; 2) $\frac{\sqrt[3]{x}}{0{,}2}$; 3) $\frac{1}{0{,}5x^2}$; 4) $\frac{1}{4x^4}$; 5) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; 6) $\frac{1}{n\sqrt[3]{x}}$;

7) $\frac{\sqrt{x}}{a+b}$; 8) $\frac{p}{q^x}$; 9) $\frac{m-n}{x^{0,2}}$; 10) $\frac{m+n}{\sqrt{x}}$;

11) $(x^2+4x+1)(x^2-\sqrt{x})$; 12) $\frac{x^3+1}{x^3-1}$; 13) $\frac{1}{1-t^2}$;

14) $(1+x-x^2)^3$; 15) $\operatorname{tg}^2 x$; 16) $5^{\ln \operatorname{tg} x}$;

17) $2^{-\frac{1}{\cos x}}$; 18) $\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4}\right)$; 19) $\frac{\cos x}{1-x^2}$;

20) $\sqrt{\arcsin x}+(\operatorname{arctg} x)^2$;

21) $3\arcsin x-4\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}\arccos x-\frac{7}{2}\operatorname{arctg} x$;

22) $3^{-\frac{1}{x^2}}+3x^3-4\sqrt{x}$.

**890.** Calculer la différentielle des fonctions: 1) $y=\frac{1}{(\operatorname{tg} x+1)^2}$ lorsque $x$ varie de $x=\frac{\pi}{6}$ à $x=\frac{61\pi}{360}$; 2) $y=\cos^2\varphi$ lorsque $\varphi$ varie de 60° à 60°30′; 3) $y=\sin 2\varphi$ lorsque $\varphi$ varie de $\frac{\pi}{6}$ à $\frac{61\pi}{360}$; 4) $y=\sin 3\varphi$ lorsque $\varphi$ varie de $\frac{\pi}{6}$ à $\frac{61\pi}{360}$; 5) $y=\sin\frac{\theta}{3}$ lorsque $\theta$ varie de $\frac{\pi}{6}$ à $\frac{61\pi}{360}$.

**891.** Trouver une valeur approchée de l'accroissement de la fonction $y=\sin x$ lorsque $x$ varie de 30° à 30° 1′. Calculer sin 30° 1′.

**892.** Calculer une valeur approchée de l'accroissement de la fonction $y=\operatorname{tg} x$ lorsque $x$ varie de 45° à 45° 10′.

**893.** Calculer une valeur approchée de l'accroissement de la fonction $y=\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$ lorsque $x$ varie de $\frac{\pi}{3}$ à $\frac{\pi}{3}+\frac{1}{100}$.

**894.** $\rho=k\sqrt{\cos 2\varphi}$; calculer $d\rho$.

**895.** $y=3^{\frac{1}{x}}+2^{\frac{1}{2x}}+6^{\sqrt{x}}$. Calculer $dy$ pour $x=1$ et $dx=0{,}2$.

**896.** Calculer approximativement sin 60°3′, sin 60°18′. Comparer avec les données tabulaires.

**897.** Montrer que la fonction $y=\frac{1+\ln x}{x-x\ln x}$ vérifie la relation $2x^2\,dy=(x^2y^2+1)\,dx$.

**898.** Montrer que la fonction $y$ définie par l'équation $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=$ $=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ satisfait l'expression $x(dy-dx)=y(dy+dx)$.

**899.** $f(x)=e^{0{,}1x(1-x)}$. Déterminer approximativement $f(1{,}05)$.

**900.** Calculer arctg 1,02; arctg 0,97.

**901.** Calculer approximativement $\sqrt{\frac{(2{,}037)^2-3}{(2{,}037)^2+5}}$.

**902.** Calculer approximativement arcsin 0,4983.

**903.** Si la longueur d'un fil pesant (un câble, une chaîne) (fig. 25) est $2s$, la demi-baie $l$ et la flèche $f$, l'on a l'égalité approchée

$$s=l\left(1+\frac{2}{3}\frac{f^2}{l^2}\right).$$

a) Calculer l'accroissement de la longueur du fil si la flèche $f$ subit un accroissement $df$.

b) Etudier l'accroissement de la flèche correspondant à un accroissement $ds$ de la longueur du fil (sous l'influence de la température ou d'une surcharge par exemple).

**904.** Comparer les erreurs commises en calculant un angle d'après sa tangente et son sinus à l'aide des tables de logarithmes, i.e. comparer la précision des calculs de l'angle $x$ effectués avec les formules $\lg \sin x = y$ et $\lg \operatorname{tg} x = z$ en supposant que $y$ et $z$ sont affectés d'une même erreur.

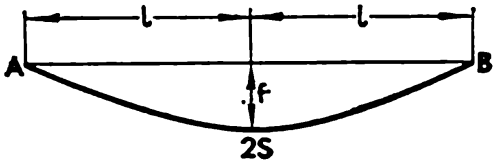

Fig. 25

**905.** Dans les calculs on simplifie souvent par $\pi$ et $\sqrt{g}$ ($g$ étant l'accélération de la force de pesanteur) lorsque l'un de ces deux termes se trouve au numérateur et l'autre au dénominateur. On demande d'évaluer l'erreur relative qui est alors commise.

**906.** Exprimer la différentielle d'une fonction de fonction par l'intermédiaire de la variable indépendante et de sa différentielle:

1) $y = \sqrt[3]{x^2 + 5x}$; $x = t^3 + 2t + 1$;

2) $s = \cos^2 z$, $z = \frac{t^2 - 1}{4}$;

3) $z = \operatorname{arctg} v$, $v = \frac{1}{\operatorname{tg} s}$;

4) $v = 3^{-\frac{1}{x}}$, $x = \ln \operatorname{tg} s$;

5) $s = e^z$, $z = \frac{1}{2} \ln t$, $t = 2u^2 - 3u + 1$;

6) $y = \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2}$, $u = \arcsin v$, $v = \cos 2s$.

## Dérivabilité d'une fonction

**907.** La fonction $y = |x|$ est continue quel que soit $x$. S'assurer qu'elle n'est pas dérivable pour $x = 0$.

**908.** Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction $y = |x^3|$ pour $x = 0$.

**909.** La fonction $f(x)$ est définie comme suit: $f(x) = 1 + x$ pour $x \leqslant 0$; $f(x) = x$ pour $0 < x < 1$; $f(x) = 2 - x$ pour $1 \leqslant x \leqslant 2$ et $f(x) = 3x - x^2$ pour $x > 2$. Etudier sa continuité et prouver l'existence et la continuité de $f'(x)$.

**910.** La fonction $y = \sin x$ est continue quel que soit $x$. Montrer qu'elle n'est pas dérivable pour $x = 0$. Existe-t-il d'autres valeurs de la variable indépendante pour lesquelles cette fonction n'est pas dérivable?

**911.** Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction $y = e^{|-x|}$ pour $x = 0$.

**912.** $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Etudier la dérivabilité de la fonction $f(x)$ pour $x = 0$.

**913.** $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}}$ pour $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Etudier la continuité et la dérivabilité de $f(x)$ pour $x = 0$.

**914.** On considère la fonction $f(x) = 1 + \sqrt[3]{(x-1)^2}$. Montrer que pour $x = 1$ on ne peut mettre en évidence la partie principale linéaire de l'accroissement et donc que $f(x)$ n'admet pas de dérivée pour $x = 1$. Interpréter ce résultat géométriquement.

**915.** $f(x) = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Etudier la continuité, puis la dérivabilité de $f(x)$ pour $x = 0$. Interpréter ce résultat géométriquement.

**916.** $f(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Etudier la continuité, puis la dérivabilité de $f(x)$ pour $x = 0$.

## § 4. La dérivée comme vitesse de variation (suite)

### Vitesse relative

**917.** Un point se déplace sur la spirale d'Archimède $\rho = a\varphi$. Trouver la vitesse de variation du rayon polaire $\rho$ en fonction de l'angle polaire $\varphi$.

**918.** Un point se déplace sur la spirale logarithmique $\rho = e^{a\varphi}$. Trouver la vitesse de variation du rayon polaire sachant que sa vitesse angulaire est égale à $\omega$.

**919.** Un point se déplace sur le cercle $\rho = 2r \cos \varphi$. Trouver la vitesse de variation de l'abscisse et de l'ordonnée de ce point sachant que la vitesse angulaire du rayon polaire est égale à $\omega$. L'axe polaire est confondu avec l'axe des abscisses, le pôle avec l'origine des coordonnées cartésiennes.

**920.** Un cerceau de rayon $R$ roule sans glisser sur une droite. Son centre se déplace à une vitesse constante $v$. Trouver la vitesse de variation de l'abscisse $x$ et de l'ordonnée $y$ d'un point de ce cerceau.

**921.** La pression barométrique $p$ varie en fonction de la hauteur $h$ en vertu de la loi $\ln \frac{p}{p_0} = ch$, où $p_0$ désigne la pression normale et $c$ une constante. A 5540 m d'altitude la pression est égale à la moitié de la normale; exprimer la vitesse de variation de la pression barométrique en fonction de l'altitude.

**922.** Entre $y$ et $x$ l'on a la relation $y^2 = 12\,x$. L'argument $x$ croît uniformément à raison de 2 unités par seconde. Quelle est la vitesse d'accroissement de $y$ pour $x = 3$?

**923.** L'ordonnée d'un point décrivant le cercle $x^2 + y^2 = 25$ décroît à la vitesse de 1,5 cm/s. Trouver la vitesse de variation de l'abscisse de ce point lorsque l'ordonnée est égale à 4 cm.

**924.** Déterminer les points de l'ellipse $16x^2 + 9y^2 = 400$ dont la vitesse de décroissance de l'ordonnée est égale à la vitesse de croissance de l'abscisse.

**925.** Le côté d'un carré croît à une vitesse $v$. Trouver la vitesse de variation du périmètre et de l'aire de ce carré lorsque son côté est égal à $a$.

**926.** Soit $v$ la vitesse de variation du rayon d'un cercle. Trouver la vitesse de variation de la circonférence et de l'aire de ce cercle lorsque son rayon est égal à $r$.

**927.** Soit $v$ la vitesse de variation du rayon d'une sphère. Trouver la vitesse de variation du volume et de la surface de cette sphère.

**928.** Trouver un angle tel que la vitesse de variation de son sinus soit égale à la moitié de celle de l'argument.

**929.** Trouver un angle tel que les vitesses de variation du sinus et de la tangente soient égales.

**930.** Trouver la vitesse de variation de la tangente d'un angle sachant que celle du sinus a augmenté de $n$ fois.

**931.** Sachant que le volume du tronc d'un arbre est proportionnel au cube de son diamètre et que cet arbre pousse uniformément, montrer que la vitesse de croissance du volume est 25 fois supérieure pour un diamètre de 90 cm que pour un diamètre de 18 cm.

### Fonctions définies paramétriquement

**932.** Vérifier si les points de coordonnées cartésiennes (5, 1) et $(2, \sqrt{3})$ sont situés respectivement sur les cercles d'équation paramétrique: a) $x = 2 + 5 \cos t$, $y = -3 + 5 \sin t$, b) $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$.

**933.** Construire les graphes des fonctions données sous la forme paramétrique:

a) $x = 3 \cos t$, $y = 4 \sin t$; b) $x = t^2 - 2t$, $y = t^2 + 2t$;

c) $x = \cos t$, $y = t + 2 \sin t$; d) $x = 2^{t-1}$, $y = \frac{1}{4}(t^3 + 1)$.

**934.** Eliminer le paramètre entre les équations donnant paramétriquement les fonctions:

1) $x = 3t$, $y = 6t - t^2$; 2) $x = \cos t$, $y = \sin 2t$;

3) $x = t^3 + 1$, $y = t^2$; 4) $x = \varphi - \sin \varphi$, $y = 1 - \cos \varphi$;

5) $x = \operatorname{tg} t$, $y = \sin 2t + 2 \cos 2t$.

**935.** Trouver la valeur du paramètre correspondant à un point donné sur les courbes d'équations paramétriques suivantes:

1) $x = 3(2 \cos t - \cos 2t)$, $y = 3(2 \sin t - \sin 2t)$; $(-9, 0)$;

2) $x = t^2 + 2t$, $y = t^3 + t$; $(3, 2)$;

3) $x = 2 \operatorname{tg} t$, $y = 2 \sin^2 t + \sin 2t$; (2, 2);

4) $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$; (0, 0).

Calculer les dérivées de $y$ par rapport à $x$.

936. $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$.

937. $x = a \cos^3 \varphi$, $y = b \sin^3 \varphi$.

938. $x = a(\varphi - \sin \varphi)$, $y = a(1 - \cos \varphi)$.

939. $x = 1 - t^2$, $y = t - t^3$.

940. $x = \frac{t+1}{t}$, $y = \frac{t-1}{t}$.

941. $x = \ln(1 + t^2)$, $y = t - \operatorname{arctg} t$.

942. $x = \varphi(1 - \sin \varphi)$, $y = \varphi \cos \varphi$.

943. $x = \frac{1+t^3}{t^2-1}$, $y = \frac{1}{t^2-1}$.

944. $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$.

945. $x = \frac{3at}{1+t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$.

Calculer le coefficient angulaire des tangentes aux courbes suivantes.

946. $x = 3 \cos t$, $y = 4 \sin t$ au point $(3\sqrt{2}/2, 2\sqrt{2})$.

947. $x = t - t^4$, $y = t^2 - t^3$ au point (0, 0).

948. $x = t^3 + 1$, $y = t^2 + t + 1$ au point (1, 1).

949. $x = 2 \cos t$, $y = \sin t$ au point $(1, -\sqrt{3}/2)$.

950. Etant données les courbes définies paramétriquement, établir une relation entre le paramètre $t$ et la pente $\alpha$ d'une tangente:

1) $\begin{cases} x = \cos t + t \sin t - \frac{t^2}{2} \cos t, \\ y = \sin t - t \cos t - \frac{t^2}{2} \sin t; \end{cases}$

2) $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$;

3) $x = a \cos t \sqrt{2 \cos 2t}$, $y = a \sin t \sqrt{2 \cos 2t}$.

951. Montrer que la fonction donnée sous la forme paramétrique $x = 2t + 3t^2$, $y = t^2 + 2t^3$ vérifie la relation $y = y'^2 + 2y'^3$, où $y' = \frac{dy}{dx}$.

952. Montrer que la fonction donnée sous la forme paramétrique $x = \frac{1+t}{t^3}$, $y = \frac{3}{2t^2} + \frac{2}{t}$ vérifie la relation $xy'^3 = 1 + y'$ $\left(y' = \frac{dy}{dx}\right)$.

953. Montrer que la fonction définie par les équations paramétriques $x = \operatorname{ch} 2t$, $y = \operatorname{sh} 2t$ vérifie la relation $yy' - x = 0$ $\left(y' = \frac{dy}{dx}\right)$.

**954.** Montrer que la fonction d'équation paramétrique

$$x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}-\ln\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t},\ y=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$

vérifie la relation $y\sqrt{1+y'^2}=y'$ $\left(y'=\frac{dy}{dx}\right)$.

**955.** Montrer que la fonction d'équation paramétrique $x=\frac{1+\ln t}{t^2}$, $y=\frac{3+2\ln t}{t}$ vérifie la relation $yy'=2xy'^2+1$ $\left(y'=\frac{dy}{dx}\right)$.

**956.** Calculer l'angle sous lequel se coupent les courbes:

1) $y=x^2$ et $\begin{cases} x=\frac{5}{3}\cos t, \\ y=\frac{5}{4}\sin t\ ; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=a\cos\varphi, \\ y=a\sin\varphi \end{cases}$ et $\begin{cases} x=\frac{at^2}{1+t^2}, \\ y=\frac{at\sqrt{3}}{1+t^2}. \end{cases}$

**957.** Montrer que quelle que soit la position du cercle générateur de la cycloïde, la tangente et la normale en l'un quelconque de ses points passent par ses sommets.

**958.** Calculer la longueur de la tangente, la normale, la sous-tangente et la sous-normale à la cardioïde

$$x = a\,(2\cos t - \cos 2t),\ y = a\,(2\sin t - \sin 2t)$$

en un point quelconque.

**959.** Calculer la longueur de la tangente, la normale, la sous-tangente et la sous-normale à l'astroïde

$$x = a\sin^3 t,\ y = a\cos^3 t$$

en un point quelconque.

**960.** Montrer que toute tangente au cercle $x^2+y^2=a^2$ est normale à la développante du cercle

$$x = a\,(\cos t + t\sin t),\ y = a\,(\sin t - t\cos t).$$

**961.** Calculer la longueur de la tangente, la normale, la sous-tangente et la sous-normale à la développante du cercle de l'exercice précédent.

**962.** Montrer que le segment de normale à la courbe

$$x = 2a\sin t + a\sin t\cos^2 t,\ y = -a\cos^3 t,$$

compris entre les axes des coordonnées est égal à $2a$.

Ecrire l'équation de la tangente et de la normale aux courbes aux points indiqués.

**963.** $x=2e^t$ ; $y=e^{-t}$ pour $t=0$.

**964.** $x=\sin t$, $y=\cos 2t$ pour $t=\pi/6$.

**965.** $x=2\ln\operatorname{ctg} t+1$, $y=\operatorname{tg} t+\operatorname{ctg} t$ pour $t=\pi/4$.

**966.** 1) $x=\frac{3at}{1+t^2}$, $y=\frac{3at^2}{1+t^2}$ pour $t=2$;

2) $\begin{cases} x=t(t\cos t-2\sin t), \\ y=t(t\sin t+2\cos t), \end{cases}$ pour $t=\frac{\pi}{4}$;

3) $x=\sin t$, $y=a^t$ pour $t=0$.

**967.** Montrer qu'en deux points de la cardioïde (voir exercice 958) correspondant à des valeurs du paramètre $t$ présentant une différence de $\frac{2}{3}\pi$ les tangentes sont parallèles.

**968.** Montrer que si $OT$ et $ON$ sont les perpendiculaires abaissées de l'origine des coordonnées sur la tangente et la normale à l'astroïde (voir exercice 959) en l'un quelconque de ses points on a la relation

$$4\cdot OT^2+ON^2=a^2.$$

**969.** Calculer la longueur de la perpendiculaire abaissée de l'origine des coordonnées sur une tangente à la courbe

$$2x=a(3\cos t+\cos 3t),\ 2y=a(3\sin t+\sin 3t).$$

Montrer que $4\rho^2=3p^2+4a^2$, où $\rho$ est le rayon polaire du point donné et $p$ la longueur de la perpendiculaire considérée.

## Vitesse de variation du rayon polaire

**970.** On donne un cercle $\rho=2r\sin\varphi$. Calculer l'angle $\theta$ du rayon polaire et d'une tangente et l'angle $\alpha$ de l'axe polaire et d'une tangente.

**971.** Etant donnée la parabole $\rho=a\sec^2\frac{\varphi}{2}$, montrer que la somme des angles formés par une tangente avec le rayon polaire et l'axe polaire est égale à $2\pi$. En déduire une méthode de construction de la tangente à la parabole.

**972.** On considère la courbe $\rho=x\sin^3\frac{\varphi}{3}$ (conchoïde); montrer que $\alpha=4\theta$ (les notations sont celles de l'exercice 970).

**973.** Montrer que les paraboles $\rho=a\sec^2\frac{\varphi}{2}$ et $\rho=b\operatorname{cosec}^2\frac{\varphi}{2}$ se coupent sous un angle droit.

**974.** Calculer la tangente de l'angle formé par l'axe polaire avec la tangente à la courbe $\rho=a\sec^2\varphi$ aux points $\rho=2a$.

**975.** Calculer la tangente de l'angle formé par l'axe polaire et la tangente en l'origine des coordonnées aux courbes: 1) $\rho=\sin^3\varphi$, 2) $\rho=\sin 3\varphi$.

**976.** Montrer que les cardioïdes $\rho=a(1+\cos\varphi)$ et $\rho=a(1-\cos\varphi)$ se coupent sous un angle droit.

**977.** Une courbe est donnée en coordonnées polaires par son équation paramétrique: $\rho=f_1(t)$, $\varphi=f_2(t)$. Exprimer en fonction de $t$ la tangente de l'angle $\theta$ formé par une tangente et le rayon polaire.

**978.** Soit une courbe d'équations $\rho = at^3$, $\varphi = bt^2$. Calculer l'angle formé par le rayon polaire et une tangente.

**979.** On considère l'ellipse $x = a \cos t$, $y = b \sin t$. Exprimer le rayon polaire $\rho$ et l'angle polaire $\varphi$ en fonction du paramètre $t$. Appliquer la formule obtenue au calcul de l'angle formé par une tangente et le rayon polaire.

On appelle *sous-tangente polaire* la projection du segment de tangente compris entre le point de contact et le point d'intersection de cette tangente avec la perpendiculaire au rayon polaire à l'origine sur cette perpendiculaire. On définit d'une façon analogue la *sous-normale polaire*. On se servira de ces définitions dans les exercices ci-après.

**980.** Etablir la formule de la sous-tangente polaire et de la sous-normale polaire à la courbe $\rho = f(\varphi)$.

**981.** Montrer que la longueur de la sous-tangente polaire à la spirale hyperbolique $\rho = \frac{a}{\varphi}$ est constante.

**982.** Montrer que la longueur de la sous-normale polaire à la spirale d'Archimède $\rho = \alpha\varphi$ est constante.

**983.** Calculer la longueur de la sous-tangente polaire à la spirale logarithmique $\rho = a^{\varphi}$.

**984.** Calculer la longueur de la sous-normale polaire à la spirale logarithmique $\rho = a^{\varphi}$.

## Vitesse de variation de la longueur

Dans les exercices 985-999 par $s$ on désigne la longueur d'arc de la courbe considérée.

**985.** La droite $y = ax + b$ ; $\frac{ds}{dx} = ?$

**986.** Le cercle $x^2 + y^2 = r^2$ ; $\frac{ds}{dx} = ?$

**987.** L'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ; $\frac{ds}{dy} = ?$

**988.** La parabole $y^2 = 2px$ ; $ds = ?$

**989.** La parabole semi-cubique $y^2 = ax^3$ ; $\frac{ds}{dy} = ?$

**990.** La sinusoïde $y = \sin x$ ; $ds = ?$

**991.** La chaînette $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $(y = \operatorname{ch} x)$ ; $\frac{ds}{dx} = ?$

**992.** Le cercle $x = r \cos t$, $y = r \sin t$ ; $\frac{ds}{dt} = ?$

**993.** La cycloïde $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ; $\frac{ds}{dt} = ?$

**994.** L'astroïde $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ ; $ds = ?$

**995.** La spirale d'Archimède $x = at \sin t$, $y = at \cos t$ ; $ds = ?$

**996.** La cardioïde $\begin{cases} x = a\,(2\cos t - \cos 2t), \\ y = a\,(2\sin t - \sin 2t)\,; \end{cases}$ $ds = ?$

**997.** La tractrice

$$x = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg}\frac{t}{2}\right),\ y = a\sin t\,;\ ds = ?$$

**998.** Le développement du cercle

$$x = a\,(\cos t + t\sin t),\ y = a\,(\sin t - t\cos t)\,;\ \frac{ds}{dt} = ?$$

**999.** L'hyperbole $x = a\operatorname{ch} t$, $y = a\operatorname{sh} t$; $ds = ?$

## Vitesse d'un mouvement

**1000.** Une échelle de 10 m de long s'éloigne à une vitesse de 2 m/mn du mur contre lequel elle repose. A quelle vitesse s'abaisse

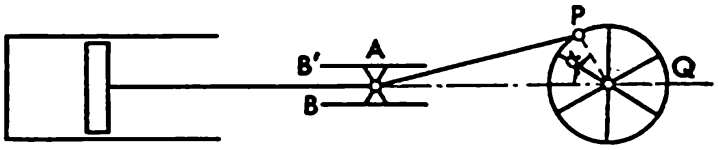


Fig. 26

son sommet lorsque son pied se trouve à 6 m du mur? Comment est dirigé le vecteur vitesse?

**1001.** Un train et un ballon sphérique prennent le départ simultanément d'un même point. Le train est animé d'un mouvement uni-

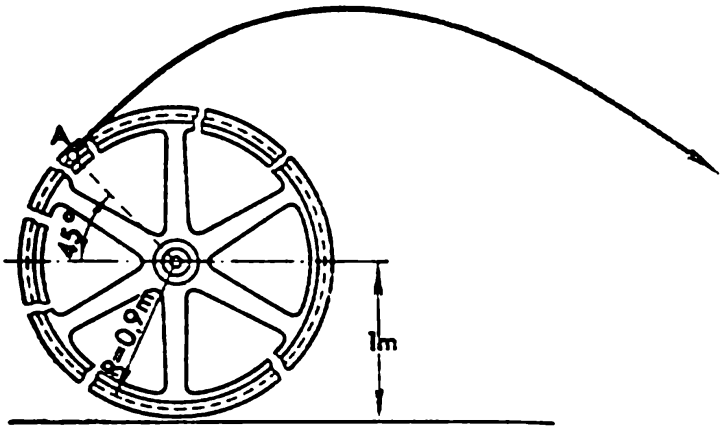


Fig. 27

forme de vitesse 50 km/h, le ballon d'une ascension (également uniforme) de 10 km/h. A quelle vitesse s'éloignent-ils l'un de l'autre? Comment est dirigé le vecteur vitesse?

**1002.** Un homme de 1,70 m de taille s'éloigne à la vitesse de 6,34 km/h d'une source lumineuse située à une hauteur de 3 m. A quelle vitesse se déplace l'ombre de sa tête?

**1003.** Un cercle au centre duquel est placée une lampe est parcouru par un cheval à la vitesse de 20 km/h. Une haie est disposée le long de la tangente à ce cercle au point de départ. A quelle vitesse se déplace l'ombre du cheval le long de la haie au moment où il a parcouru le 1/8 de la circonférence?

**1004.** La fig. 26 représente le schéma de la manivelle d'une machine à vapeur: $A$ est la crosse, $BB'$ les guides, $AP$ la bielle, $P$ le doigt de la manivelle et $Q$ le volant. Le volant est animé d'un mouvement uniforme de vitesse angulaire $\omega$. Son rayon est $R$ et la longueur de la bielle $l$. Trouver la vitesse de la crosse sachant que le volant a tourné d'un angle $\alpha$.

**1005.** Un volant de manivelle de 0,9 m de rayon et dont le centre se trouve à 1 m du sol se brise au moment où il fait 80 tours à la minute.

A quelle vitesse l'éclat désigné sur la fig. 27 par la lettre $A$ atteindra-t-il le sol?

## § 5. Dérivation successive

### Fonctions explicites

**1006.** $y = x^2 - 3x + 2$; $y'' = ?$

**1007.** $y = 1 - x^2 - x^4$; $y''' = ?$

**1008.** $f(x) = (x + 10)^6$; $f'''(2) = ?$

**1009.** $f(x) = x^6 - 4x^3 + 4$; $f^{IV}(1) = ?$

**1010.** $y = (x^2 + 1)^3$; $y'' = ?$

**1011.** $y = \cos^2 x$; $y''' = ?$

**1012.** $f(x) = e^{2x-1}$; $f''(0) = ?$

**1013.** $f(x) = \operatorname{arctg} x$; $f''(1) = ?$

**1014.** $f(x) = \frac{1}{1-x}$; $f^{V}(x) = ?$

**1015.** $y = x^3 \ln x$; $y^{IV} = ?$

**1016.** $f(x) = \frac{a}{x^n}$; $y''(x) = ?$

**1017.** $\rho = a \sin 2\varphi$; $\frac{d^4\rho}{d\varphi^4} = ?$

**1018.** $y = \frac{1-x}{1+x}$; $y^{(n)} = ?$

Trouver les dérivées secondes des fonctions:

**1019.** $y = xe^{x^2}$.

**1020.** $y = \frac{1}{1+x^3}$.

**1021.** $y = (1 + x^2) \operatorname{arctg} x$.

**1022.** $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

**1023.** $y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$.

**1024.** $y = \frac{1}{a + \sqrt{x}}$.

**1025.** $y = e^{\sqrt{x}}$.

**1026.** $y = \sqrt{1 - x^2} \arcsin x$.

**1027.** $y = \arcsin(a \sin x)$.

**1028.** $y = x^x$.

Trouver l'expression générale des dérivées d'ordre $n$ des fonctions:

**1029.** $y = e^{ax}$.

**1030.** $y = e^{-x}$.

1031. $y = \sin ax + \cos bx$.

1032. $y = \sin^2 x$.

1033. $y = xe^x$.

1034. $y = x \ln x$.

1035. $y = \frac{1}{ax+b}$.

1036. $y = \ln(ax+b)$.

1037. $y = \log_a x$.

1038. $y = \frac{x}{x^2-1}$.

1039. $y = \frac{1}{x^2-3x+2}$.

1040. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

1041. Montrer que la fonction $y = (x^2 - 1)^n$ vérifie la relation

$$(x^2-1)\,y^{(n+2)} + 2xy^{(n+1)} - n(n+1)\,y^{(n)} = 0.$$

1042. Montrer que la fonction $y = e^x \sin x$ vérifie la relation $y'' - 2y' + 2y = 0$, et la fonction $y = e^{-x} \sin x$ la relation $y'' + 2y' + 2y = 0$.

1043. Montrer que la fonction $y = \frac{x-3}{x+4}$ vérifie la relation $2y'^2 = (y-1)\,y''$.

1044. Montrer que la fonction $y = \sqrt{2x - x^2}$ vérifie la relation $y^3y'' + 1 = 0$.

1045. Montrer que la fonction $y = e^{4x} + 2e^{-x}$ vérifie la relation $y''' - 13y' - 12y = 0$.

1046. Montrer que la fonction $y = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$ vérifie la relation $xy'' + \frac{1}{2}y' - \frac{1}{4}y = 0$.

1047. Montrer que la fonction $y = \cos e^x + \sin e^x$ vérifie la relation $y'' - y' + ye^{2x} = 0$.

1048. Montrer que la fonction

$$y = A \sin(\omega t + \omega_0) + B \cos(\omega t + \omega_0)$$

($A$, $B$, $\omega$, $\omega_0$ sont constantes) vérifie la relation

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0.$$

1049. Montrer que la fonction

$$a_1e^{nx} + a_2e^{-nx} + a_3 \cos nx + a_4 \sin nx$$

($a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, $n$ sont constantes) vérifie la relation $\frac{d^4y}{dx^4} = n^4y$.

1050. Montrer que la fonction $y = \sin(n \arcsin x)$ vérifie la relation $(1-x^2)\,y'' - xy' + n^2y = 0$.

1051. Montrer que la fonction $e^{\alpha \arcsin x}$ vérifie la relation $(1-x^2)\,y'' - xy' - \alpha^2 y = 0$.

1052. Montrer que la fonction $y = (x + \sqrt{x^2+1})^k$ vérifie la relation $(1+x^2)\,y'' + xy' - k^2y = 0$.

**1053.** Montrer que l'expression $S=\frac{y'''}{y'}-\frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2$ ne varie pas si l'on remplace $y$ par $\frac{1}{y}$ i.e. si l'on pose $y=\frac{1}{y_1}$, on a $\frac{y_1'''}{y_2'}-$ $-\frac{3}{2}\left(\frac{y_1''}{y_1'}\right)^2=S$.

**1054.** Soit $y=f(x)$. Exprimer $\frac{d^2x}{dy^2}$ en fonction de $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Montrer que l'expression $R=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$ peut être ramenée à la forme

$$R^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{\frac{2}{3}}}+\frac{1}{\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^{\frac{2}{3}}}.$$

**1055.** Soit $F(x)=f(x)\cdot\varphi(x)$. Sachant que $f'(x)\,\varphi'(x)=C$ montrer que

$$\frac{F''}{F}=\frac{f''}{f}+\frac{\varphi''}{\varphi}+\frac{2C}{f\cdot\varphi} \text{ et } \frac{F'''}{F}=\frac{f'''}{f}+\frac{\varphi'''}{\varphi}.$$

## Fonctions implicites

**1056.** $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$; $\frac{d^2y}{dx^2}=?$

**1057.** $x^2+y^2=r^2$; $\frac{d^3y}{dx^3}=?$ **1058.** $y=\operatorname{tg}(x+y)$; $\frac{d^3y}{dx^3}=?$

**1059.** $s=1+te^s$; $\frac{d^2s}{dt^2}=?$ **1060.** $y^3+x^3-3axy=0$; $y''=?$

**1061.** $y=\sin(x+y)$; $y''=?$ **1062.** $e^{x+y}=xy$; $y''=?$

**1063.** Ecrire l'expression de la dérivée seconde de l'inverse de la fonction $y=f(x)$.

**1064.** $e^y+xy=e$; calculer $y''(x)$ pour $x=0$.

**1065.** $y^2=2px$; trouver l'expression de $k=\frac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}$.

**1066.** Montrer que $y^2+x^2=R^2$ entraîne $k=1/R$, où $k=\frac{|y''|}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}$.

**1067.** Montrer que si

$$ax^2+2bxy+cy^2+2gx+2fy+h=0,$$

alors

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{ax+by+g}{bx+cy+f} \text{ et } \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{A}{(bx+cy+f)^3},$$

où $A$ est une constante qui ne dépend pas de $x$ et $y$.

**1068.** Montrer que si $(a+bx)\,e^{\frac{y}{x}}=x$, alors

$$x^3\frac{d^2y}{dx^2}=\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)^2.$$

## Fonctions définies paramétriquement

1069. $x = at^2$, $y = bt^3$; $\frac{d^2x}{dy^2} = ?$

1070. $x = a\cos t$, $y = a\sin t$; $\frac{d^2y}{dx^2} = ?$

1071. $x = a\cos t$, $y = b\sin t$; $\frac{d^3y}{dx^3} = ?$

1072. $x = a(\varphi - \sin\varphi)$, $y = a(1 - \cos\varphi)$; $\frac{d^2y}{dx^2} = ?$

1073. 1) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$; $\frac{d^3y}{dx^3} = ?$

2) $x = a\cos^2 t$, $y = a\sin^2 t$; $\frac{d^2y}{dx^2} = ?$

1074. 1) $x = \ln t$, $y = t^2 - 1$; $\frac{d^2y}{dx^2} = ?$

2) $x = \arcsin t$, $y = \ln(1 - t^2)$; $\frac{d^2y}{dx^2} = ?$

1075. $x = at\cos t$, $y = at\sin t$; $\frac{d^2y}{dx^2} = ?$

1076. Montrer que la fonction $y = f(x)$ définie paramétriquement par les équations $y = e^t \cos t$, $x = e^t \sin t$ vérifie la relation $y''(x + y)^2 = 2(xy' - y)$.

1077. Montrer que la fonction $y = f(x)$ définie paramétriquement par les équations $y = 3t - t^3$, $x = 3t^2$ vérifie la relation

$$36y''\left(y - \sqrt{3x}\right) = x + 3.$$

1078. Montrer que la fonction définie paramétriquement par les équations

$$x = \sin t,\ y = \sin kt,$$

vérifie la relation

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + k^2y = 0.$$

1079. Montrer que si

$$x = f(t)\cos t - f'(t)\sin t,\ y = f(t)\sin t + f'(t)\cos t,$$

alors

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = [f(t) + f''(t)]^2\, dt^2.$$

## Accélération d'un mouvement

1080. Un point est animé d'un mouvement rectiligne d'équation $s = \frac{4}{3}t^3 - t + 5$. Calculer l'accélération $a$ à la fin de la deuxième seconde ($s$ est exprimé en mètres, $t$ en secondes).

1081. On considère un mouvement rectiligne d'équation $s = t^2 - 4t + 1$.

Calculer la vitesse et l'accélération.

**1082.** Soit un mouvement d'équation $s = \frac{2}{9} \sin \frac{\pi}{2} t + s_0$. Calculer l'accélération à la fin de la première seconde ($s$ est exprimé en cm, $t$ en secondes).

**1083.** On donne le mouvement d'équation $s = \sqrt{t}$. Montrer que c'est un mouvement retardé et que son accélération $a$ est proportionnelle au cube de la vitesse $v$.

**1084.** Pour descendre à terre une poutre lourde de 13 m de long on fait reposer sa base sur un wagonnet (fig. 28) et on la retient à son sommet par une corde enroulée autour d'un treuil. La corde s'enroule à une vitesse de 2 m/mn. Calculer l'accélération du wagonnet au moment où il se trouve à 5 m du point 0.

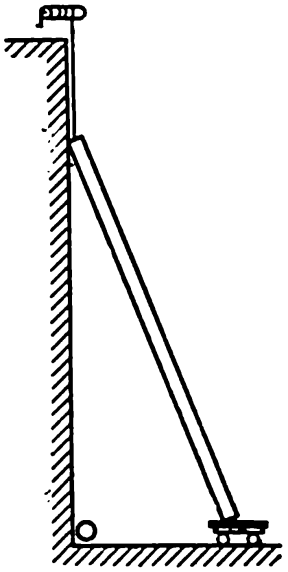

Fig. 28

**1085.** Une péniche dont le pont est situé à 4 m au-dessous du niveau du quai est halée à l'aide d'une corde qui s'enroule autour d'un treuil à la vitesse de 2 m/s. Calculer l'accélération de la péniche au moment où elle se trouve à 8 m du quai (suivant l'horizontale).

**1086.** Un point est animé d'un mouvement rectiligne tel que sa vitesse est proportionnelle à la racine carrée du chemin parcouru. Montrer que ce mouvement est provoqué par l'action d'une force constante.

**1087.** Sachant que la force agissant sur un point matériel est inversement proportionnelle à sa vitesse, montrer que son énergie cinétique est une fonction linéaire du temps.

## Formule de Leibniz

**1088.** Appliquer la formule de Leibniz au calcul des dérivées

1) $[(x^2 + 1) \sin x]^{20}$ ; 2) $(e^x \sin x)^{(n)}$ ;

3) $(x^3 \sin \alpha x)^{(n)}$.

**1089.** Montrer que si $y = (1 - x)^{-\alpha} e^{-\alpha x}$ alors

$$(1 - x) \frac{dy}{dx} = \alpha x y.$$

Utiliser la formule de Leibniz pour prouver que

$$(1 - x) y^{(n+1)} - (n + \alpha x) y^{(n)} - n\alpha y^{(n-1)} = 0.$$

**1090.** La fonction $y = e^{\alpha \arcsin x}$ satisfait la relation $(1 - x^2) y'' - xy' - \alpha^2 y = 0$ (cf. exercice 1051). En appliquant la formule de Leibniz et en dérivant $n$ fois montrer que

$$(1 - x^2) y^{(n+2)} - (2n + 1) x y^{(n+1)} - (n^2 + \alpha^2) y^{(n)} = 0.$$

**1091.** Montrer que

$$(e^{ax}\cos bx)^{(n)} = r^n e^{ax}\cos(bx+n\varphi), \text{ où } r=\sqrt{a^2+b^2},\ \operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}.$$

Appliquer la formule de Leibniz pour établir les relations suivantes:

$$r^n\cos n\varphi = a^n - C_n^2 a^{n-2}b^2 + C_n^4 a^{n-4}b^4 - \ldots,$$

$$r^n\sin n\varphi = C_n^1 a^{n-1}b - C_n^3 a^{n-3}b^3 + C_n^5 a^{n-5}b^5 - \ldots$$

**1092.** Montrer que $(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)} = (-1)^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}$.

**1093.** Montrer que la fonction $y = \arcsin x$ vérifie la relation $(1-x^2)\,y'' = xy'$. Calculer $y^{(n)}(0)$ $(n \geqslant 2)$ en appliquant la formule de Leibniz aux deux membres de cette équation.

**1094.** Appliquer $n$ fois la formule de Leibniz pour montrer que la fonction $y = \cos(m \arcsin x)$ vérifie la relation

$$(1-x^2)\,y^{(n+2)} - (2n+1)\,xy^{n+1} + (m^2-n^2)\,y^{(n)} = 0.$$

**1095.** Si $y = (\arcsin x)^2$, on a

$$(1-x^2)\,y^{(n+1)} - (2n-1)\,xy^{(n)} - (n-1)^2 y^{(n-1)} = 0.$$

Calculer $y'(0)$, $y''(0)$, ..., $y^{(n)}(0)$.

## Différentielles d'ordre supérieur

**1096.** $y=\sqrt[3]{x^2}$; $d^2y=?$

**1097.** $y=x^m$; $d^3y=?$

**1098.** $y=(x+1)^3(x-1)^2$; $d^2y=?$

**1099.** $y=4^{-x^2}$; $d^2y=?$

**1100.** $y=\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg}x\right)$; $d^2y=?$

**1101.** $y=\sqrt{\ln^2 x-4}$; $d^2y=?$

**1102.** $y=\sin^2 x$; $d^3y=?$

**1103.** $\rho^2\cos^3\varphi - a^2\sin^3\varphi = 0$; $d^2\rho=?$

**1104.** $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$; $d^2y=?$

**1105.** $y=\ln\frac{1-x^2}{1+x^2}$; $x=\operatorname{tg}t$; exprimer $d^2y$ en fonction: 1) de $x$ et $dx$, 2) de $t$ et $dt$.

**1106.** $y=\sin z$; $z=a^x$; $x=t^3$; exprimer $d^2y$ en fonction de 1) $z$ et $dz$; 2) $x$ et $dx$; 3) $t$ et $dt$.

# CHAPITRE IV

# LES FONCTIONS ET LEURS GRAPHES

## § 1. Comportement des fonctions

**1107.** Montrer que la fonction

$$y = 3x^4 - 4x^3 + 12x^2 + 1$$

passe par un minimum au point $x = 0$.

**1108.** Se servir directement de la définition d'une fonction croissante et décroissante et d'un point de maximum et de minimum pour montrer que la fonction $y = x^3 - 3x + 2$ est croissante au point $x_1 = 2$, décroissante au point $x_2 = 0$, atteint son maximum au point $x_3 = -1$ et son minimum au point $x_4 = 1$.

**1109.** Comme dans l'exercice 1108 montrer que la fonction $y = \cos 2x$ est croissante en $x_1 = \frac{3\pi}{4}$, décroissante en $x_2 = \frac{\pi}{6}$, atteint son maximum en $x_3 = 0$ et son minimum en $x_4 = \frac{\pi}{2}$.

**1110.** Sans recourir à la notion de dérivée étudier le comportement des fonctions suivantes au point $x = 0$:

1) $y = 1 - x^4$; 2) $y = x^5 - x^3$; 3) $y = \sqrt[3]{x}$; 4) $y = \sqrt[3]{x^2}$;
5) $y = 1 - \sqrt[5]{x^4}$; 6) $y = |\operatorname{tg} x|$; 7) $y = |\ln(x+1)|$;
8) $y = e^{-|x|}$; 9) $y = \sqrt{x^3 + x^2}$.

**1111.** Montrer que la fonction $y = \ln(x^2 + 2x - 3)$ est croissante en $x_1 = 2$, décroissante en $x_2 = -4$ et ne possède pas de points stationnaires.

**1112.** Etudier le comportement de la fonction $y = \sin x + \cos x$ en $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -\frac{\pi}{3}$ et $x_4 = 2$.

**1113.** Etudier le comportement de la fonction $y = x - \ln x$ en $x_1 = 1/2$, $x_2 = 2$, $x_3 = e$ et $x_4 = 1$ et montrer que si elle est croissante en $x = a > 0$, elle est décroissante en $x = 1/a$.

**1114.** Etudier le comportement de la fonction

$$y = x \operatorname{arctg} x$$

en $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ et $x_3 = 0$.

**1115.** Etudier le comportement de la fonction

$$y=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{pour } x\neq 0, \\ 1 & \text{pour } x=0 \end{cases}$$

en $x_1 = 1/2$, $x_2 = -1/2$ et $x_3 = 0$.

## § 2. Applications de la dérivée première

### Théorèmes de Rolle et de Lagrange

**1116.** Montrer que la fonction $y = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$ satisfait aux conditions du théorème de Rolle dans l'intervalle $[-1, 2]$.

**1117.** Montrer que la fonction $y = \ln \sin x$ satisfait les conditions du théorème de Rolle dans l'intervalle $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$.

**1118.** Montrer que la fonction $y = 4^{\sin x}$ réalise les conditions du théorème de Rolle dans l'intervalle $[0, \pi]$.

**1119.** Montrer que la fonction $y = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}$ remplit les conditions du théorème de Rolle dans l'intervalle $[1, 2]$.

**1120.** La fonction $y = \frac{2-x^2}{x^4}$ prend des valeurs égales aux extrémités de l'intervalle $[-1, 1]$. Vérifier que la dérivée de cette fonction ne s'annule en aucun point de l'intervalle $[-1, 1]$. Expliquer cette contradiction avec le théorème de Rolle.

**1121.** La fonction $y = |x|$ prend des valeurs égales aux extrémités de l'intervalle $[-a, a]$. Vérifier que la dérivée de cette fonction ne s'annule en aucun point de l'intervalle. Expliquer cette contradiction avec le théorème de Rolle.

**1122.** Montrer le théorème: si l'équation

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x = 0$$

possède une racine positive $x = x_0$, alors l'équation

$$na_0x^{n-1} + (n-1)\, a_1x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} = 0$$

possède également une racine positive qui est inférieure à $x_0$.

**1123.** On considère la fonction $f(x) = 1 + x^m (x-1)^n$, où $m$ et $n$ sont des entiers positifs. Sans calculer la dérivée montrer que l'équation $f'(x) = 0$ possède au moins une racine dans l'intervalle $]0, 1[$.

**1124.** Montrer que l'équation $x^3 - 3x + c = 0$ ne peut posséder deux racines distinctes dans l'intervalle $]0, 1[$.

**1125.** Sans calculer la dérivée de la fonction

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4),$$

établir combien de racines réelles possède l'équation $f'(x) = 0$ et indiquer les intervalles qui les contiennent.

**1126.** Montrer que la fonction $f(x) = x^n + px + q$ ne peut posséder plus de deux racines réelles pour $n$ pair et plus de trois pour $n$ impair.

**1127.** Ecrire la formule de Lagrange pour la fonction $y = \sin 3x$ dans l'intervalle $[x_1, x_2]$.

**1128.** Ecrire la formule de Lagrange pour la fonction $y = x(1 - \ln x)$ dans l'intervalle $[a, b]$.

**1129.** Ecrire la formule de Lagrange pour la fonction $y = \arcsin 2x$ dans l'intervalle $[x_0, x_0 + \Delta x]$.

**1130.** Montrer que le théorème de Lagrange s'applique à la fonction $y = x^n$ dans l'intervalle $[0, a]$; $n > 0$, $a > 0$.

**1131.** Montrer que le théorème de Lagrange s'applique à la fonction $y = \ln x$ dans l'intervalle $[1, e]$.

**1132.** Se servir de la formule de Lagrange pour démontrer l'inégalité

$$\frac{a-b}{a} \leqslant \ln \frac{a}{b} \leqslant \frac{a-b}{b},$$

sous réserve que $0 < b \leqslant a$.

**1133.** Utiliser la formule de Lagrange pour démontrer l'inégalité

$$\frac{\alpha-\beta}{\cos^2 \beta} \leqslant \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta \leqslant \frac{\alpha-\beta}{\cos^2 \alpha},$$

sous réserve que $0 < \beta \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$.

**1134.** Appliquer la formule de Lagrange pour prouver, $a > b$, que

$$nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a-b),$$

si $n > 1$ et l'inégalité de sens inverse si $n < 1$.

**1135.** On considère la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{pour } x \neq 0, \\ 0 & \text{pour } x = 0, \end{cases}$$

dérivable quel que soit $x$. Appliquons-lui la formule de Lagrange dans l'intervalle $[0, x]$:

$$f(x) - f(0) = xf'(\xi) \quad (0 < \xi < x).$$

On aura:

$$x^2 \sin \frac{1}{x} = x\left(2\xi \sin \frac{1}{\xi} - \cos \frac{1}{\xi}\right),$$

d'où $\cos \frac{1}{\xi} = 2\xi \sin \frac{1}{\xi} - x \sin \frac{1}{x}$. En faisant tendre $x$ vers 0, $\xi$ tendra vers 0 et l'on obtient: $\lim\limits_{\xi \to 0} \cos \frac{1}{\xi} = 0$.

Expliquer ce paradoxe.

**1136.** On donne la fonction $f(x) = \operatorname{arctg} x$ sur l'intervalle $[1; 1{,}1]$. Appliquer la formule

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \Delta x,$$

au calcul approché de arctg 1,1.

Appliquer la formule

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta x$$

au calcul approché des expressions données dans les exercices 1137-1141.

**1137.** arcsin 0,54.

**1138.** lg 11. Comparer avec la valeur tabulaire.

**1139.** $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ pour $x = 0{,}2$.

**1140.** lg 7, sachant que lg 2 = 0,3010 et lg 3 = 0,4771. Comparer avec les données tabulaires.

**1141.** lg 61. Comparer avec la valeur tabulaire.

**1142.** Vérifier qu'en appliquant la formule

$$f(b) = f(a) + (b-a)\,f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

au calcul du logarithme de $N + 0{,}01\,N$, i.e. en admettant que

$$\lg(N+0{,}01N) = \lg N + \frac{0{,}43429}{N+\frac{0{,}01}{2}N}\,0{,}01N = \lg N + \frac{0{,}43429}{100{,}5},$$

on commet une erreur inférieure à 0,00001, i.e. le résultat est vrai à la cinquième décimale si seulement lg $N$ l'est.

## Comportement des fonctions dans un intervalle

**1143.** Montrer que la fonction $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ est décroissante dans l'intervalle $]-2, 1[$.

**1144.** Montrer que la fonction $y = \sqrt{2x - x^2}$ est croissante dans l'intervalle $]0, 1[$ et décroissante dans $]1, 2[$. Construire son graphe.

**1145.** Montrer que la fonction $y = x^3 + x$ est partout croissante.

**1146.** Montrer que la fonction $y = \operatorname{arctg} x - x$ est partout décroissante.

**1147.** Montrer que la fonction $y = \frac{x^2-1}{x}$ est croissante dans tout intervalle ne contenant pas le point $x = 0$.

**1148.** Montrer que la fonction $y = \frac{\sin(x+a)}{\sin(x+b)}$ est monotone dans tout intervalle ne contenant pas de points de discontinuité de cette fonction.

**1149*.** Montrer l'inégalité $\frac{\operatorname{tg} x_2}{\operatorname{tg} x_1} > \frac{x_2}{x_1}$ sous réserve que

$$0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}.$$

1150. Trouver les intervalles de monotonie de la fonction $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 14$ et construire son graphe point par point dans l'intervalle $]-2, 4[$.

1151. Trouver les intervalles de monotonie de la fonction $y = x^4 - 2x^2 - 5$.

Trouver les intervalles de monotonie des fonctions:

1152. $y = (x-2)^5 (2x+1)^4$.

1153. $y = \sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^2}$ $(a > 0)$.

1154. $y = \frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$

1155. $y = \frac{10}{4x^3-9x^2+6x}$.

1156. $y = x - e^x$.

1157. $y = x^2 e^{-x}$.

1158. $y = \frac{x}{\ln x}$.

1159. $y = 2x^2 - \ln x$.

1160. $y = x - 2\sin x$ $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.

1161. $y = 2\sin x + \cos 2x$ $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.

1162. $y = x + \cos x$.

1163. $y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

1164. $y = x\sqrt{ax - x^2}$ $(a > 0)$.

Trouver les extrémums des fonctions:

1165. $y = 2x^3 - 3x^2$.

1166. $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$.

1167. $y = \frac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$.

1168. $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 8^2}$,

1169. $y = \frac{1}{\ln(x^4+4x^3+30)}$.

1170. $y = -x^2\sqrt{x^2+2}$.

1171. $y = \frac{2}{3}x^2\sqrt[3]{6x-7}$.

1172. $y = \frac{4\sqrt{3}}{9x\sqrt{1-x}}$.

1173. $y = \frac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$.

1174. $y = \sqrt[3]{(x^2-a^2)^2}$.

1175. $y = x - \ln(1+x)$.

1176. $y = x - \ln(1+x^2)$.

1177. $y = (x-5)^2\sqrt[3]{(x+1)^2}$.

1178. $y = (x^2-2x)\ln x - \frac{3}{2}x^2 + 4x$.

1179. $y = \frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{8}x^2 - \frac{x-1}{2}$.

1180. $y = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)\arcsin x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} - \frac{\pi}{12}x^2$.

1181. $y = x\sin x + \cos x - \frac{1}{4}x^2$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

1182. $y = \left(\frac{1}{2} - x\right)\cos x + \sin x - \frac{x^2-x}{4}$ $\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

1183. $y = \frac{2-x}{\pi}\cos\pi(x+3) + \frac{1}{\pi^2}\sin\pi(x+3)$ $(0 < x < 4)$.

1184. $y = ae^{px} + be^{-px}$.

Trouver les extrémums des fonctions dans les intervalles indiqués:

1185. $y=x^4-2x^2+5$; $[-2, 2]$.

1186. $y=x+2\sqrt{x}$; $[0, 4]$.

1187. $y=x^5-5x^4+5x^3+1$; $[-1, 2]$.

1188. $y=x^3-3x^2+6x-2$; $[-1, 1]$.

1189. $y=\sqrt{100-x^2}$ $(-6\leqslant x\leqslant 8)$.

1190. $y=\frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$.

1191. $y=\frac{x-1}{x+1}$ $(0\leqslant x\leqslant 4)$.

1192. $y=\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{1-x}$ $(0<x<1)$ $(a>0,\ b>0)$.

1193. $y=\sin 2x-x$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

1194. $y=2\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}^2 x$ $\left(0\leqslant x<\frac{\pi}{2}\right)$.

1195. $y=x^x$ $(0{,}1\leqslant x<\infty)$.

1196. $y=\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}$ $(0\leqslant x\leqslant 3)$.

1197. $y=\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$.

## Inégalités

Montrer les inégalités suivantes:

1198. $2\sqrt{x}>3-\frac{1}{x}$ $(x>1)$.

1199. $e^x>1+x$ $(x\neq 0)$.

1200. $x>\ln(1+x)$ $(x>0)$.

1201. $\ln x>\frac{2(x-1)}{x+1}$ $(x>1)$.

1202. $2x\operatorname{arctg} x\geqslant\ln(1+x^2)$.

1203. $1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\geqslant\sqrt{1+x^2}$.

1204. $\ln(1+x)>\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x}$ $(x>0)$.

1205. $\sin x<x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$ $(x>0)$.

1206. $\sin x+\operatorname{tg} x>2x$ $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$.

1207. $\operatorname{ch} x>1+\frac{x^2}{2}$ $(x\neq 0)$.

**1208.** Décomposer le nombre 8 en deux nombres tels que la somme de leurs cubes soit minimale.

**1209.** Quel est le nombre positif qui ajouté à son inverse donne la plus petite somme?

**1210.** Décomposer le nombre 36 en deux facteurs tels que la somme de leurs carrés soit minimale.

**1211.** On demande de construire une caisse avec couvercle telle que son volume soit de 72 $cm^3$ et le rapport des dimensions de la base soit égal à 1/2. Trouver les dimensions qui rendent minimale la surface totale de la caisse.

**1212.** Avec une feuille de carton carrée de dimensions $18 \times 18$ $cm^2$ on veut construire une boîte de plus grand volume en découpant des carrés égaux aux coins et en pliant ensuite la feuille suivant les pointillés (fig. 29). Quelle doit être la longueur du côté des carrés enlevés?

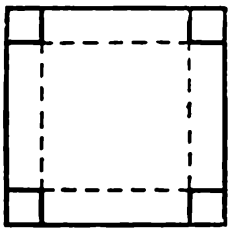

Fig. 29

**1213.** Même problème pour une feuille rectangulaire de $8 \times 5$ $cm^2$.

**1214.** Le volume d'un prisme triangulaire régulier est égal à $v$. Trouver le côté de la base qui rend minimale la surface totale.

**1215.** Une cuve sans couvercle a la forme d'un cylindre. Le volume $v$ étant donné, trouver le rayon de base et la hauteur qui rendent minimale sa surface.

**1216.** Etablir entre le rayon de base $R$ et la hauteur $H$ d'un cylindre une relation telle que la surface totale soit minimale, le volume étant donné.

**1217.** On demande de fabriquer un entonnoir conique de génératrice 20 cm. Trouver la hauteur de l'entonnoir qui rend maximum le volume.

**1218.** On découpe un secteur d'angle au centre $\alpha$ dans un cercle que l'on enroule en cône. Trouver l'angle $\alpha$ qui rend maximum le volume du cône obtenu.

**1219.** Le périmètre d'un triangle isocèle est égal à $2p$. Trouver les côtés qui rendent maximum le volume du corps obtenu en faisant tourner ce triangle autour de sa base.

**1220.** Le périmètre d'un triangle isocèle est égal à $2p$. Trouver les côtés qui rendent maximum le volume du cône obtenu en faisant tourner ce triangle autour de la hauteur abaissée sur sa base.

**1221.** Trouver la hauteur du cylindre de volume maximal inscriptible dans une sphère de rayon $R$.

**1222.** Trouver la hauteur du cône de volume maximal inscriptible dans une sphère de rayon $R$.

**1223.** Une goutte de pluie de masse initiale $m_0$ tombe sous l'action de la force de pesanteur, en s'évaporant uniformément de telle sorte que la perte de masse soit proportionnelle au temps (le coefficient de proportionnalité est égal à $k$). Au bout de combien de secon-

des après le début de la chute son énergie cinétique est-elle maximale? Calculer cette énergie. (On négligera la résistance de l'air).

**1224.** Un levier de deuxième espèce est appuyé en $A$ ; au point $B$ ($AB = a$) est suspendu une charge $P$. Le poids d'une unité de longueur de levier est égal à $k$. Quelle doit être la longueur du levier pour que la charge $P$ soit équilibrée par une force $F$ minimale? (Le moment de la force $F$ doit être égal à la somme des moments de la charge $P$ et du levier).

**1225.** Un paquebot consomme une quantité de carburant proportionnelle au cube de sa vitesse. On sait qu'à 10 km/h les dépenses de carburant s'élèvent à 30 roubles et les autres (qui sont indépendantes de la vitesse) à 480 roubles à l'heure. Trouver la vitesse qui rend minimum les dépenses générales faites sur 1 km de route. Evaluer ces dépenses.

**1226.** Trois localités $A$, $B$ et $C$ sont situées de manière que l'angle $ABC = 60°$. Une automobile et un train partent simultanément, la première de $A$ en direction de $B$ à la vitesse de 80 km/h, le second de $B$ en direction de $C$ à la vitesse de 50 km/h. A quel instant (après le départ) la distance entre le train et l'automobile est-elle minimale sachant que $AB = 200$ km?

**1227.** Soit un point $A$ sur un cercle. Tracer une corde $BC$ parallèle à la tangente en $A$ telle que l'aire du triangle $ABC$ soit maximale.

**1228.** Trouver les côtés du rectangle de plus grand périmètre que l'on peut inscrire dans un demi-cercle de rayon $R$.

**1229.** Inscrire un rectangle d'aire maximale dans un segment de cercle donné.

**1230.** Inscrire un cylindre donné dans un cône de volume minimal (les bases du cylindre et du volume sont confondues).

**1231.** Trouver la hauteur du cône droit de plus petit volume que l'on peut exinscrire à une sphère de rayon $R$.

**1232.** Trouver l'angle au sommet de la section axiale du cône de plus petite surface latérale exinscrit à une sphère de rayon $R$.

**1233.** Trouver l'angle au sommet d'un triangle isocèle de surface donnée tel que le rayon du cercle inscrit soit maximal.

**1234.** Trouver la hauteur du cône de volume maximal exinscrit à une demi-sphère de rayon $R$ (le centre de la base du cône est confondu avec celui de la sphère).

**1235.** Trouver la hauteur d'un cône inscrit dans une sphère de rayon $R$ tel que sa surface latérale soit maximale.

**1236.** Montrer qu'une tente conique d'une capacité donnée nécessite le moins de tissu lorsque sa hauteur est $\sqrt{2}$ fois plus grande que son rayon de base.

**1237.** Mener par le point $P$ (1, 4) une droite telle que la somme des segments positifs qu'elle découpe sur les axes de coordonnées soit minimale.

**1238.** Trouver les côtés du rectangle de plus grande aire que l'on peut inscrire dans l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

**1239.** Trouver l'ellipse d'aire minimale exinscrite à un rectangle donné (l'aire de l'ellipse de demi-axes $a$ et $b$ est égale à $\pi ab$).

**1240.** On considère l'ellipse $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{18} = 1$. Tracer une tangente telle que l'aire du triangle qu'elle forme avec les axes de coordonnées soit minimale.

**1241.** Soient les points $A$ (1, 4) et $B$ (3, 0) de l'ellipse $2x^2 + y^2 = 18$. Trouver sur cette ellipse un point $C$ tel que l'aire du triangle $ABC$ soit maximale.

**1242.** Soit un point situé sur l'axe de la parabole $y^2 = 2px$ à une distance $a$ du sommet. Trouver l'abscisse $x$ du point de la courbe qui soit le plus proche de $A$.

**1243.** Un ruban de fer de largeur $a$ doit être enroulé sous forme d'une rainure cylindrique ouverte (la section de la rainure se présente sous la forme d'un arc de segment de cercle). Trouver l'angle au centre, s'appuyant sur cet arc, tel que la capacité de la rainure soit maximale.

**1244.** Un fût de 20 m a la forme d'un cône tronqué dont les diamètres de bases sont respectivement égaux à 2 et 1 m. On veut y tailler une poutre de section transversale carrée dont l'axe coïncide avec celui du fût et dont le volume soit maximal. Quelles doivent être les dimensions de cette poutre?

**1245.** Une série d'expériences ont donné $n$ valeurs distinctes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de la grandeur $A$. Pour valeur $A$ on prend souvent la valeur de $x$ qui rend minimale la somme des carrés des différences de $x$ et de chaque $x_i$. Trouver $x$ réalisant cette condition.

**1246.** Un torpilleur mouille à 9 km du point $A$ le plus proche du rivage. Un courrier doit se rendre dans un camp situé sur le rivage à 15 km du point $A$. Si ce courrier fait 5 km/h à pied et rame à 4 km/h, en quel point du rivage doit-il accoster pour atteindre le camp en un temps minimum?

**1247.** On veut suspendre une lampe à la verticale du centre d'une place circulaire de rayon $R$. A quelle hauteur faut-il placer la lampe de manière à obtenir le meilleur éclairage pour le chemin ceinturant la place? (L'éclairage d'une surface est directement proportionnel au cosinus de l'angle d'incidence des rayons et inversement proportionnel au carré de la distance à la source lumineuse).

**1248.** Trouver le point le moins éclairé d'un segment de longueur $l$ reliant deux sources lumineuses d'intensité $I_1$ et $I_2$.

**1249.** Un tableau de 1,4 m de hauteur est suspendu à un mur de telle sorte que son bord inférieur se trouve à 1,8 m au-dessus des yeux d'un observateur. A quelle distance du mur doit se tenir l'observateur pour jouir des meilleures conditions de vision (i.e. pour que l'angle de vue soit maximal)?

**1250.** On se propose de déplacer une charge de poids $P$ située sur un plan horizontal en lui appliquant une force $F$. La force de frottement est proportionnelle à la force qui plaque le corps contre la sur-

face et est dirigée contre la force $F$. Le coefficient de proportionnalité (ou coefficient de frottement) est égal à $k$. Sous quel angle $\varphi$ à l'horizontale doit-on appliquer la force $F$ pour que celle-ci soit minimale? Calculer cette valeur.

**1251.** La vitesse d'écoulement de l'eau dans une conduite circulaire est directement proportionnelle au rayon hydraulique défini par la formule $R = \frac{S}{p}$ où $S$ est l'aire de la section de l'eau dans la conduite, $p$ le périmètre (immergé) mouillé de la section de la conduite. Le remplissage de la conduite est caractérisé par l'angle au centre qui s'appuie sur le plan horizontal de l'eau courante. Sous quel remplissage la vitesse d'écoulement de l'eau sera-t-elle maximale? (On cherchera graphiquement les racines de l'équation transcendante obtenue).

**1252.** Un texte doit occuper $S$ cm$^2$ sur la page d'un livre. Les marges inférieures et supérieures doivent être de $a$ cm, celles de gauche et de droite de $b$ cm. Quelles sont les dimensions de la page qui permettent la plus grande économie de papier?

**1253*.** Un entonnoir conique de rayon de base $R$ et de hauteur $H$ est rempli d'eau. On y plonge une sphère pesante. Quel doit être le rayon de la sphère pour que le volume d'eau déplacé par la partie immergée soit maximal?

**1254.** Le sommet d'une parabole est situé sur un cercle de rayon $R$ et son axe est orienté diamétralement. Trouver le paramètre de la parabole tel que l'aire du segment limité par la parabole et la corde commune avec le cercle soit maximale. [L'aire d'un segment parabolique symétrique est égale au 2/3 du produit de sa base par la « flèche » (hauteur)].

**1255.** On considère un cône de rayon de base $R$ et de hauteur $H$. Un plan parallèle à la génératrice coupe la base suivant une droite. Trouver la distance de cette droite au centre de la base qui rend maximale l'aire de section. (Voir exercice précédent).

**1256.** Trouver le point $P$ de la parabole $y^2 = 2px$ tel que le segment de normale en $P$ contenu à l'intérieur de la courbe soit minimal.

**1257.** Montrer que la tangente à l'ellipse dont le segment compris entre les axes de coordonnées est minimal est divisée au point de contact en deux parties de longueurs respectivement égales aux demi-axes de l'ellipse.

**1258.** Montrer que dans l'ellipse la distance du centre à une normale quelconque n'est pas supérieure à la différence des demi-axes. (On se servira de l'écriture paramétrique).

**1259.** Dans un système $xOy$ de coordonnées rectangulaires on considère une courbe $y = f(x)$ et un point $(a, b)$. Montrer que la distance du point fixe $(a, b)$ à un point variable $(x, f(x))$ peut atteindre un extrémum seulement dans la direction d'une normale à la courbe $y = f(x)$.

---

Une primitive d'une fonction $f(x)$ est par définition une fonction $F(x)$ dont la dérivée est égale à $f(x)$, i.e. $F'(x) = f(x)$.

Montrer (en dérivant et sans dériver) que les fonctions données sont les primitives d'une même fonction.

**1260.** $y = \ln ax$ et $y = \ln x$.

**1261.** $y = 2\sin^2 x$ et $y = -\cos 2x$.

**1262.** $y = (e^x + e^{-x})^2$ et $y = (e^x - e^{-x})^2$.

**1263*.** Montrer que la fonction

$$y = \cos^2 x + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \cos x \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$

est constante (i.e. ne dépend pas de $x$). Calculer cette constante.

**1264.** Montrer que la fonction $y = 2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ est constante pour $x \geqslant 1$. Calculer cette constante.

**1265.** Montrer que la fonction

$$y = \arccos \frac{a\cos x + b}{a + b\cos x} - 2 \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{b+b}} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right),$$

où $0 < b \leqslant a$, est une constante pour $x \geqslant 0$. Calculer cette constante.

**1266.** Vérifier que les fonctions $\frac{1}{2}e^{2x}$, $e^x \operatorname{sh} x$ et $e^x \operatorname{ch} x$ diffèrent l'une de l'autre d'une constante. Montrer que chacune de ces fonctions est une primitive de la fonction $e^{2x}$.

## § 3. Application de la dérivée seconde

### Extrémums

Trouver les extrémums des fonctions données en calculant leurs dérivées secondes.

**1267.** $y = x^3 - 2ax^2 + a^2x \quad (a > 0)$.

**1268.** $y = x^2(a-x)^2$,

**1269.** $y = x + \frac{a^2}{x} \quad (a > 0)$.

**1270.** $y = x + \sqrt{1-x}$.

**1271.** $y = x\sqrt{2-x^2}$.

**1272.** $y = \operatorname{ch} ax$.

**1273.** $y = x^2 e^{-x}$.

**1274.** $y = \frac{x}{\ln x}$.

**1275.** $y = x^{\frac{1}{x}}$.

**1276.** Pour quelle valeur de $a$ la fonction

$$f(x) = a\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$$

présente-t-elle un extrémum lorsque $x = \frac{\pi}{3}$? Déterminer la nature de cet extrémum.

1277. Trouver les valeurs de $x$ et $b$ pour lesquelles la fonction

$$y = a \ln x + bx^2 + x$$

admet un extrémum aux points $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$. Montrer que pour ces valeurs la fonction donnée présente un minimum en $x_1$ et un maximum en $x_2$.

## Convexité, concavité, points d'inflexion

1278. Etudier la concavité de la courbe $y = x^5 - 5x^3 - 15x^2 + 30$ au voisinage des points (1, 11) et (3, 3).

1279. Etudier la concavité de la courbe $y = \operatorname{arctg} x$ au voisinage des points $(1, \pi/4)$ et $(-1, -\pi/4)$.

1280. Etudier la concavité de la courbe $y = x^2 \ln x$ au voisinage des points $(1, 0)$ et $(1/e^2, -2/e^4)$.

1281. Montrer que la courbe $y = x \operatorname{arctg} x$ est partout concave.

1282. Montrer que la courbe $y = \ln (x^2 - 1)$ est partout convexe.

1283. Montrer que si la courbe représentative d'une fonction est partout concave ou partout convexe, alors cette fonction ne peut posséder plus d'un extrémum.

1284. On donne un polynôme $P(x)$ à coefficients positifs et d'exposants pairs. Montrer que la courbe représentative de la fonction $y = P(x) + ax + b$ est partout concave.

1285. Les courbes $y = \varphi(x)$ et $y = \psi(x)$ sont concaves sur l'intervalle $]a, b[$. Montrer que sur cet intervalle: a) la courbe $y = \varphi(x) + \psi(x)$ est concave; b) si $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont positives et possèdent un point de minimum commun, alors la courbe $y = \varphi(x)\psi(x)$ est concave.

1286. Etudier la concavité des fonctions sachant que dans l'intervalle $]a, b[$:

1) $y > 0,\ y' > 0,\ y'' < 0$; 2) $y > 0,\ y' < 0,\ y'' > 0$;
3) $y < 0,\ y' > 0,\ y'' > 0$; 4) $y > 0,\ y' < 0,\ y'' < 0$.

Trouver les points d'inflexion et les intervalles de concavité des graphes des fonctions données:

1287. $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$. 1288. $y = (x+1)^4 + e^x$.

1289. $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$.

1290. $y = x + 36x^2 - 2x^3 - x^4$. 1291. $y = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2$.

1292. $y = (x+2)^6 + 2x + 2$. 1293. $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 3a^2}$ $(a > 0)$.

1294. $y = a - \sqrt[3]{x - b}$. 1295. $y = e^{\sin x}\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$.

1296. $y = \ln (1 + x^2)$. 1297. $y = \dfrac{a}{x} \ln \dfrac{x}{a}$ $(a > 0)$.

1298. $y = a - \sqrt[5]{(x-b)^2}$. 1299. $y = e^{\operatorname{arctg} x}$.

1300. $y = x^4 (12 \ln x - 7)$.

**1301.** Montrer que la courbe $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ possède trois points d'inflexion alignés.

**1302.** Montrer que les points d'inflexion de la courbe $y = x \sin x$ sont situés sur la courbe d'équation $y^2 (4 + x^2) = 4x^2$.

**1303.** Montrer que les points d'inflexion de la courbe $y = \frac{\sin x}{x}$ sont situés sur la courbe $y^2 (4 + x^4) = 4$.

**1304.** Vérifier que les graphes des fonctions $y = \pm e^{-x}$ et $y = e^{-x} \sin x$ (courbe d'oscillations amorties) possèdent des tangentes communes aux points d'inflexion de la courbe $y = e^{-x} \sin x$.

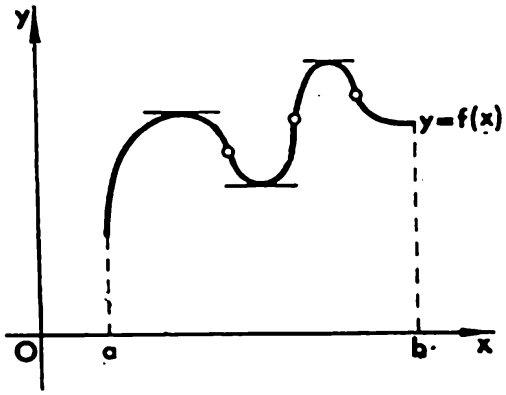


Fig. 30

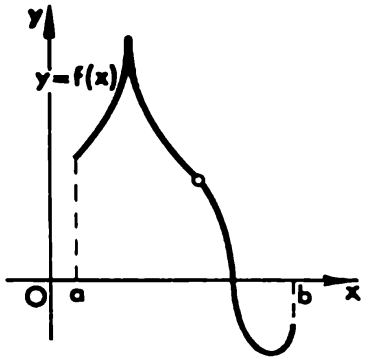


Fig. 31

**1305.** Pour quelles valeurs de $a$ et $b$ le point (1, 3) est-il point d'inflexion de la courbe $y = ax^3 + bx^2$?

**1306.** Choisir $\alpha$ et $\beta$ tels que la courbe $x^2y + ax + \beta y = 0$ admette le point $A$ (2; 2,5) pour point d'inflexion. Déterminer les autres points d'inflexion.

**1307.** Pour quelles valeurs de $a$ la fonction $y = e^x + ax^3$ possède-t-elle des points d'inflexion?

**1308.** Montrer que l'abscisse d'un point d'inflexion d'une fonction ne peut coïncider avec un point d'extrémum de cette fonction.

**1309.** Montrer que l'intervalle des abscisses de deux points d'extrémums de toute fonction deux fois dérivable renferme au moins une abscisse d'un point d'inflexion.

**1310.** Sur l'exemple de la fonction $y = x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8$ montrer que l'intervalle des abscisses des points d'inflexion de cette fonction peut ne pas contenir de point d'extrémum (voir exercice précédent).

**1311.** Du graphe de la fonction $f(x)$ (fig. 30) déduire les graphes de ses dérivées première et seconde.

**1312.** Idem pour la fonction de la fig. 31.

**1313.** Construire le graphe d'une fonction sachant celui de sa dérivée (fig. 32).

**1314.** Déduire le graphe d'une fonction de celui de sa dérivée (fig. 33).

**1315.** Une courbe est définie par les équations paramétriques $x = \varphi(t)$ et $y = \psi(t)$. Vérifier que les valeurs de $t$ telles que l'expression $\frac{\varphi'\psi''-\psi'\varphi''}{\varphi'}$ change de signe (le signe $'$ signifie que la dérivation s'effectue par rapport à $t$) et $\varphi'(t) \neq 0$ correspondent aux points d'inflexion de cette courbe.

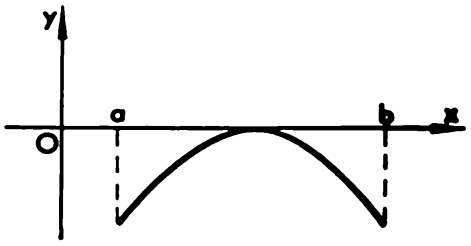


Fig. 32

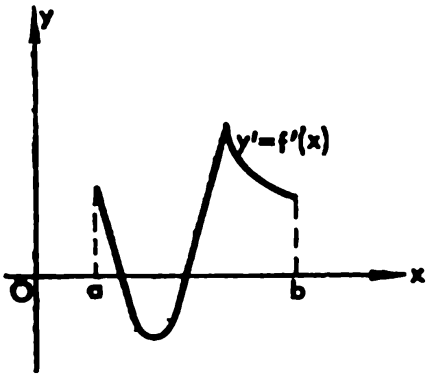


Fig. 33

**1316.** Trouver les points d'inflexion de la courbe $x = t^2$, $y = 3t + t^3$.

**1317.** Trouver les points d'inflexion de la courbe $x = e^t$, $y = \sin t$.

## § 4. Problèmes subsidiaires. Résolution d'équations

### Formule de Cauchy et règle de l'Hôpital

**1318.** Ecrire la formule de Cauchy pour les fonctions $f(x) = \sin x$ et $\varphi(x) = \ln x$ dans l'intervalle $[a, b]$, $0 < a < b$.

**1319.** Ecrire la formule de Cauchy pour les fonctions $f(x) = e^{2x}$ et $\varphi(x) = 1 + e^x$ dans l'intervalle $[a, b]$.

**1320.** Vérifier que la formule de Cauchy s'applique aux fonctions $f(x) = x^3$ et $\varphi(x) = x^2 + 1$ dans l'intervalle $[1, 2]$.

**1321.** Vérifier que la formule de Cauchy s'applique aux fonctions $f(x) = \sin x$ et $\varphi(x) = x + \cos x$ dans l'intervalle $[0, \pi/2]$.

**1322.** Montrer que si dans l'intervalle $[a, b]$ l'on a la relation $|f'(x)| \geqslant |\varphi'(x)|$ et $\varphi'(x)$ ne s'annule en aucun point, alors est également vraie la relation $|\Delta f(x) \geqslant |\Delta f(x)|$, où $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$, $\Delta\varphi(x) = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)$, $x$ et $x + \Delta x$ étant des points arbitraires de l'intervalle $[a, b]$.

**1323.** Montrer que dans l'intervalle $[x, 1/2]$ $(x \geqslant 0)$ l'accroissement de la fonction $y = \ln(1 + x^2)$ est inférieur à celui de la fonction $y = \operatorname{arctg} x$ et inversement dans l'intervalle $[1/2, x]$, i.e. $\Delta \operatorname{arctg} x < \Delta \ln(1 + x^2)$. En déduire que dans l'intervalle $[1/2, 1]$

$$\operatorname{arctg} x - \ln(1 + x^2) \geqslant \frac{\pi}{4} - \ln 2.$$

Trouver les limites.

1324. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$.

1325. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x}$.

1326. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}$.

1327. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-\cos\alpha x}{e^{\beta x}-\cos\beta x}$.

1328. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

1329. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{a\sqrt{x}}-1}{\sqrt{\sin bx}}$.

1330. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg} x}$.

1331. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg} x}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$.

1332. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$.

1333. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{c^x-d^x}$.

1334. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$.

1335. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x\cos x}$.

1336. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x\sqrt{1-x^2}}$.

1337. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$.

1338. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

1339. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg} x}-e^x}{\operatorname{tg} x-x}$.

1340. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^2}{2}-x-1}{\cos x+\dfrac{x^2}{2}-1}$.

1341. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^6 2x}$.

1342. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)^4-4x+2x^2-\dfrac{4}{3}x^3+x^4}{6\sin x-6x+x^3}$.

1343. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$.

1344. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\ln\sin x}$.

1345. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1-x)+\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}}{\operatorname{ctg}\pi x}$.

1346. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^n e^{-x})$.

1347. $\lim\limits_{x\to\infty}[(\pi-2\operatorname{arctg} x)\ln x]$.

1348. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\sin\dfrac{a}{x}\right]$.

1349. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right]$.

1350. $\lim\limits_{\varphi\to a}\left[(a^2-\varphi^2)\operatorname{tg}\dfrac{\pi\varphi}{2a}\right]$.

1351. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$.

1352. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x-\dfrac{1}{x}\right)$.

1353. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi x}{2}\ln(1-x)}$.

1354. $\lim\limits_{x\to\infty}[\sqrt[3]{(a+x)(b+x)(c+x)}-x]$.

1355. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\right]$.

1356. $\lim\limits_{x\to 0}\left[x^2 e^{\frac{1}{x^2}}\right]$.

1357. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$.

1358. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$.

1359. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$.

1360. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

1361. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}$.

1362. $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$.

1363. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$.

1364. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)^{1+x}}{x^2}-\frac{1}{x}\right]$.

1365. Montrer qu'existe $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$, mais qu'elle ne peut être calculée avec la règle de l'Hôpital.

1366. Comparer les fonctions $a^x x^a$ et $x^x$ (lorsque $x$ est suffisamment grand).

1367. Comparer les fonctions $f(x)$ et $\ln f(x)$ pour de grandes valeurs de $x$ sous réserve que $f(x)\to\infty$ lorsque $x\to\infty$.

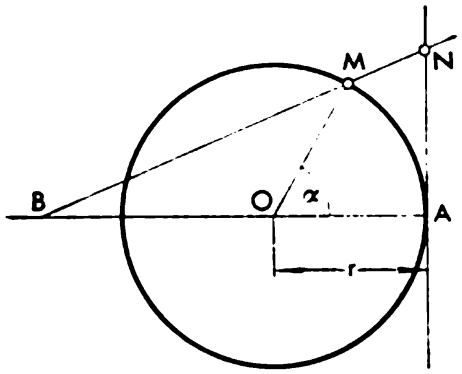

Fig. 34

1368. Soit $x\to 0$. Montrer que $e-\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}$ est un infiniment petit de premier ordre par rapport à $x$.

1369. Soit $x\to 0$. Montrer que $\ln(1+x)-e\ln(e+x)$ est un infiniment petit de deuxième ordre par rapport à $x$.

1370. Sur la tangente au point $A$ d'un cercle de rayon $r$ (fig. 34) on porte un segment $AN$ égal à la longueur de l'arc $AM$. La droite $MN$ coupe le prolongement du diamètre $AO$ au point $B$. Démontrer que

$$OB=\frac{r(\alpha\cos\alpha-\sin\alpha)}{\sin\alpha-\alpha},$$

où $\alpha$ est la mesure en radians de l'angle au centre interceptant l'arc $AM$, et que $\lim\limits_{\alpha\to 0} OB=2r$.

## Variation asymptotique des fonctions et asymptotes

1371. Déduire de la définition de l'asymptote que la droite $y=2x+1$ l'est pour la courbe $y=\frac{2x^4+x^3+1}{x^3}$.

1372. Déduire de la définition de l'asymptote que la droite $x+y=0$ l'est pour la courbe $x^2y+xy^2=1$.

1373. Montrer que les courbes $y=\sqrt[3]{x^3+3x^2}$ et $y=\frac{x^2}{x-1}$ se rapprochent asymptotiquement l'une de l'autre lorsque $x \to \pm\infty$.

1374. Montrer que les fonctions

$$f(x)=\sqrt{x^6+2x^4+7x^2+1} \text{ et } \varphi(x)=x^3+x$$

sont asymptotiquement égales lorsque $x \to \infty$. Appliquer ce résulta au calcul approché de $f(115)$ et $f(120)$. Calculer l'erreur commise en posant $f(100) = \varphi(100)$.

Trouver les asymptotes des courbes données.

1375. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

1376. $xy=a$.

1377. $y=\frac{1}{x^2-4x+5}$.

1378. $y=c+\frac{a^3}{(x-b)^2}$.

1379. $2y(x+1)^2=x^3$.

1380. $y^3=a^3-x^3$.

1381. $y^3=6x^2+x^3$.

1382. $y^2(x^2+1)=x^2(x^2-1)$.

1383. $xy^2+x^2y=a^3$.

1384. $y(x^2-3bx+2b^2)=x^3-3ax^2+a^3$.

1385. $(y+x+1)^2=x^2+1$.

1386. $y=x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)$.

1387. $y=xe^x$.

1388. $y=xe^{\frac{2}{x}}+1$.

1389. $y=x\operatorname{arcsec} x$.

1390. $y=2x+\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$.

1391. $y=\frac{xf(x)+a}{f(x)}$, où $f(x)$ est un polynôme $(a \neq 0)$.

1392. Une courbe est définie par les équations paramétriques $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Montrer que les asymptotes non parallèles aux axes de coordonnées ne peuvent exister que pour les valeurs de $t = t_0$ telles que l'on ait simultanément

$$\lim_{t\to t_0}\varphi(t)=\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t\to t_0}\psi(t)=\infty.$$

Ceci étant, si l'équation de l'asymptote est $y = ax + b$, alors

$$a=\lim_{t\to t_0}\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}, \quad b=\lim_{t\to t_0}[\psi(t)-a\varphi(t)].$$

Trouver les asymptotes parallèles aux axes de coordonnées.

1393. Trouver les asymptotes de la courbe: $x=\frac{1}{t}$, $y=\frac{t}{t+1}$.

1394. Trouver les asymptotes de la courbe $x=\frac{2e^t}{t-1}$, $y=\frac{te^t}{t-1}$.

1395. Trouver les asymptotes de la courbe $x=\frac{2t}{1-t^2}$, $y=\frac{t^2}{1-t^2}$.

1396. Trouver les asymptotes du folium de Descartes: $x=\frac{3at}{1+t^3}$, $y=\frac{3at^2}{1+t^3}$.

1397. Trouver les asymptotes de la courbe: $x=\frac{t-8}{t^2-4}$, $y=$ $=\frac{3}{t(t^2-4)}$.

## Etude générale des fonctions et des courbes

Procéder à une étude complète des fonctions données et construire leurs graphes.

1398. $y=\frac{x}{1+x^2}$.

1399. $y=\frac{1}{1-x^2}$.

1400. $y=\frac{x}{x^2-1}$.

1401. $y=(x-1)(x-2)(x-3)=1$.

1402. $y=\frac{x^2}{x^2-1}$.

1403. $y=(x^2-1)^3$.

1404. $y=32x^2(x^2-1)^3$.

1405. $y=\frac{1}{x}+4x^2$.

1406. $y=x^2+\frac{1}{x^2}$.

1407. $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$.

1408. $y=\frac{x^3}{3-x^2}$.

1409. $y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$.

1410. $y(x-1)=x^3$.

1411. $y(x^3-1)=x^4$.

1412. $y=\frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$.

1413. $y=\frac{x^3+2x^2+7x-3}{2x^2}$.

1414. $xy=(x^2-1)(x-2)$.

1415. $(y-x)x^4+8=0$.

1416. $y=\frac{x}{e^x}$.

1417. $y=x^2e^{-x}$.

1418. $y=\frac{e^x}{x}$.

1419. $y=x-\ln(x+1)$.

1420. $y=\ln(x^2+1)$.

1421. $y=x^2e^{-x^2}$.

1422. $y=x^3e^{-x}$.

1423. $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

1424. $y=\frac{1}{e^x-1}$.

1425. $y=x+\frac{\ln x}{x}$.

1426. $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

1427. $y=x+\sin x$.

1428. $y=x\sin x$.

1429. $y=\ln\cos x$.

1430. $y=\cos x-\ln\cos x$.

1431. $y=x-2\operatorname{arctg} x$.

1432. $y=e^{\frac{1}{x^2-4x+3}}$ (sans chercher les points d'inflexion).

1433. $y=e^{\sin x}-\sin x$ (sans chercher les points d'inflexion).

1434. $y=\sqrt[3]{x^2}-x$.

1435. $y^3=x^2(x^2-4)^3$.

1436. $(3y+x)^3=27x$.

1437. $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{x^2}=1$.

1438. $y=(x-1)^{\frac{2}{3}}(x+1)^3$.

1439. $y^3=6x^2-x^3$.

1440. $(y-x)^2=x^5$. 1441. $(y-x^2)^2=x^5$.

1442. $y^2=x^3+1$. 1443. $y^2=x^3-x$.

1444. $y^2=x(x-1)^2$. 1445. $y^2=x^2(x-1)$.

1446. $y^2=\frac{x^3-2}{3x}$. 1447. $x^2y+xy^2=2$.

1448. $y^2=x^2\frac{a+x}{a-x}$ (strophoïde) $(a>0)$.

1449. $9y^2=4x^3-x^4$. 1450. $25y^2=x^2(4-x^2)^3$.

1451. $y^2=x^2-x^4$. 1452. $x^2y^2=4(x-1)$.

1453. $y^2(2a-x)=x^3$ (cissoïde) $(a>0)$.

1454. $x^2y^2=(x-1)(x-2)$.

1455. $x^2y^2=(a+x)^3(a-x)$ (conchoïde) $(a>0)$.

1456. $16y^2=(x^2-4)^2(1-x^2)$.

1457. $y^2=(1-x^2)^3$. 1458. $y^2x^4=(x^2-1)^3$.

1459. $y^2=2exe^{-2x}$. 1460. $y=e^{\frac{1}{x}}-x$.

1461. $y=e^{\operatorname{tg} x}$. 1462. $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, $f(0)=1$.

1463. $x=1-xe^{-\frac{1}{|x|}-\frac{1}{x}}$ pour $x\neq 0$, $y=1$ pour $x=0$.

1464. $y=x^2-4|x|+3$.

Etudier les fonctions définies paramétriquement et construire leurs graphes.

1465. $x=t^3+3t+1$, $y=t^3-3t+1$.

1466. $x=t^3-3\pi$, $y=t^3-6\operatorname{arctg} t$.

1467. $x=\frac{3t}{1+t^3}$, $y=\frac{3t^2}{1+t^3}$.

1468. $x=te^t$, $y=te^{-t}$.

1469. $x=2a\cos t-a\cos 2t$, $y=2a\sin t-a\sin 2t$ (cardioïde).

Etudier les courbes définies en coordonnées polaires (voir note de la page 31).

1470. $\rho=a\sin 3\varphi$ (rose à trois branches).

1471. $\rho=a\operatorname{tg}\varphi$. 1472. $\rho=a(1+\operatorname{tg}\varphi)$.

1473. $\rho=a(1+\cos\varphi)$ (cardioïde).

1474. $\rho=a(1+b\cos\varphi)$ $(a>0,\ b>1)$.

1475. $\rho=\sqrt{\frac{\pi}{\varphi}}$ (sceptre). 1476. $\rho=\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\varphi}{\pi}$.

1477. $\rho=\sqrt{1-t^2}$, $\varphi=\arcsin t+\sqrt{1-t^2}$.

Etudier et construire les graphes des fonctions suivantes en les ramenant préalablement à un système de coordonnées polaires.

1478. $(x^2+y^2)^3=4a^2x^2y^2$. 1479. $(x^2+y^2)x=a^2y$.

1480. $x^4+y^4=a^2(x^2+y^2)$. 1481. $(x^2+y^2)(x^2-y^2)^2=4x^2y^2$.

**1482.** Montrer que l'équation $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$ possède une racine simple $x_1 = -3$ et une racine double $x_2 = 2$.

**1483.** Montrer que l'équation $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 = 0$ possède deux racines doubles $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$.

**1484.** Montrer que l'équation $x \arcsin x = 0$ possède une seule racine réelle $x = 0$ qui de plus est double.

**1485.** Montrer que les racines de l'équation $x \sin x = 0$ sont de la forme $y = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) et que $k = 0$ correspond à une racine double. Trouver la multiplicité des autres racines.

**1486.** Montrer que l'équation $x^3 - 3x^2 + 6x - 1 = 0$ possède une racine réelle simple unique contenue dans l'intervalle $]0, 1[$ et calculer cette racine à une précision de 0,1 par tâtonnements.

**1487.** Montrer que l'équation $x^4 + 3x^2 - x - 2 = 0$ possède deux (et seulement deux) racines réelles simples comprises respectivement dans les intervalles $]-1, 0[$ et $]0, 1[$. Calculer ces racines avec une précision de 0,1 par la méthode des essais.

**1488.** Montrer que l'équation $f(x) = a \neq 0$, où $f(x)$ est un polynôme à coefficients positifs et de puissances impaires, possède une racine réelle et une seule (qui peut être multiple). Etudier le cas où $a = 0$. Calculer à 0,01 près la racine de l'équation $x^3 + 3x - 1 = 0$ en combinant la méthode des essais et la méthode par parties proportionnelles.

**1489.** Démontrer le théorème suivant : une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $x^3 + px + q = 0$ possède trois racines réelles simples est que les coefficients $p$ et $q$ satisfassent à l'inégalité $4p^3 + 27q^2 < 0$. Trouver à 0,01 près toutes les racines de l'équation $x^3 - 9x + 2 = 0$ en combinant la méthode des essais et la méthode par parties proportionnelles.

**1490.** Montrer que l'équation $x^4 + 2x^2 - 6x + 2 = 0$ possède deux (et seulement deux) racines réelles simples contenues respectivement dans les intervalles $]0, 1[$ et $]1, 2[$. Trouver ces racines à 0,01 près en combinant la méthode des cordes et la méthode de la tangente.

**1491.** Montrer que l'équation $x^5 + 5x + 1 = 0$ possède une seule racine simple contenue dans l'intervalle $]-1, 0[$. Trouver cette racine à 0,01 près en combinant la méthode des cordes et la méthode de la tangente.

Dans les exercices 1492-1497 on cherchera les valeurs approchées des racines en combinant la méthode des essais, la méthode par parties proportionnelles et la méthode d'Euler. (Au besoin on se servira des tables des fonctions intervenant dans les équations).

**1492.** Montrer que l'équation $xe^x = 2$ ne possède qu'une racine réelle qui est contenue dans l'intervalle $]0, 1[$ et la calculer avec une précision de 0,01.

**1493.** Montrer que l'équation $x \ln x = a$ ne possède pas de racines réelles pour $a < -1/e$, possède une racine réelle double pour $a = -1/e$

et deux racines réelles simples pour $-1/e < a < 0$ et, enfin, une racine réelle simple pour $a \geqslant 0$. Calculer la racine de l'équation $x \ln x = 0{,}8$ avec une précision de 0,01.

**1494.** Montrer que l'équation de Kepler $x = \varepsilon \sin x + a$, où $0 < \varepsilon < 1$, possède une racine réelle simple, et calculer cette racine à une précision de 0,001 pour $\varepsilon = 0{,}538$ et $a = 1$.

**1495.** Montrer que l'équation $a^x = ax$ pour $a > 1$ possède deux (et seulement deux) racines réelles et positives dont l'une est égale à 1 et l'autre inférieure, supérieure ou égale à 1 selon que $a$ est plus grand, plus petit ou égal à $e$. Calculer avec une précision de 0,001 la deuxième racine pour $a = 3$.

**1496.** Montrer que l'équation $x^2 \operatorname{arctg} x = a$, où $a \neq 0$, possède une racine réelle. Calculer la racine de cette équation avec une précision de 0,001 pour $a = 1$.

**1497.** Trouver la base $a$ d'un logarithme tel qu'il existe des nombres égaux à leurs logarithmes. Combien existe-t-il de tels nombres? Calculer l'un d'eux (à 0,01 près) pour $a = 1/2$.

## § 5. Formule de Taylor et ses applications

### Formule de Taylor pour les polynômes

**1498.** Développer le polynôme $x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$ suivant les puissances de $x - 4$.

**1499.** Développer le polynôme $x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ suivant les puissances de $x + 1$.

**1500.** Développer le polynôme $x^{10} - 3x^5 + 1$ suivant les puissances de $x - 1$.

**1501.** Développer la fonction $f(x) = (x^2 - 3x + 1)^3$ suivant les puissances de $x$ d'après la formule de Taylor.

**1502.** On donne un polynôme du quatrième degré $f(x)$. Sachant que $f(2) = -1$, $f'(2) = 0$, $f''(2) = 2$, $f'''(2) = -12$, $f^{\mathrm{IV}}(2) = 24$, calculer $f(-1)$, $f'(0)$, $f''(1)$.

### Formule de Taylor

**1503.** Trouver le développement limité d'ordre $n$ de la fonction $y = \frac{1}{x}$ pour $x_0 = -1$.

**1504.** Trouver le développement limité d'ordre $n$ (formule de Maclaurin) de la fonction $y = xe^x$ pour $x_0 = 0$.

**1505.** Trouver le développement limité d'ordre $n$ de la fonction $y = \sqrt{x}$ pour $x_0 = 4$.

**1506.** Trouver le développement limité d'ordre $2n$ de la fonction $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ pour $x_0 = 0$.

**1507.** Trouver le développement limité d'ordre $n$ de la fonction $y = x^3 \ln x$ pour $x_0 = 1$.

**1508.** Trouver le développement limité d'ordre $2n$ de la fonction $y = \sin^2 x$ pour $x_0 = 0$.

**1509.** Trouver le développement limité d'ordre 3 de la fonction $y = \frac{x}{x-1}$ pour $x_0 = 2$ et construire les graphes de la fonction donnée et du polynôme de Taylor du troisième degré.

**1510.** Trouver le développement d'ordre 2 de la fonction $y = \operatorname{tg} x$ pour $x_0 = 0$ et construire les graphes de la fonction donnée et de son polynôme de Taylor du second degré.

**1511.** Trouver le développement limité d'ordre 3 de la fonction $y = \arcsin x$ pour $x_0 = 0$ et construire les graphes de la fonction donnée et de son polynôme de Taylor du troisième degré.

**1512.** Trouver le développement limité d'ordre 3 de la fonction $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ pour $x_0 = 1$ et construire les graphes de la fonction donnée et de son polynôme de Taylor du troisième degré.

**1513*.** Montrer que le nombre $\theta$ du reste du développement limité d'ordre 1

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a+\theta h)$$

tend vers 1/3 lorsque $h \to 0$ si $f'''(x)$ est continue pour $x = a$ et $f'''(a) \neq 0$.

## Quelques applications de la formule de Taylor

Etudier le comportement des fonctions données aux points indiqués.

**1514.** $y = 2x^6 - x^3 + 3$ au point $x = 0$.

**1515.** $y = x^{11} + 3x^6 + 1$ au point $x = 0$.

**1516.** $y = 2\cos x + x^2$ au point $x = 0$.

**1517.** $y = 6\ln x - 2x^3 + 9x^2 - 18x$ au point $x = 1$.

**1518.** $y = 6\sin x + x^2$ au point $x = 0$.

**1519.** $y = 24e^x - 24x - 12x^2 - 4x^3 - x^4 - 20$ au point $x = 0$.

**1520.** $f(x) = x^{10} - 3x^6 + x^2 + 2$. Trouver les trois premiers termes du développement limité pour $x_0 = 1$. Evaluer approximativement $f(1,03)$.

**1521.** $f(x) = x^8 - 2x^7 + 5x^6 - x + 3$. Trouver les trois premiers termes du développement limité pour $x_0 = 2$. Evaluer approximativement $f(2,02)$ et $f(1,97)$.

**1522.** $f(x) = x^{80} - x^{40} + x^{20}$. Trouver les trois premiers termes du développement limité de $f(x)$ suivant les puissances de $x - 1$ et évaluer approximativement $f(1,005)$.

**1523.** On considère la fonction $f(x) = x^5 - 5x^3 + x$. Trouver les trois premiers termes du développement limité suivant les puissances de $x - 2$. Calculer $f(2,1)$ approximativement et exactement, puis trouver les erreurs absolue et relative.

**1524.** Vérifier que lorsqu'on calcule la fonction $e^x$ pour $0 < x \leqslant \leqslant 1/2$ par la formule approchée

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6},$$

l'erreur commise est inférieure à 0,01. Se servir de cette formule pour calculer $\sqrt{e}$ à trois décimales vraies.

**1525.** Appliquer la formule approchée $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$ au calcul de $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ et évaluer l'erreur.

**1526.** Vérifier que si l'on calcule le sinus des angles inférieurs à 28° au moyen de la formule $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ on commet une erreur inférieure à 0,000001. Appliquer cette formule au calcul de sin 20° à six décimales vraies.

**1527.** Calculer cos 10° avec une précision de 0,001. S'assurer que cette précision est garantie par un développement limité d'ordre 2.

**1528.** Appliquer la formule approchée

$$\ln(1 + x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4},$$

au calcul de ln 1,5 et évaluer l'erreur.

## § 6. Courbure

Trouver la courbure des courbes données.

**1529.** L'hyperbole $xy = 4$ au point (2,2).

**1530.** L'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en ses sommets.

**1531.** La courbe $y = x^4 - 4x^3 - 18x^2$ à l'origine des coordonnées.

**1532.** La courbe $y^2 = 8x$ au point (9/8, 3).

**1533.** $y = \ln x$ au point (1, 0).

**1534.** $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ à l'origine des coordonnées.

**1535.** $y = \sin x$ aux points d'extrémums.

**1536.** Le folium de Descartes $x^3 + y^3 = 3axy$ au point $(3/2a, 3/2a)$.

Trouver la courbure des courbes données en un point quelconque $(x, y)$.

**1537.** $y = x^3$. **1538.** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. **1539.** $y = \ln \sec x$.

**1540.** $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. **1541.** $\frac{x^m}{a^m} + \frac{y^m}{b^m} = 1$. **1542.** $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$.

Trouver la courbure des courbes données.

**1543.** $x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$ pour $t = 1$.

**1544.** $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ pour $t = t_1$.

1545. $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ pour $t = \frac{\pi}{2}$.

1546. $x = 2a \cos t - a \cos 2t$, $y = 2a \sin t - a \sin 2t$ en un point quelconque.

1547. $\rho = a^{\varphi}$ au point $\rho = 1$, $\varphi = 0$.

1548. $\rho = a\varphi$ en un point quelconque.

1549. $\rho = a\varphi^k$ en un point quelconque.

1550. Calculer le rayon de courbure de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ au point où le segment de tangente compris entre les axes de coordonnées est partagé en deux par le point de contact.

1551. Montrer que le rayon de courbure de la parabole est égal au double du segment de normale d'extrémités les points d'intersection de la normale avec la parabole et sa directrice.

1552. Montrer que le rayon de courbure de la cycloïde en l'un quelconque de ses points est deux fois plus grand que la normale en ce point.

1553. Montrer que le rayon de courbure de la lemniscate $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ est inversement proportionnel au rayon polaire correspondant.

1554. Trouver le cercle de courbure de la parabole $y = x^2$ au point $(1, 1)$.

1555. Trouver le cercle de courbure de l'hyperbole $xy = 1$ au point $(1, 1)$.

1556. Trouver le cercle de courbure de la courbe $y = e^x$ au point $(0, 1)$.

1557. Trouver le cercle de courbure de la courbe $y = \operatorname{tg} x$ au point $(\pi/4, 1)$.

1558. Trouver le cercle de courbure de la cissoïde $(x^2 + y^2)x - 2ay^2 = 0$ au point $(a, a)$.

Trouver les sommets (i.e. les points en lesquels la courbure prend sa valeur extrémale) des courbes.

1559. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$. 1560. $y = \ln x$. 1561. $y = e^x$.

1562. $x = a(3 \cos t + \cos 3t)$, $y = a(3 \sin t + \sin 3t)$.

1563. Trouver la valeur maximale du rayon de courbure de la courbe $\rho = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$.

1564. Montrer que la courbure de la courbe $y = f(x)$ au point $P$ est égale à $|y'' \cos^3 \alpha|$, où $\alpha$ est l'angle formé par la direction positive de l'axe des abscisses et la tangente à la courbe en $P$.

1565. Montrer que la courbure d'une courbe en un point arbitraire a pour expression $k = \left|\frac{d \sin \alpha}{dx}\right|$, où $\alpha$ est l'angle de l'exercice précédent.

1566. Une fonction $f(x)$ est définie comme suit: $f(x) = x^3$ dans l'intervalle $-\infty < x \leqslant 1$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ dans l'intervalle $1 < x < \infty$. Déterminer $a$, $b$, $c$ tels que la courbe $y = f(x)$ possède partout une courbure continue.

1567. Soient un arc de cercle $AM$ de rayon 5 centré au point (0, 5) et un segment $BC$ d'extrémités $B$ (1, 3) et $C$ (11, 66) (fig. 35). Joindre les points $M$ et $B$ par un arc de parabole tel que la ligne $AMBC$ possède partout une courbure continue. Trouver l'équation de la parabole cherchée (on prendra une parabole de degré 5).

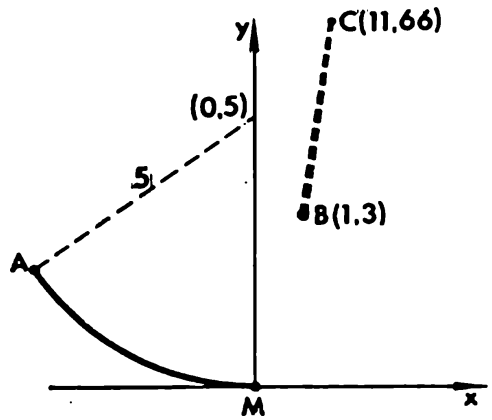


Fig. 35

Trouver les coordonnées du centre de courbure et établir l'équation de la développée des courbes données.

1568. La parabole de degré $n$ $y = x^n$.

1569. L'hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1570. L'astroïde $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

1571. La parabole semi-cubique $y^3 = ax^2$.

1572. La parabole $x = 3t$, $y = t^2 - 6$.

1573. La cissoïde $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$.

1574. La courbe $\begin{cases} x = a(1 + \cos^2 t)\sin t, \\ y = a\sin^2 t \cos t. \end{cases}$

1575. Montrer que la développée de la tractrice

$$x = -a\left(\ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t\right), \quad y = a \sin t$$

est une chaînette.

1576. Montrer que la développée de la spirale logarithmique $\rho = a^{\varphi}$ est une spirale de même nature mais tournée d'un certain angle. Peut-on choisir $a$ de manière que la développée coïncide avec la spirale?

1577. Montrer que les développantes de cercle se déduisent l'une de l'autre par rotation.

1578. Montrer que la distance d'un point quelconque de la cycloïde au centre de courbure de la développée en ce point est égale à $2d$ ($d$ étant le diamètre du cercle).

**1579.** La développée de la parabole $y^2 = 4px$ est la parabole semi-cubique $py^2 = \frac{4}{27}(x - 2p)^3$. Calculer la longueur de l'arc de parabole semi-cubique d'extrémités le sommet et un point $(x, y)$.

**1580.** Calculer la longueur de la développée de l'ellipse dont les demi-axes sont respectivement $a$ et $b$.

**1581.** Montrer que la développée de l'astroïde $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ est une astroïde de dimensions linéaires doubles et tournée de 45°. En déduire la longueur d'arc de l'astroïde donnée.

**1582 *.** Montrer que la développée de la cardioïde

$$x = 2a \cos t - a \cos 2t, \quad y = 2a \sin t - a \sin 2t$$

est une cardioïde identique à la précédente. En déduire la longueur d'arc de toute la cardioïde.

**1583 *.** Démontrer le théorème suivant: si la courbure d'un arc d'une courbe est soit strictement croissante soit strictement décroissante, alors les cercles de courbure associés aux divers points de cet arc ne se coupent pas et sont contenus l'un dans l'autre.

## § 7. Problèmes numériques

**1584.** Calculer le minimum de la fonction $y = x^4 + x^2 + x + 1$ à 0,001 près.

**1585.** Calculer le maximum de la fonction $y = x + \ln x - x^3$ à 0,001 près.

**1586.** Calculer le minimum et le maximum de la fonction $y = x^2 + 3 \cos x$ dans l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ à 0,01 près.

**1587.** Calculer le maximum et le minimum de la fonction $y = x - e^{x^2}$ dans l'intervalle $]0, 2; 0, 5[$ à 0,001 près.

**1588.** Calculer les coordonnées du point d'inflexion de la courbe

$$y = \frac{e^x}{10}(x^3 - 6x^2 + 19x - 30)$$

à 0,01 près.

**1589.** Calculer les coordonnées du point d'inflexion de la courbe

$$y = 6x^2 \ln x + 2x^3 - 9x^2$$

à 0,01 près.

**1590.** Calculer à 0,01 près la courbure de la courbe $y = \frac{1}{x^2}$ en son point d'intersection avec la droite $y = x - 1$.

**1591.** Calculer à 0,01 près les coordonnées du point de la courbe $y = \ln x$ en lequel le rayon de courbure est le triple de l'abscisse de ce point.

# CHAPITRE V

# INTÉGRALE DÉFINIE

## § 1. Intégrale définie et ses propriétés élémentaires

**1592.** Calculer par intégration l'aire de la figure limitée par les courbes suivantes :

1) les axes de coordonnées, la droite $x = 3$ et la parabole $y = x^2 + 1$ ;

2) l'axe des abscisses, les droites $x = a$, $x = b$ et la courbe $y = e^x + 2$ $(b > a)$ ;

3) l'axe des abscisses et l'arc de sinusoïde $y = \sin x$ correspondant à la première demi-période ;

4) les paraboles $y = x^2$ et $y = 8 - x^2$ ;

5) les paraboles $y = x^2$ et $y = \sqrt{x}$ ;

6) les courbes $y = \ln x$ et $y = \ln^2 x$.

**1593.** On considère la figure limitée par l'axe des abscisses et les droites $y = 2x$, $x = 4$, $x = 6$. Calculer l'aire des figures en escalier situées au-dessous et au-dessus de la droite $y = 2x$, obtenues en partageant l'intervalle $[4, 6]$ en parties égales. Vérifier que les deux expressions obtenues tendent vers une même limite $S$ qui est l'aire de la figure, lorsque $n \to \infty$. Trouver les erreurs absolue et relative commises en remplaçant l'aire de la figure donnée par celles des figures en escalier mentionnées.

**1594.** Un trapèze curviligne de base $[2, 3]$ est limité par la parabole $y = x^2$. Trouver l'erreur absolue et l'erreur relative commises en remplaçant l'aire considérée par celle de la figure en escalier située au-dessous de la parabole et obtenue divisant l'intervalle $[2, 3]$ en 10 parties égales.

**1595.** Calculer l'aire de la figure limitée par la parabole $y = x^2/2$, les droites $x = 3$, $x = 6$ et l'axe des abscisses.

**1596.** Calculer l'aire du segment découpé par la droite $y = 2x + 3$ sur la parabole $y = x^2$.

**1597.** Calculer l'aire du segment parabolique de base $a = 10$ cm et de hauteur $h = 6$ cm. (La base est la corde perpendiculaire à l'axe de la parabole, fig. 36).

**1598.** Calculer l'aire de la figure limitée par la parabole $y = x^2 - 4x + 5$, l'axe des abscisses et les droites $x = 3$ et $x = 5$.

**1599.** Calculer l'aire de la figure limitée par les arcs de paraboles $y = \frac{1}{4}x^2$ et $y = 3 - \frac{x^2}{2}$.

**1600.** Calculer l'aire de la figure limitée par les paraboles $y = x^2 - 6x + 10$ et $y = 6x - x^2$.

**1601.** Calculer l'aire comprise entre la parabole $y = x^2 - 2x + 2$, la tangente à cette parabole au point (3, 5) et les axes de coordonnées.

**1602.** Un point matériel se déplace à la vitesse $v = 2t + 4$ cm/s. Calculer le chemin parcouru pendant les 10 premières secondes.

**1603.** La vitesse d'un corps tombant en chute libre est $v = gt$. Calculer le chemin parcouru pendant les 5 premières secondes.

**1604.** La vitesse d'un mouvement est proportionnelle au carré du temps et égale à 1 cm/s à la fin de la quatrième seconde. Calculer le chemin parcouru pendant les 10 premières secondes.

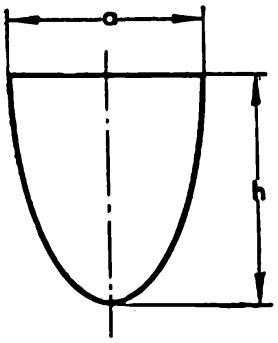

Fig. 36

**1605.** L'on sait que la force qui s'oppose à l'extension d'un ressort est proportionnelle à l'allongement (loi de Hooke). Sachant qu'un travail de 100J est nécessaire pour allonger ce ressort de 4 cm, on demande de calculer le travail nécessité par un allongement de 10 cm.

**1606.** Pour allonger un ressort de 2 cm il faut effectuer un travail de 20 J. De combien s'allongera ce ressort si l'on dépense un travail de 80 J ?

**1607.** La vitesse $v$ de désintégration radio-active est une fonction du temps : $v = v(t)$. Exprimer la quantité $m$ de matière radio-active désintégrée entre les instants $T_0$ et $T_1$ : a) approximativement au moyen d'une somme ; b) exactement au moyen d'une intégrale.

**1608.** La vitesse d'échauffement d'un corps est une fonction donnée du temps : $\psi(t)$. De combien de degrés $\theta$ s'échauffera ce corps entre les instants $T_0$ et $T_1$ ? Exprimer la solution a) approximativement par une somme, b) exactement par une intégrale.

**1609.** Le courant alternatif est une fonction donnée du temps $I = I(t)$. Exprimer (approximativement par une somme et exactement par une intégrale) la quantité $Q$ d'électricité qui traverse la section transversale du fil entre les instants 0 et $T$.

**1610.** La tension $E$ du courant alternatif est une fonction donnée du temps $E = \varphi(t)$ ; l'intensité $I$ du courant est également une fonction donnée du temps : $I = \psi(t)$. Exprimer le travail $A$ effectué par le courant entre les instants $T_0$ et $T_1$ : a) approximativement par une somme, b) exactement par une intégrale.

**1611.** Un circuit électrique est alimenté par une batterie. En 10 mn la tension aux bornes chute uniformément de $E_0 = 60$ V à $E = 40$ V. La résistance du circuit est $R = 20$ ohms. Calculer la quantité de courant qui a traversé le circuit en 10 mn.

**1612.** La tension d'un circuit électrique baisse uniformément à raison de $a = 1{,}5$ V par minute. Sachant que la tension initiale $E_0 = 120$ V et la résistance du circuit $R = 60$ ohms trouver le travail fourni par le courant en 5 mn. On néglige l'inductance et la capacité.

**1613.** Un circuit est mis uniformément sous tension. La tension initiale est nulle. Une minute après elle atteint 120 V. La résistance du circuit est 100 ohms. On néglige l'inductance et la capacité. Calculer le travail fourni par le courant pendant une minute.

**1614.** La paroi rectangulaire d'un aquarium rempli d'eau à ras bord possède une base $a$ et une hauteur $b$. Exprimer la pression $P$ de l'eau sur toute la paroi : a) approximativement par une somme, b) exactement par une intégrale.

**1615.** a) Calculer la pression $P$ exercée par l'eau sur la paroi d'un aquarium plein à ras bord, sachant qu'elle est rectangulaire et que sa base est $a = 60$ cm et sa hauteur $b = 25$ cm. b) Partager la paroi de l'aquarium par une droite horizontale telle que la pression exercée sur les deux régions soit égale.

## Calcul des intégrales par sommation

**1616.** Calculer l'intégrale $\int_0^1 e^x\,dx$ par sommation directe et par passage à la limite. (Partager l'intervalle d'intégration en $n$ parties égales).

**1617.** Calculer l'intégrale $\int_a^b x^k\,dx$, où $k$ est un entier positif, par sommation directe, puis par passage à la limite (partager l'intervalle d'intégration de telle sorte que les abscisses des points de subdivision forment une progression géométrique).

**1618.** Utiliser les formules déduites dans les exercices précédents pour calculer les intégrales :

1) $\int_0^{10} x\,dx$ ; 2) $\int_{a-2}^{a+2} x\,dx$ ; 3) $\int_{\frac{a}{2}}^{a} x^2\,dx$ ; 4) $\int_a^{2a} \frac{b^2x^2}{a^2}\,dx$ ;

5) $\int_0^a (3x^2 - x + 1)\,dx$ ; 6) $\int_0^m \frac{x^2+m^2}{m^2}\,dx$ ; 7) $\int_1^{2,5} (2x+1)^2\,dx$ ;

8) $\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx$ ; 9) $\int_{-a}^0 \frac{(a+x)^2}{a}\,dx$ ; 10) $\int_0^1 \left(\frac{ax-b}{a-b}\right)^2 dx$ ;

11) $\int_0^2 x^3\,dx$ ; 12) $\int_1^3 \frac{x^4}{3}\,dx$ ; 13) $\int_0^1 \left(\frac{x^5}{7} - \frac{x^6}{6}\right) dx$.

**1619*.** Trouver $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}\right)$ pour $k>0$. Calculer approximativement $1^5+2^5+\ldots+100^5$.

**1620.** Calculer l'intégrale $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$ par sommation directe, puis par passage à la limite. (Partager l'intervalle d'intégration de telle sorte que les abscisses des points de subdivision forment une progression géométrique.)

**1621.** Former la somme intégrale de l'intégrale $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$ en partageant l'intervalle d'intégration en $n$ parties égales. Comparer avec le résultat de l'exercice précédent et calculer:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right).$$

**1622*.** Calculer $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{an}\right)$ ($a$ est entier). Calculer approximativement $\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\ldots+\frac{1}{300}\right)$.

**1623*.** Calculer les intégrales

$$1)\ \int\limits_0^a xe^x\,dx;\quad 2)\ \int\limits_1^a \ln x\,dx;\quad 3)\ \int\limits_a^b \frac{\ln x}{x}\,dx$$

par sommation directe, puis par passage à la limite. [Dans 1) partager l'intervalle d'intégration en parties égales, dans 2) et 3) comme dans l'exercice 1620.]

## § 2. Propriétés fondamentales de l'intégrale définie

### Interprétation géométrique de l'intégrale définie

**1624.** Exprimer par une intégrale l'aire de la figure délimitée par l'arc de sinusoïde correspondant à l'intervalle $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ et l'axe des abscisses.

**1625.** Calculer l'aire de la figure limitée par la parabole cubique $y=x^3$ et la droite $y=x$.

**1626.** Calculer l'aire de la figure limitée par les paraboles $y=x^2-2x-3$ et $y=-x^2+6x-3$.

**1627.** Calculer l'aire de la figure limitée par les courbes $y=x^3-x$ et $y=x^4-1$.

**1628.** Montrer que l'intégrale $\int\limits_0^{10} \frac{x\,dx}{x^3+16}$ est $<5/6$.

**1629.** Montrer que $\frac{2}{\sqrt[4]{e}} < \int\limits_0^2 e^{x^2-x}\,dx < 2e^2$.

Evaluer les intégrales.

**1630.** $\int\limits_{1,5}^{3,5} \frac{x^2\,dx}{x-1}$.

**1631.** $\int\limits_0^2 \frac{x^2+5}{x^2+2}\,dx$.

**1632.** $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (1+\sin^2 x)\,dx$,

**1633.** $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{x}{1+x^2}\,dx$.

**1634.** $\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x\,dx$.

**1635.** $\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e} x^2 e^{-x^2}\,dx$.

**1636.** Indiquer (sans les calculer) laquelle des intégrales est la plus grande :

1) $\int\limits_0^1 x^2\,dx$ ou $\int\limits_0^1 x^3\,dx$ ? 2) $\int\limits_1^2 x^2\,dx$ ou $\int\limits_1^2 x^3\,dx$ ?

**1637.** Indiquer (sans les calculer) laquelle des intégrales est la plus grande :

1) $\int\limits_0^1 2^{x^2}\,dx$ ou $\int\limits_0^1 2^{x^3}dx$ ? 2) $\int\limits_1^2 2^{x^2}\,dx$ ou $\int\limits_1^2 2^{x^3}dx$ ?

3) $\int\limits_1^2 \ln x\,dx$ ou $\int\limits_1^2 (\ln x)^2\,dx$ ? 4) $\int\limits_3^4 \ln x\,dx$ ou $\int\limits_3^4 (\ln x)^2\,dx$ ?

**1638.** Montrer que $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx < \frac{\sqrt{5}}{2}$ en appliquant l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski

$$\left|\int\limits_a^b f_1(x)\,f_2(x)\,dx\right| \leqslant \sqrt{\int\limits_a^b [f_1(x)]^2\,dx}\,\sqrt{\int\limits_a^b [f_2(x)]^2\,dx}.$$

Vérifier que la règle générale donne une évaluation moins précise.

**1639.** Montrer par des raisonnements géométriques que

a) si la fonction $f(x)$ croît dans $[a, b]$ et est concave, alors

$$(b-a)f(a) < \int_a^b f(x)\,dx < (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2};$$

b) si la fonction $f(x)$ est croissante dans l'intervalle $[a, b]$ et y est convexe, alors

$$(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} < \int_a^b f(x)\,dx < (b-a)f(b).$$

**1640.** Evaluer l'intégrale $\int_2^3 \frac{x^2\,dx}{1+x^2}$ en utilisant le résultat de l'exercice 1639.

**1641.** Evaluer l'intégrale $\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx$ en utilisant:

a) le théorème fondamental de l'évaluation d'une intégrale,
b) le résultat de l'exercice 1639,
c) l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski (cf. exercice 1638).

### Valeur moyenne d'une fonction

**1642.** Calculer la valeur moyenne de la fonction linéaire $y = kx + b$ dans l'intervalle $[x_1, x_2]$. Trouver le point en lequel la fonction prend cette valeur.

**1643.** Calculer la valeur moyenne de la fonction $y = ax^2$ dans l'intervalle $[x_1, x_2]$. En combien de points de l'intervalle la fonction prend-elle cette valeur?

**1644.** Calculer la valeur moyenne de la fonction $y = 2x^2 + 3x + 3$ dans l'intervalle $[1, 4]$.

**1645.** Calculer géométriquement la valeur moyenne de la fonction $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ dans l'intervalle $[-a, a]$.

**1646.** Etablir géométriquement la valeur moyenne d'une fonction continue impaire dans l'intervalle symétrique par rapport à l'origine des coordonnées.

**1647.** La section d'une auge a la forme d'un segment parabolique de base $a = 1$ m et de profondeur $h = 1{,}5$ m (voir fig. 36, p. 112). Trouver sa profondeur moyenne.

**1648.** La tension d'un circuit électrique passe uniformément en l'espace d'une minute de $E_0 = 100$ V à $E_1 = 120$ V. Calculer l'intensité moyenne du courant pendant cet intervalle de temps. La résistance est égale à 10 ohms.

**1649.** La tension d'un circuit électrique chute uniformément à raison de 0,4 V par minute. Sachant que la tension initiale est de 100 V, la résistance de 5 ohms calculer la puissance du courant pendant la première heure de travail.

## Intégrales à limites variables

**1650.** Calculer les intégrales à limite supérieure variable.

1) $\int_0^x x^2\,dx$; 2) $\int_a^x x^5\,dx$; 3) $\int_1^x \left(\frac{x^3}{5}-\frac{x^4}{4}\right)dx$.

**1651.** La vitesse du mouvement d'un corps est proportionnelle au carré du temps. Exprimer l'espace $s$ parcouru en fonction du temps $t$, sachant que pendant les trois premières secondes le corps a parcouru 18 cm et qu'il est parti à l'instant $t = 0$.

**1652.** Un point matériel est soumis à l'action d'une force qui varie uniformément en fonction de l'espace parcouru. De 100 N au départ elle atteint 600 N après 10 m de parcours. Exprimer le travail en fonction de l'espace parcouru.

**1653.** La tension d'un circuit électrique varie uniformément. Pour $t = t_1$ elle est égale à $E_1$, pour $t = t_2$, à $E_2$. La résistance $R$ est constante, l'auto-induction et la capacité sont négligées. Exprimer le travail du courant en fonction du temps $t$ écoulé depuis le début de l'expérience.

**1654.** La capacité calorifique d'un corps est liée à la température $t$ par la relation : $c = c_0 + \alpha t + \beta t^2$. Exprimer en fonction de $t$ la quantité de chaleur reçue par le corps lorsque sa température s'élève de 0° à $t$°.

**1655.** Un trapèze curviligne est limité par la parabole $y = x^2$, l'axe des abscisses et une ordonnée courante. Calculer l'accroissement $\Delta S$ et la différentielle $dS$ de l'aire du trapèze pour $x = 10$ et $\Delta x = 0{,}1$.

**1656.** Un trapèze curviligne est limité par la courbe $y = \sqrt{x^2+16}$, les axes de coordonnées et une ordonnée courante. Calculer la différentielle $dS$ de l'aire du trapèze pour $x = 3$ et $\Delta x = 0{,}2$.

**1657.** Un trapèze curviligne est limité par la courbe $y = x^3$, l'axe des abscisses et une ordonnée courante. Calculer l'accroissement $\Delta S$ de l'aire, sa différentielle $dS$, les erreurs absolue ($\alpha$) et relative $\left(\delta = \frac{\alpha}{\Delta S}\right)$ commises en remplaçant $\Delta S$ par $dS$ pour $x = 4$ et $\Delta x = 1$; 0,1 et 0,01.

**1658.** Trouver la dérivée de la fonction

$$y = \int_0^x \frac{1-t+t^2}{1+t+t^2}\,dt \text{ pour } x = 1.$$

**1659.** Trouver la dérivée de la fonction

$$y = \int_0^x \sin x\,dx \text{ pour } x = 0,\ x = \frac{\pi}{4} \text{ et } x = \frac{\pi}{2}.$$

**1660.** Calculer la dérivée d'une intégrale de limite inférieure variable et de limite supérieure constante par rapport à la limite inférieure.

**1661.** Calculer la dérivée de la fonction $y=\int\limits_x^5 \sqrt{1+x^2}\,dx$ pour $x=0$ et $x=\frac{3}{4}$.

**1662.** Calculer la dérivée par rapport à $x$ de la fonction $y=$ $=\int\limits_0^{2x} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

**1663.** Dériver par rapport à $x$ les fonctions

$$1)\ \int\limits_2^{e^x} \frac{\ln z}{z}\,dz;\quad 2)\ \int\limits_{x^2}^{1} \ln x\,dx.$$

**1664*.** Dériver par rapport à $x$ la fonction $\int\limits_x^{2x} \ln^2 x\,dx$.

**1665.** Dériver par rapport à $x$ la fonction implicite

$$\int\limits_0^y e^t\,dt+\int\limits_0^x \cos t\,dt=0.$$

**1666.** Dériver par rapport à $x$ la fonction $y$ définie par les équations paramétriques

$$1)\ x=\int\limits_0^t \sin t\,dt,\ \ y=\int\limits_0^t \cos t\,dt;\quad 2)\ x=\int\limits_1^{t^2} t\ln t\,dt,\ \ y=\int\limits_{t^2}^{1} t^2\ln t\,dt.$$

**1667.** Calculer la dérivée seconde par rapport à $z$ de la fonction

$$y=\int\limits_0^{z^2} \frac{dx}{1+x^3}\quad \text{pour}\quad z=1.$$

**1668.** Pour quelle valeur de $x$ la fonction $l(x)=\int\limits_0^x xe^{-x^2}\,dx$ admet-elle un extrémum? Evaluer cet extrémum.

**1669.** Calculer la courbure au point (0, 0) de la courbe donnée par l'équation

$$y=\int\limits_0^x (1+t)\ln(1+t)\,dt.$$

**1670.** Trouver les points d'extrémum et les points d'inflexion du graphe de la fonction $y = \int_0^x (x^2 - 3x + 2)\,dx$. Construire le graphe de cette fonction.

**1671.** Retrouver les graphes des primitives d'après les graphes des fonctions représentés sur la fig. 37 et 38.

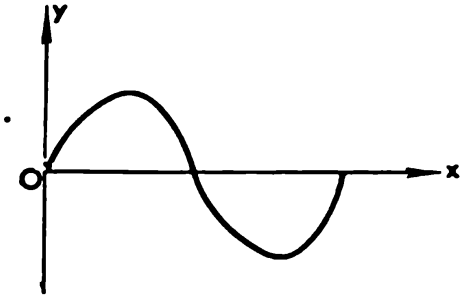


Fig. 37

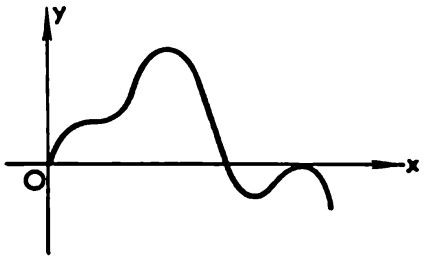


Fig. 38

## Formules de Newton-Leibniz

**1672.** Calculer les intégrales:

1) $\int_1^4 \frac{dx}{x^2}$; 2) $\int_4^1 \frac{dx}{x^3}$; 3) $\int_1^9 3\sqrt{x}\,dx$; 4) $\int_1^2 \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$;

5) $\int_4^9 \sqrt{x}(1+\sqrt{x})\,dx$; 6) $\int_1^2 (\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})\,dx$; 7) $\int_a^{2a} \frac{dx}{\sqrt{2ax}}$;

8) $\int_1^4 \frac{1+t}{\sqrt{t}}\,dt$; 9) $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}}$ $(a>0,\ b>0)$; 10) $\int_{z_0}^{z_1} (\sqrt{z}-1)^2\,dz$.

**1673.** Calculer les intégrales

1) $\int_0^\pi \sin x\,dx$; 2) $\int_0^\pi \cos x\,dx$

(interpréter géométriquement le résultat obtenu)

3) $\int_0^3 e^x\,dx$; 4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,dx$; 5) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$; 6) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

**1674.** Une fonction $f(x)$ admettant une dérivée continue prend les mêmes valeurs aux points $x = a$ et $x = b$. Calculer $\int_a^b f'(x)\,dx$.

**1675.** La tangente au graphe de la fonction $y = f(x)$ au point d'abscisse $x = a$ fait avec l'axe des abscisses un angle de $\frac{\pi}{3}$ et au point d'abscisse $x = b$ un angle de $\frac{\pi}{4}$. Calculer $\int_a^b f''(x)\,dx$ et $\int_a^b f'(x)\,f''(x)\,dx$; $f''(x)$ est supposée continue.

# CHAPITRE VI

# INTÉGRALE INDÉFINIE. CALCUL INTÉGRAL

## § 1. Méthodes élémentaires d'intégration

Calculer les intégrales. (Se servir de la table des intégrales et des règles élémentaires d'intégration.)

1676. $\int \sqrt{x}\,dx$. 1677. $\int \sqrt[m]{x^n}\,dx$. 1678. $\int \frac{dx}{x^2}$.

1679. $\int 10^x\,dx$. 1680. $\int a^x e^x\,dx$. 1681. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}}$.

1682. $\int \frac{dh}{\sqrt{2gh}}$. 1683. $\int 3{,}4x^{-0{,}17}\,dx$. 1684. $\int (1-2u)\,du$.

1685. $\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)\,dx$. 1686. $\int \frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}\,dx$.

1687. $\int (2x^{-1{,}2}+3x^{-0{,}8}-5^{0{,}38})\,dx$.

1688. $\int \left(\frac{1-z}{z}\right)^2 dz$. 1689. $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}\,dx$.

1690. $\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt[3]{x}}\,dx$. 1691. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}\,dx$.

1692. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-3x^2}}$. 1693. $\int \frac{3\cdot 2^x-2\cdot 3^x}{2^x}\,dx$.

1694. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\,dx$. 1695. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}\,dx$.

1696. $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$. 1697. $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$.

1698. $\int 2\sin^2\frac{x}{2}\,dx$. 1699. $\int \frac{(1+2x^2)\,dx}{x^2(1+x^2)}$.

1700. $\int \frac{(1+x)^2\,dx}{x(1+x^2)}$. 1701. $\int \frac{dx}{\cos 2x+\sin^2 x}$.

1702. $\int (\arcsin x+\arccos x)\,dx$.

Calculer les intégrales. (Se servir du théorème relatif à l'invariance des formules d'intégration.)

1703. $\int \sin x \, d(\sin x)$.

1704. $\int \operatorname{tg}^3 x \, d(\operatorname{tg} x)$.

1705. $\int \frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}$.

1706. $\int (x+1)^{15} dx$.

1707. $\int \frac{dx}{(2x-3)^5}$.

1708. $\int \frac{dx}{(a+bx)^c} \, (c \neq 1)$.

1709. $\int \sqrt[5]{(8-3x)^6} \, dx$.

1710. $\int \sqrt{8-2x} \, dx$.

1711. $\int \frac{m}{\sqrt[3]{(a+bx)^2}} dx$.

1712. $\int 2x \sqrt{x^2+1} \, dx$.

1713. $\int x \sqrt{1-x^2} \, dx$.

1714. $\int x^2 \sqrt[5]{x^3+2} \, dx$.

1715. $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

1716. $\int \frac{x^4 \, dx}{\sqrt{4+x^5}}$.

1717. $\int \frac{x^3 \, dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$.

1718. $\int \frac{(6x-5) \, dx}{2\sqrt{3x^2-5x+6}}$.

1719. $\int \sin^3 x \cos x \, dx$.

1720. $\int \frac{\sin x \, dx}{\cos^2 x}$.

1721. $\int \frac{\cos x \, dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$.

1722. $\int \cos^3 x \sin 2x \, dx$.

1723. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$.

1724. $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^2 \, dx}{1+x^2}$.

1725. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3 \sqrt{1-x^2}}$.

1726. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{1+\operatorname{tg} x}}$.

1727. $\int \cos 3x \, d(3x)$.

1728. $\int \frac{d(1+\ln x)}{\cos^2(1+\ln x)}$.

1729. $\int \cos 3x \, dx$.

1730. $\int (\cos \alpha - \cos 2x) \, dx$.

1731. $\int \sin(2x-3) \, dx$.

1732. $\int \cos(1-2x) \, dx$.

1733. $\int \left[\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\right]^{-2} dx$.

1734. $\int e^x (\sin e^x) \, dx$.

1735. $\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}$.

1736. $\int \frac{d(\arcsin x)}{\arcsin x}$.

1737. $\int \frac{(2x-3) \, dx}{x^2-3x+8}$.

1738. $\int \frac{dx}{2x-1}$.

1739. $\int \frac{dx}{cx+m}$.

1740. $\int \frac{x \, dx}{x^2+1}$.

1741. $\int \frac{x^2 \, dx}{x^3+1}$.

1742. $\int \frac{e^x \, dx}{e^x+1}$.

1743. $\int \frac{e^{2x} \, dx}{e^{2x}+a^2}$.

1744. $\int \operatorname{tg} x \, dx$.

1745. $\int \operatorname{ctg} x \, dx$.

1746. $\int \operatorname{tg} 3x \, dx$.

1747. $\int \operatorname{ctg}(2x+1) \, dx$.

1748. $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x} dx$.

1749. $\int \frac{dx}{x \ln x}$.

1750. $\int \frac{(\ln x)^m}{x} dx$.

1751. $\int e^{\sin x} d(\sin x)$. 1752. $\int e^{\sin x} \cos x\, dx$.

1753. $\int a^{3x}\, dx$. 1754. $\int a^{-x}\, dx$. 1755. $\int e^{-3x+1}\, dx$.

1756. $\int e^{x^2} x\, dx$. 1757. $\int e^{-x^3} x^2\, dx$.

1758. $\int \frac{d\left(\frac{x}{3}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}$. 1759. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}$.

1760. $\int \frac{dx}{1+9x^2}$. 1761. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$. 1762. $\int \frac{dx}{2x^2+9}$.

1763. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$. 1764. $\int \frac{x\, dx}{x^4+1}$. 1765. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{a^2-x^4}}$.

1766. $\int \frac{x^2\, dx}{x^6+4}$. 1767. $\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{1-x^8}}$. 1768. $\int \frac{e^x\, dx}{e^{2x}+4}$.

1769. $\int \frac{2^x\, dx}{\sqrt{1-4^x}}$. 1770. $\int \frac{\cos\alpha\, d\alpha}{a^2+\sin^2\alpha}$.

---

1771. $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x}\, dx$. 1772. $\int (e^x+1)^3\, dx$.

1773. $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$. 1774. $\int \frac{3x-1}{x^2+9}\, dx$.

1775. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx$. 1776. $\int \frac{x(1-x^2)}{1+x^4}\, dx$.

1777. $\int \frac{1+x-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\, dx$. 1778. $\int \frac{dx}{(x+\sqrt{x^2-1})^2}$.

1779. $\int \frac{2x-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$. 1780. $\int \frac{x+(\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}}\, dx$.

Calculer les intégrales. (Mettre en évidence la partie entière de l'intégrande.)

1781. $\int \frac{x}{x+4}\, dx$. 1782. $\int \frac{x}{2x+1}\, dx$. 1783. $\int \frac{Ax}{a+bx}\, dx$.

1784. $\int \frac{3+x}{3-x}\, dx$. 1785. $\int \frac{(2x-1)\, dx}{x-2}$. 1786. $\int \frac{x+2}{2x-1}\, dx$.

1787. $\int \frac{(1+x)^2}{x^2+1}\, dx$. 1788. $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\, dx$. 1789. $\int \frac{x^4}{1-x}\, dx$.

1790. $\int \frac{x^4\, dx}{x^2+1}$.

Calculer les intégrales. (Décomposer l'intégrande ou mettre en évidence un carré parfait.)

1791. $\int \frac{dx}{x(x-1)}$. 1792. $\int \frac{dx}{x(x+1)}$.

1793. $\int \frac{dx}{(x+1)(2x-3)}$. 1794. $\int \frac{dx}{(a-x)(b-x)}$.

1795. $\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx.$ 1796. $\int \frac{dx}{x^2-7x+10}.$

1797. $\int \frac{dx}{x^2+3x-10}.$ 1798. $\int \frac{dx}{4x^2-9}.$

1799. $\int \frac{dx}{2-3x^2}.$ 1800. $\int \frac{dx}{(x-1)^2+4}.$

1801. $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}.$ 1802. $\int \frac{dx}{x-x^2-2{,}5}.$

1803. $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}.$ 1804. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}.$

1805. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}.$ 1806. $\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}.$

1807. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}.$

Calculer les intégrales. (Transformer l'intégrande en se servant des formules de trigonométrie.)

1808. $\int \cos^2 x\,dx.$ 1809. $\int \sin^2 x\,dx.$ 1810. $\int \frac{dx}{1-\cos x}.$

1811. $\int \frac{dx}{1+\sin x}.$ 1812. $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}\,dx.$ 1813. $\int \frac{1+\sin x}{1-\sin x}\,dx.$

1814. $\int (\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x)\,dx.$ 1815. $\int \frac{\cos 2x\,dx}{1+\sin x\cos x}.$

1816. $\int \cos x \sin 3x\,dx.$ 1817. $\int \cos 2x \cos 3x\,dx.$

1818. $\int \sin 2x \sin 5x\,dx.$ 1819. $\int \cos x \cos 2x \cos 3x\,dx.$

1820. $\int \frac{dx}{\cos x}.$ 1821. $\int \frac{1-\sin x}{\cos x}\,dx.$ 1822. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x}\,dx.$

1823. $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sin^4 x}.$ 1824. $\int \frac{\sin^3 \alpha}{\sqrt{\cos \alpha}}\,d\alpha.$ 1825. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}.$

1826. $\int \cos^3 x\,dx.$ 1827. $\int \operatorname{tg}^4 x\,dx.$ 1828. $\int \sin^5 x\,dx.$

1829. $\int \sin^4 x\,dx.$ 1830. $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx.$ 1831. $\int \frac{dx}{\sin^6 x}.$

## § 2. Principales méthodes d'intégration

### Intégration par parties

Calculer les intégrales.

1832. $\int x \sin 2x\,dx.$ 1833. $\int x \cos x\,dx.$ 1834. $\int xe^{-x}\,dx.$

1835. $\int x\,3^x\,dx.$ 1836. $\int x^n \ln x\,dx \quad (n \neq -1).$

1837. $\int x \operatorname{arctg} x\,dx.$ 1838. $\int \arccos x\,dx.$

1839. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$. 1840. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}\,dx$. 1841. $\int x\operatorname{tg}^2 x\,dx$.

1842. $\int x\cos^2 x\,dx$. 1843. $\int \frac{\lg x}{x^3}\,dx$. 1844. $\int \frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

1845. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$. 1846. $\int \ln(x^2+1)\,dx$.

1847. $\int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2}$. 1848. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

1849. $\int x^2\ln(1+x)\,dx$.

1850. $\int x^2e^{-x}\,dx$. 1851. $\int x^3e^x\,dx$. 1852. $\int x^2a^x\,dx$.

1853. $\int x^3\sin x\,dx$. 1854. $\int x^2\cos^2 x\,dx$. 1855. $\int \ln^2 x\,dx$.

1856. $\int \frac{\ln^3 x}{x^2}\,dx$. 1857. $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x^5}}\,dx$.

1858. $\int (\arcsin x)^2\,dx$.

1859. $\int (\operatorname{arctg} x)^2\,x\,dx$. 1860. $\int e^x\sin x\,dx$.

1861. $\int e^{3x}(\sin 2x-\cos 2x)\,dx$.

1862. $\int e^{ax}\cos nx\,dx$. 1863. $\int \sin\ln x\,dx$.

1864. $\int \cos\ln x\,dx$. 1865*. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

1866*. $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx$. 1867. $\int \frac{x^2e^x\,dx}{(x+2)^2}$.

1868. $\int x^2e^x\sin x\,dx$.

## Changement de variable

Calculer les intégrales.

1869. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$ (poser $x+1=z^2$).

1870. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x-1}}$. 1871. $\int \frac{4x+3}{(x-2)^3}\,dx$.

1872. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$. 1873. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}\,dx$.

1874. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$. 1875. $\int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)}\,dx$.

1876. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx$. 1877. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

1878. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b+m}}$.

1879. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$ (poser $x=z^6$).

1880. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\,(\sqrt[3]{x}-1)}$.

1881. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$.

1882. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}\,dx$.

1883. $\int \frac{e^{2x}\,dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$ (poser $e^x+1=z^4$).

1884. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

1885. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}\,dx$.

1886. $\int \sqrt{1+\cos^2 x}\cdot\sin 2x\cdot\cos 2x\,dx$.

1887. $\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin x\cdot\cos x}\,dx$.

1888. $\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{a^3-x^3}}$.

1889. $\int \frac{x^5\,dx}{(x^2-4)^2}$.

1890. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$ $\left(\text{poser } x=\frac{1}{z}\text{, ou } x=a\operatorname{tg} z\text{, ou } x=a\operatorname{sh} z\right)$.

1891. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (poser $x=a\sin z$).

1892. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$ $\left(\text{poser } x=\frac{1}{z}\text{, ou } x=\frac{a}{\cos z}\text{, ou } x=a\operatorname{ch} z\right)$.

1893. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}\,dx$.

1894. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$.

1895. $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$.

1896. $\int \frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6}\,dx$.

1897. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$.

1898. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

1899. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}$.

1900. $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$.

1901. $\int \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt{4x^2+1}}$.

1902*. $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\frac{dx}{x^2}$.

1903*. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$.

1904*. $\int \frac{(x+1)\,dx}{x\,(1+xe^x)}$.

Calculer les intégrales. (Faire un changement de variable puis intégrer par parties.)

1905. $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$.

1906. $\int \sin\sqrt[3]{x}\,dx$.

1907. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,dx$.

1908. $\int \frac{x^2\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$.

1909. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2(1+x^2)}\,dx$.

## Exercices divers

Calculer les intégrales.

**1910.** $\int (x+1)\sqrt{x^2+2x}\,dx.$ **1911.** $\int (1+e^{3x})^2 e^{3x}\,dx.$

**1912.** $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$ **1913.** $\int \frac{\sin x}{e^{\cos x}}\,dx.$ **1914.** $\int \sqrt{1-e^x}\,e^x\,dx.$

**1915.** $\int x\cos x^2\,dx.$ **1916.** $\int (2-3x^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{5}} x^{\frac{1}{3}}\,dx.$

**1917.** $\int \frac{2x^5-3x^2}{1+3x^3-x^6}\,dx.$ **1918.** $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x^{\frac{3}{2}}}.$

**1919.** $\int \frac{dx}{e^x(3+e^{-x})}.$ **1920.** $\int \frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}.$

**1921.** $\int \frac{2x+3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$ **1922.** $\int \frac{2x-1}{\sqrt{9x^2-4}}\,dx.$

**1923.** $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx.$ **1924.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{3-\ln^2 x}}.$

**1925.** $\int \frac{\ln x\,dx}{x(1-\ln^2 x)}.$ **1926.** $\int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\,dx.$

**1927.** $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^n}{1+x^2}\,dx.$ **1928.** $\int \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}.$

**1929.** $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}\,dx.$ **1930.** $\int \frac{\sin^4 x\,dx}{\cos^6 x}.$

**1931.** $\int \sqrt{\operatorname{tg}^3 x}\sec^4 x\,dx.$ **1932.** $\int (1-\operatorname{tg} 3x)^2\,dx.$

**1933.** $\int \frac{x^3\,dx}{x+1}.$ **1934.** $\int \frac{x\,dx}{(x-1)^3}.$

**1935.** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2+4x}}.$ **1936.** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+2x}}.$

**1937.** $\int x\sqrt{a+x}\,dx.$ **1938.** $\int (\sqrt{\sin x}+\cos x)^2\,dx.$

**1939.** $\int a^{mx}b^{nx}\,dx.$

---

**1940.** $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}.$ **1941.** $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}.$

**1942.** $\int \frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}}.$ **1943.** $\int \frac{(8x-11)\,dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}.$

**1944.** $\int \frac{(x+2)\,dx}{x^2+2x+2}.$ **1945.** $\int \frac{(x-3)\,dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}.$

**1946.** $\int \frac{(3x-1)\,dx}{4x^2-4x+17}.$ **1947.** $\int \frac{(3x-1)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$

1948. $\int \frac{(x-2)\,dx}{x^2-7x+12}$.

1949. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}}\,dx$.

1950. $\int \frac{3-4x}{2x^2-3x+1}\,dx$.

1951. $\int \frac{(4-3x)\,dx}{5x^2+6x+18}$.

1952. $\int \frac{(2-5x)\,dx}{\sqrt{4x^2+9x+1}}$.

1953. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3x^2-11x+2}}$.

1954. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{2x+3}}$.

1955. $\int \sqrt{\frac{a-x}{x-b}}\,dx$.

---

1956. $\int \operatorname{arctg} x\,dx$.

1957. $\int x \sin x \cos x\,dx$.

1958. $\int x^2 \cos \omega x\,dx$.

1959. $\int e^{2x} x^3\,dx$.

1960. $\int \frac{\ln \cos x}{\cos^2 x}\,dx$.

1961. $\int \frac{\operatorname{ctg} x}{\ln \sin x}\,dx$.

1962. $\int \frac{x^7\,dx}{(1+x^4)^2}$.

1963. $\int \frac{\cos^2 3x}{\sin 3x}\,dx$.

1964. $\int \frac{dx}{1-\sin 3x}$.

1965. $\int \frac{\sin 2x\,dx}{4-\cos^2 2x}$.

1966. $\int \frac{dx}{e^x+1}$.

1967. $\int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx$.

1968. $\int e^{e^x+x}\,dx$.

1969. $\int e^{2x^2+\ln x}\,dx$.

1970. $\int \frac{3+x^3}{\sqrt{2+2x^2}}\,dx$.

1971. $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

1972. $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x}\,dx$.

1973. $\int e^x \sin^2 x\,dx$.

1974. $\int \frac{(1+\operatorname{tg} x)\,dx}{\sin 2x}$.

1975. $\int \frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}\,dx$.

1976. $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{3}\cos\varphi+\sin\varphi}$.

1977. $\int \frac{\sin x\,dx}{1+\sin x}$.

1978. $\int \frac{\sin^2 x \cos x}{(1+\sin^2 x)}\,dx$.

1979. $\int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}\,dx$.

1980. $\int \frac{\ln \ln x}{x}\,dx$.

1981. $\int x^3 e^{x^2}\,dx$.

1982. $\int e^{-x^2} x^5\,dx$.

1983. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+2x^2}}$.

1984. $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

1985. $\int \frac{\sqrt{(x^2-a^2)^5}}{x}\,dx$.

1986. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+4}}$.

1987. $\int \frac{\sqrt{x^2-8}}{x^4}\,dx$.

1988. $\int \frac{\sqrt{4+x^2}}{x^6}\,dx$.

1989. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-3}}$.

1990. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[4]{x^3}+1}$.

1991. $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx$.

1992. $\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}}$.

1993. $\int \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$.

1994. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}\,dx$.

1995*. $\int \frac{x^7\,dx}{(1-x^2)^5}$.

1996. $\int \frac{dx}{(ax+b)\sqrt{x}}$.

1997. $\int \frac{\sqrt{1+x^8}}{x^{13}}\,dx$.

1998. $\int \frac{x\,dx}{(1-x^4)^{\frac{3}{2}}}$.

1999. $\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{x^4+4}}$.

2000. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x-1)}$.

2001. $\int \frac{\sqrt{1-x^3}}{x^2\sqrt{x}}\,dx$.

2002. $\int \frac{x^4\,dx}{(1+x^2)^3}$.

2003. $\int \frac{3x^2-1}{2x\sqrt{x}}\operatorname{arctg} x\,dx$.

2004. $\int \frac{e^x(1+e^x)\,dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

2005. $\int \sqrt{e^x-1}\,dx$.

2006*. $\int \frac{\ln(x+1)-\ln x}{x(x+1)}\,dx$.

2007. $\int \frac{dx}{x^6+x^4}$.

2008. $\int \arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx$.

2009. $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$.

2010. $\int \sqrt[3]{\frac{\sin^2 x}{\cos^{14} x}}\,dx$.

2011. $\int \frac{dx}{\cos^3 x\sqrt{\sin 2x}}$.

## § 3. Principales classes de fonctions intégrables

### Fonctions rationnelles

Calculer les intégrales.

1) *Le dénominateur ne possède que des racines réelles distinctes.*

2012. $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(2x+1)}$.

2013. $\int \frac{x\,dx}{2x^2-3x-2}$.

2014. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\,dx$.

2015. $\int \frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}$.

2016. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$.

2017. $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}\,dx$.

2018. $\int \frac{32x\,dx}{(2x-1)(4x^2-16x+15)}$.

2019. $\int \frac{x\,dx}{x^4-3x^2+2}$.

2020. $\int \frac{(2x^2-5)\,dx}{x^4-5x^2+6}$.

2021. $\int \frac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x}\,dx$.

2) *Le dénominateur ne possède que des racines réelles dont certaines sont multiples.*

2022. $\int \frac{(x^2-3x+2)\,dx}{x(x^2+2x+1)}$.

2023. $\int \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 \frac{dx}{x}$.

2024. $\int \frac{x^2\,dx}{x^3+5x^2+8x+4}$.

2025. $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\,dx$.

2026. $\int \frac{x^3-6x^2+11x-5}{(x-2)^4}\,dx$.

2027. $\int \frac{dx}{x^4-x^2}$.

2028. $\int \frac{x^2\,dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$.

2029. $\int \frac{x^3-6x^2+9x+7}{(x-2)^3(x-5)}\,dx$.

2030. $\int \frac{1}{8}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 dx$.

2031. $\int \frac{x^5\,dx}{(x-1)^2(x^2-1)}$.

2032. $\int \frac{(x^2-2x+3)\,dx}{(x-1)(x^3-4x^2+3x)}$.

2033. $\int \frac{(7x^3-9)\,dx}{x^4-5x^3+6x^2}$.

2034. $\int \frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}\,dx$.

2035. $\int \frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3}\,dx$.

3) *Le dénominateur possède des racines complexes distinctes.*

2036. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$.

2037. $\int \frac{dx}{1+x^3}$.

2038. $\int \frac{x\,dx}{x^3-1}$.

2039. $\int \frac{(2x^2-3x-3)\,dx}{(x-1)(x^2-2x+5)}$.

2040. $\int \frac{(x^4+1)\,dx}{x^3-x^2+x-1}$.

2041. $\int \frac{x^2\,dx}{1-x^4}$.

2042. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$.

2043. $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$.

2044. $\int \frac{(3x^2+x+3)\,dx}{(x-1)^3(x^2+1)}$.

2045. $\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}\,dx$.

2046. $\int \frac{(x^3-6)\,dx}{x^4+6x^2+8}$.

2047*. $\int \frac{dx}{1+x^4}$.

4) *Le dénominateur possède des racines complexes multiples.*

2048. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}\,dx$.

2049. $\int \frac{dx}{x(4+x^2)^2(1+x^2)}$.

2050. $\int \frac{(5x^2-12)\,dx}{(x^2-6x+13)^2}$.

2051. $\int \frac{(x+1)^4\,dx}{(x^2+2x+2)^3}$.

2052. $\int \frac{dx}{(x^2+9)^3}$.

2053. $\int \frac{2x\,dx}{(1+x)(1+x^2)^2}$.

2054. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^4}$.

2055. $\int \frac{x^9\,dx}{(x^4-1)^2}$.

5) *Méthode d'Ostrogradski*

2056. $\int \frac{x^7+2}{(x^2+x+1)^2}\,dx$.

2057. $\int \frac{(4x^2-8x)\,dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$.

2058. $\int \frac{x^2+x+1}{x^5-2x^4+x^3}\,dx$.

2059. $\int \frac{x^6+x^4-4x^2-2}{x^3(x^2+1)^2}\,dx$.

2060. $\int \frac{(x^2-1)^2\,dx}{(1+x)(1+x^2)^3}$.

2061. $\int \frac{dx}{x^4(x^3+1)^2}$.

2062. $\int \frac{dx}{(x^2+2x+10)^3}$.

2063. $\int \frac{(x+2)\,dx}{(x^2+2x+2)^3}$.

2064. $\int \frac{x^5-x^4-26x^2-24x-25}{(x^2+4x+5)^2(x^2+4)^2}\,dx$.

2065. $\int \frac{3x^4+4}{x^2(x^2+1)^3}\,dx$.

2066. $\int \frac{5-3x+6x^2+5x^3-x^4}{x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1}\,dx$.

2067. $\int \frac{9\,dx}{5x^2(3-2x^2)^3}$.

## Quelques fonctions irrationnelles

Calculer les intégrales.

1) *Fonctions de la forme* $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{a_1x+b_1}}, \sqrt[p]{\frac{ax+b}{a_1x+b_1}}, \ldots\right)$.

2068. $\int \frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2})}$.

2069. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}}$.

2070. $\int \frac{x\,dx}{(x+1)^{\frac{1}{2}}+(x+1)^{\frac{1}{3}}}$.

2071. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x}$.

2072. $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,dx$.

2073. $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx$.

2074. $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x}$.

2075*. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$.

2) *Binômes différentiels* $x^m(a+bx^n)^p\,dx$.

2076. $\int \sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})^4\,dx$.

2077. $\int x^{-1}(1+x^{\frac{1}{3}})^{-3}\,dx$.

2078. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$.

2079. $\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx$.

2080. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

2081. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

2082. $\int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}\,dx$.

2083. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.

2084. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x}\,dx$.

2085. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$.

2086. $\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}\,dx$.

2087. $\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$.

2088. $\int \sqrt[3]{x(1-x^2)}\,dx$.

2089. $\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,dx$.

Calculer les intégrales.

2090. $\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx.$

2091. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\, dx.$

2092. $\int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin^3 x}.$

2093. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}\, dx.$

2094. $\int \frac{dx}{\cos^3 x \sin^3 x}.$

2095. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}.$

2096. $\int \frac{\sin x\, dx}{(1-\cos x)^2}.$

2097. $\int \frac{\cos x\, dx}{(1-\cos x)^2}.$

2098. $\int \cos^6 x\, dx.$

2099. $\int \operatorname{ctg}^4 x\, dx.$

2100. $\int \operatorname{tg}^5 x\, dx.$

2101. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^8 x}.$

2102. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}.$

2103. $\int \frac{\cos^4 x + \sin^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x}\, dx.$

---

2104. $\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}.$

2105. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}.$

2106. $\int \frac{dx}{a \cos x + b \sin x}.$

2107. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x \cdot \cos 2x}.$

2108. $\int \frac{\cos^2 x\, dx}{\sin x \cdot \cos 3x}.$

2109. $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{tg} x}.$

2110. $\int \frac{dx}{5 - 3\cos x}.$

2111. $\int \frac{dx}{5 + 4\sin x}.$

2112. $\int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x}\, dx.$

2113. $\int \frac{\sin^2 x\, dx}{1 - \operatorname{tg} x}.$

2114. $\int \frac{dx}{4 + \operatorname{tg} x + 4 \operatorname{ctg} x}.$

2115. $\int \frac{dx}{(\sin x + 2 \sec x)^2}.$

2116. $\int \frac{dx}{5 - 4\sin x + 3\cos x}.$

2117. $\int \frac{dx}{4 - 3\cos^2 x + 5\sin^2 x}.$

2118. $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}.$

2119. $\int \frac{dx}{1 - \sin^4 x}.$

2120. $\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}.$

2121. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x}.$

2122. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sin^3 x - \cos^3 x}.$

---

2123. $\int \sqrt{1 + \sin x}\, dx.$

2124. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\sin x \cos x}\, dx.$

2125*. $\int \frac{\sqrt{\sin^3 2x}}{\sin^5 x}\, dx.$

2126. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x \cos^5 x}}.$

2127. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - \sin^4 x}}.$

2128. $\int \sqrt{1 + \operatorname{cosec} x}\, dx.$

2129. $\int \frac{(\cos 2x-3)\,dx}{\cos^4 x\,\sqrt{4-\operatorname{ctg}^2 x}}$.

2130. $\int \frac{dx}{\sin\frac{x}{2}\sqrt{\cos^3\frac{x}{2}}}$.

2131. $\int \sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx$.

## Fonctions hyperboliques

Calculer les intégrales.

2132. $\int \operatorname{ch} x\,dx$.

2133. $\int \operatorname{sh} x\,dx$.

2134. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}$.

2135. $\int \frac{e^x\,dx}{\operatorname{ch} x+\operatorname{sh} x}$.

2136. $\int (\operatorname{ch}^2 ax+\operatorname{sh}^2 ax)\,dx$.

2137. $\int \operatorname{sh}^2 x\,dx$.

2138. $\int \operatorname{th}^2 x\,dx$.

2139. $\int \operatorname{cth}^2 x\,dx$.

2140. $\int \operatorname{sh}^3 x\,dx$.

2141. $\int \operatorname{ch}^3 x\,dx$.

2142. $\int \operatorname{th}^4 x\,dx$.

2143. $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^3 x\,dx$.

2144. $\int \operatorname{cth}^5 x\,dx$.

2145. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}$.

2146. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}$.

2147. $\int \frac{dx}{(1+\operatorname{ch} x)^2}$.

2148. $\int \sqrt{\operatorname{th} x}\,dx$.

2149. $\int \frac{x\,dx}{\operatorname{ch}^2 x}$.

2150. $\int \frac{e^{2x}\,dx}{\operatorname{sh}^4 x}$.

## Fonctions rationnelles de $x$ et $\sqrt{ax^2+bx+c}$

Calculer les intégrales.

2151*. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$.

2152. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$.

2153. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}$.

2154. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$.

2155. $\int \frac{\sqrt{2x+x^2}}{x^2}\,dx$.

2156. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

2157. $\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$.

2158. $\int \sqrt{x^2-2x-1}\,dx$.

2159. $\int \sqrt{3x^2-3x+1}\,dx$.

2160. $\int \sqrt{1-4x-x^2}\,dx$.

2161. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$.

2162. $\int \frac{dx}{x^2\,(x+\sqrt{1+x^2})}$.

2163. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$.

2164. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$.

2165. $\int \frac{(2x^2-3x)\,dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$.

2166. $\int \frac{3x^2-5x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx$.

2167. $\int \frac{3x^3\,dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$.

2168. $\int \frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$.

2169. $\int \frac{3x^3-8x+5}{\sqrt{x^2-4x-7}}\,dx$.

2170. $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$.

2171. $\int \frac{dx}{(x^3+3x^2+3x+1)\sqrt{x^2+2x-3}}$.

2172. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}\,dx$.

2173. $\int \frac{(x-1)\,dx}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}$.

2174. $\int \frac{(2x+3)\,dx}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+4}}$.

## Fonctions diverses

Calculer les intégrales.

2175. $\int \frac{x^3\,dx}{(x-1)^{12}}$.

2176. $\int \frac{x\,dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$.

2177. $\int x\sqrt[3]{a+x}\,dx$.

2178. $\int \frac{dx}{ae^{mx}+be^{-mx}}$.

2179. $\int \frac{x\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$.

2180. $\int \frac{x^4\,dx}{(x^2-1)(x+2)}$.

2181. $\int \frac{dx}{1-x^4}$.

2182. $\int \frac{dx}{(x^4-1)^2}$.

2183. $\int \frac{\ln(x+1)\,dx}{\sqrt{x+1}}$.

2184. $\int (x^2+3x+5)\cos 2x\,dx$.

2185. $\int x^2 \operatorname{sh} x\,dx$.

2186. $\int \operatorname{arctg}(1+\sqrt{x})\,dx$.

2187. $\int \frac{\arcsin x\,dx}{x^2}$.

2188. $\int e^{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

2189. $\int xe^{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

2190. $\int (x^3-2x^2+5)\,e^{3x}\,dx$.

2191. $\int \sin\sqrt{x}\,dx$.

2192. $\int \frac{dx}{x^3(x-1)^{\frac{1}{2}}}$.

2193. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$.

2194. $\int \frac{\sqrt{(1+x^2)^5}}{x^6}\,dx$.

2195. $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

2196. $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}}\,\frac{dx}{x}$.

2197. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{(1+x)^3}}$.

2198. $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x^2}\,dx.$

2199. $\int \frac{x^4\,dx}{x^{15}-1}.$

2200. $\int \frac{dx}{\sin 2x - 2\sin x}.$

2201. $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}.$

2202. $\int \frac{dx}{a^2 - b^2\cos^2 x}.$

2203. $\int x\ln(1+x^3)\,dx.$

2204. $\int \frac{(\ln x - 1)\,dx}{\ln^2 x}.$

2205. $\int \frac{x\ln x}{\sqrt{(x^2-1)^3}}\,dx.$

2206. $\int x^2 e^x \cos x\,dx.$

2207. $\int x e^{x^2}(x^2+1)\,dx.$

2208. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x\cos^5 x}}.$

2209. $\int \frac{dx}{\sin^5 x\cos^5 x}.$

2210. $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}.$

2211. $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}.$

2212. $\int \sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 2}\,dx.$

2213. $\int \frac{(x^2-1)\,dx}{x\sqrt{x^4+3x^2+1}}.$

2214. $\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}.$

2215. $\int \frac{xe^x\,dx}{(1+x)^2}.$

2216. $\int \frac{xe^x\,dx}{\sqrt{1+e^x}}.$

2217. $\int \frac{\operatorname{arctg} x\,dx}{x^4}.$

2218. $\int \frac{x\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2}\,dx.$

2219. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x)^3}\,dx.$

2220. $\int \frac{dx}{(1-2^x)^4}.$

2221. $\int \frac{(e^{3x}+e^x)\,dx}{e^{4x}-e^{2x}+1}.$

2222. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}.$

2223. $\int \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{1+\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}^2 x}.$

2224. $\int \sin^8 x\,dx.$

2225. $\int \frac{(3+x^2)^2 x^3\,dx}{(1+x^2)^3}.$

2226. $\int \frac{x^2-8x+7}{(x^2-3x-10)^2}\,dx.$

2227. $\int \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}.$

2228. $\int \frac{(x+\sin x)\,dx}{1+\cos x}.$

2229*. $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{dx}{1+x^4}.$

2230. $\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x - \sin x}{\cos^2 x}\,dx.$

CHAPITRE VII

# MÉTHODES DE CALCUL DES INTÉGRALES DÉFINIES. INTÉGRALES IMPROPRES

## § 1. Méthodes de calcul exact des intégrales

### Usage immédiat de la formule de Newton-Leibniz

Calculer les intégrales.

2231. $\int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx.$

2232. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}.$

2233. $\int_2^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}.$

2234. $\int_4^9 \frac{y-1}{\sqrt{y}+1}\,dy.$

2235. $\int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}-\varphi_0\right) dt.$

2236. $\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}.$

2237. $\int_0^1 (e^x-1)^4 e^x\,dx.$

2238. $\int_0^{2a} \frac{3dx}{2b-x}$ $(b>a>0).$

2239. $\int_0^1 \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}.$

2240. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}.$

2241. $\int_1^e \frac{1+\lg x}{x}\,dx.$

2242. $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}\,dx}{x^2}.$

2243. $\int_0^{\sqrt[n]{\frac{a}{2}}} \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{a^2-x^{2n}}}.$

2244. $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}.$

2245. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^3\,dx}{\left(\frac{5}{8}-x^4\right)\sqrt{\frac{5}{8}-x^4}}.$

---

2246. $\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{a\,dx}{(x-a)(x-2a)}.$

2247. $\int_2^3 \frac{dx}{2x^2+3x-2}.$

2248. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$. 2249. $\int_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$. 2250. $\int_{-0,5}^1 \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$.

2251. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$. 2252. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin 2x\, dx$.

2253. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\, dx$. 2254. $\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sin^2(\omega x + \varphi_0)\, dx$.

2255. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x\, dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$. 2256. $\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg}^4 \varphi\, d\varphi$.

2257. $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2}\, dx$. 2258. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) dt$.

Calculer les intégrales en les intégrant par parties.

2259. $\int_0^1 xe^{-x}\, dx$. 2260. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x\, dx$. 2261. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\, dx}{\sin^2 x}$.

2262. $\int_0^{\pi} x^3 \sin x\, dx$. 2263. $\int_1^2 x \log_2 x\, dx$.

2264. $\int_0^{e-1} \ln(x+1)\, dx$. 2265. $\int_0^{a\sqrt{7}} \frac{x^3\, dx}{\sqrt[3]{a^2+x^2}}$.

2266. $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\, dx$. 2267. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x\, dx$. 2268. $\int_1^e \ln^3 x\, dx$.

2269. Etablir des formules de récurrence pour le calcul des intégrales $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$ ($n$ est un entier positif ou nul) et calculer les intégrales:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\, dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 x\, dx$; c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{11} x\, dx$.

**2270.** Etablir une formule de récurrence pour le calcul de l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x\, dx$ ($m$ et $n$ sont des entiers positifs ou nuls; étudier le cas particulier de valeurs paires et impaires de $m$ et $n$).

**2271.** Ecrire une formule de récurrence et calculer l'intégrale $\int_{-1}^{0} x^n e^x\, dx$ ($n$ est un entier positif).

**2272.** Démontrer la formule de récurrence

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$$

($n$ est un entier positif) et l'appliquer au calcul de l'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^4}$.

**2273.** Montrer que si $J_m = \int_1^e \ln^m x\, dx$, alors $J_m = e - mJ_{m-1}$ ($m$ est un entier positif).

**2274*.** Calculer $\int_0^1 x^p (1-x)^q\, dx$ ($p$ et $q$ sont des entiers positifs).

## Changement de variables dans l'intégrale définie

Calculer les intégrales.

**2275.** $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\, dx$. **2276.** $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\, dx}{1+x}$. **2277.** $\int_3^8 \frac{x\, dx}{\sqrt{1+x}}$.

**2278.** $\int_0^1 \frac{x\, dx}{1+\sqrt{x}}$. **2279.** $\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}\, dx}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}$. **2280.** $\int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}\, dx}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}$.

**2281*.** $\int_0^{\pi} \sin^6 \frac{x}{2}\, dx$. **2282*.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^7 2x\, dx$.

---

**2283.** $\int_0^1 \frac{x^2\, dx}{(1+x^2)^3}$. **2284.** $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\, dx$.

2285. $\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6}\,dx.$

2286. $\int\limits_{1}^{2} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx.$

2287. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}.$

2288. $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{(1-x^2)^3}\,dx.$

2289. $\int\limits_{0}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx.$

2290. $\int\limits_{0}^{-\ln 2} \sqrt{1-e^{2x}}\,dx.$

2291. $\int\limits_{0}^{a} \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}.$

2292. $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{(x^2+3)^{\frac{5}{2}}}.$

2293. $\int\limits_{2,5}^{5} \frac{(\sqrt{25-x^2})^3}{x^4}\,dx.$

2294. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$

2295. $\int\limits_{\sqrt{\frac{8}{3}}}^{2\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-2)^5}}.$

## Problèmes divers

2296. Calculer la valeur moyenne de la fonction $y=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ dans l'intervalle [1, 4].

2297. Calculer la valeur moyenne de la fonction $f(x)=\frac{1}{x^2+x}$ dans l'intervalle [1 ; 1,5].

2298. Calculer la valeur moyenne des fonctions $f(x)=\sin x$ et $f(x)=\sin^2(x)$ dans l'intervalle $[0, \pi]$.

2299. Calculer la valeur moyenne de la fonction $f(x)=\frac{2}{e^x+1}$ dans l'intervalle [0, 2].

2300. Pour quelle valeur de $a$ la valeur moyenne de la fonction $y=\ln x$ dans l'intervalle $[1, a]$ est-elle égale à la vitesse moyenne de variation de cette fonction dans l'intervalle mentionné?

---

Calculer les intégrales.

2301. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x+x^3}.$

2302. $\int\limits_{0}^{\sqrt[5]{2}} \frac{x^9\,dx}{(1+x^5)^3}.$

2303. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{x^3\,dx}{x^2-3x+2}.$

2304. $\int\limits_{0}^{\sqrt[4]{2}} \frac{x^{15}\,dx}{(1+x^8)^{\frac{2}{5}}}.$

2305. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$. 2306. $\int\limits_{-a}^{+a} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

2307. $\int\limits_0^1 \sqrt{2x+x^2}\,dx$. 2308. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x^5\sqrt{1+x^2}\,dx$.

2309. $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx$. 2310. $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$.

2311. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x}{\cos^3 x}\,dx$. 2312. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos x+3}$. 2313. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\frac{1}{6}\sin^2 x}$.

2314. $\int\limits_0^1 (\arcsin x)^4\,dx$. 2315. $\int\limits_1^{16} \operatorname{arctg}\sqrt{\sqrt{x}-1}\,dx$.

2316. $\int\limits_0^1 \frac{(3x+2)\,dx}{(x^2+4x+1)^{\frac{5}{2}}}$. 2317. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x\,dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$.

2318. Montrer que $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|ab|\,dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}=\frac{\pi}{2}$, où $a$ et $b$ sont des nombres réels arbitraires non nuls.

2319. Résoudre l'équation $\int\limits_{\sqrt{2}}^{x} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\frac{\pi}{12}$.

2320. Résoudre l'équation $\int\limits_{\ln 2}^{x} \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}=\frac{\pi}{6}$.

---

2321. Etablir l'inégalité $\frac{x}{e}>\ln x>1$ pour $x>e$ et montrer que $0{,}92<\int\limits_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}}<1$.

2322*. Montrer que

$$\frac{\pi}{6}\approx 0{,}523<\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}}<\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\approx 0{,}555.$$

2323*. Montrer que

$$0{,}5<\int\limits_0^{0{,}5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}}\leqslant\frac{\pi}{6}\approx 0{,}523 \qquad (n\geqslant 1).$$

**2324.** Utiliser l'inégalité $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$ valable pour $x > 0$ et l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski (cf. exercice 1638) pour évaluer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x \sin x}\, dx$.

**2325*.** Montrer que $0{,}78 < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} < 0{,}93$.

---

**2326.** Déterminer les extrémums de la fonction $J(x) = \int_0^x \frac{2t+1}{t^2-2t+2}\, dt$ dans l'intervalle $[-1, 1]$.

**2327.** Trouver le point d'extrémum et les points d'inflexion du graphe de la fonction $y = \int_0^x (t-1)(t-2)^2\, dt$.

Etablir les relations indiquées sans recourir au calcul des intégrales.

**2328.** $\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} x^{10} \sin^9 x\, dx = 0.$

**2329.** $\int_{-1}^{1} \frac{x^7 - 3x^5 + 7x^3 - x}{\cos^2 x}\, dx = 0.$

**2330.** $\int_{-1}^{1} e^{\cos x}\, dx = 2 \int_0^1 e^{\cos x}\, dx.$

**2331.** $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x \ln \frac{1+x}{1-x}\, dx = 0.$

**2332*.** a) Montrer que si $f(t)$ est une fonction impaire, alors $\int_a^x f(t)\, dt$ est une fonction paire, i. e. $\int_a^{-x} f(t)\, dt = \int_a^x f(t)\, dt$.

b) $\int_a^x f(t)\, dt$ est-elle une fonction impaire si $f(t)$ est une fonction paire ?

**2333*.** Etablir l'égalité suivante

$$\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2} \quad (x > 0).$$

2334. Démontrer l'identité

$$\int_{\frac{1}{e}}^{\operatorname{tg} x} \frac{t\,dt}{1+t^2} + \int_{\frac{1}{e}}^{\operatorname{ctg} x} \frac{dt}{t(1+t^2)} = 1.$$

2335. Démontrer l'identité

$$\int_0^{\sin^2 x} \arcsin \sqrt{t}\,dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t}\,dt = \frac{\pi}{4}.$$

2336. Démontrer l'égalité

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n\,dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m\,dx.$$

2337. Démontrer l'égalité

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx.$$

2338. Démontrer que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx.$

Appliquer le résultat obtenu au calcul des intégrales $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx.$

2339*. Démontrer que $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot 2\times$ $\times \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx.$

Appliquer le résultat obtenu au calcul de l'intégrale

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\,dx.$$

2340 *. Montrer que si $f(x)$ est une fonction périodique de période $T$, alors $\int_a^{a+T} f(x)\,dx$ ne dépend pas de $a$.

**2341 *.** Sachant que la fonction $f(x)$ est impaire dans l'intervalle $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ et possède une période égale à $T$, montrer que $\int_a^x f(t)\,dt$ est également une fonction périodique de même période $T$.

**2342.** Calculer l'intégrale $\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx$, où $n$ est un entier positif par les procédés suivants : en développant l'intégrande suivant la formule du binôme de Newton et par la substitution $x = \sin\varphi$. En comparant les résultats obtenus établir la formule suivante de sommation ($C_n^k$ étant les coefficients binomiaux) :

$$C_n^0 - \frac{C_n^1}{3} + \frac{C_n^2}{5} - \frac{C_n^3}{7} + \ldots + \frac{(-1)^n C_n^n}{2n+1} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1)}.$$

**2343.** L'intégrale $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5-3\cos x}$ se calcule aisément moyennant la substitution $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z$. On a en effet

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5-3\cos x} = \int_0^0 \frac{2\,dz}{(1+z^2)\left(5-3\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)} = 0.$$

Or, d'un autre côté, $-3 < -3\cos x < +3$ donc $2 < 5-3\cos x < 8$ et $\frac{1}{2} > \frac{1}{5-3\cos x} > \frac{1}{8}$, d'où

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\,dx > \int_0^{2\pi} \frac{dx}{5-3\cos x} > \int_0^{2\pi} \frac{1}{8}\,dx,$$

et $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5-3\cos x} > \frac{\pi}{4}$. Trouver l'erreur commise dans ce raisonnement.

**2344*.** Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^n x\,dx$ ($n > 1$ et entier). Vérifier que $I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$. Montrer que $\frac{1}{2n+2} < I_n < \frac{1}{2n-2}$.

**2345*.** Démontrer l'égalité

$$\int_0^x e^{zx} e^{-z^2}\,dz = e^{\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{4}}\,dz.$$

**2346*.** Montrer que

$$\lim_{\omega\to\infty} \frac{e^{k\omega^2 x^2}}{\int_a^b e^{k\omega^2 x^2}\,dx} = \begin{cases} 0, & \text{pour } x < b, \\ \infty, & \text{pour } x = b \end{cases} \quad (\omega > 0,\ k > 0,\ b > a > 0).$$

## § 2. Méthodes approchées

Dans les exercices 2347-2349 effectuer les calculs avec une précision de 0,001.

**2347.** L'aire d'un quart de cercle de rayon l'unité est égale à $\frac{\pi}{4}$. D'un autre côté, si l'on prend le cercle unitaire centré à l'origine des coordonnées et dont l'équation est $x^2 + y^2 = 1$, et si on calcule avec une intégrale l'aire du quart de ce cercle, on obtient

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx, \quad \text{i.e.} \quad \pi = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Utiliser les règles des rectangles, des trapèzes et la règle de Simpson pour calculer approximativement le nombre $\pi$ en partageant l'intervalle d'intégration $[0, 1]$ en 10 parties. Comparer les résultats obtenus entre eux et avec ceux de la table donnant la valeur de $\pi$.

**2348.** Sachant que $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$, trouver une valeur approchée de $\pi$. Comparer les résultats obtenus avec les diverses règles en partageant l'intervalle d'intégration en 10 parties entre eux et avec ceux de l'exercice précédent.

**2349.** Calculer $\ln 10 = \int_1^{10} \frac{dx}{x}$ en utilisant la règle de Simpson pour $n = 10$. Trouver le module de passage des logarithmes naturels aux décimaux. Comparer avec les données tabulaires.

Dans les exercices 2350-2355 appliquer la formule de Simpson au calcul approché des intégrales qui ne peuvent pas être trouvées sous forme finie à l'aide de fonctions élémentaires. Le nombre $n$ d'intervalles partiels est indiqué entre parenthèses.

**2350.** $\int_0^1 \sqrt{1-x^3}\,dx \quad (n=10).$

**2351.** $\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx \quad (n=10).$

**2352.** $\int_2^5 \frac{dx}{\ln x} \quad (n=6).$

**2353.** $\int_2^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\cos\varphi}\,d\varphi \quad (n=10).$

**2354.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-0{,}1\sin^2\varphi}\,d\varphi \quad (n=6).$

2355. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x}\, dx \quad (n=10)$.

2356. Appliquer la formule de Simpson au calcul de l'intégrale $\int_{1,05}^{1,35} f(x)\, dx$, où la fonction $f(x)$ est donnée par le tableau de valeurs suivant :

| $x$ | 1,05 | 1,10 | 1,15 | 1,20 | 1,25 | 1,30 | 1,35 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2,36 | 2,50 | 2,74 | 3,04 | 3,46 | 3,98 | 4,60 |

2357. Une droite est tangente au bord d'une rivière en $A$ et $B$. Pour mesurer l'aire de la zone comprise entre la rivière et la droite $AB$ on partage $AB$ par onze points équidistants de 5 m (donc $AB = 60$ m) à partir desquels on élève des perpendiculaires en direction de la

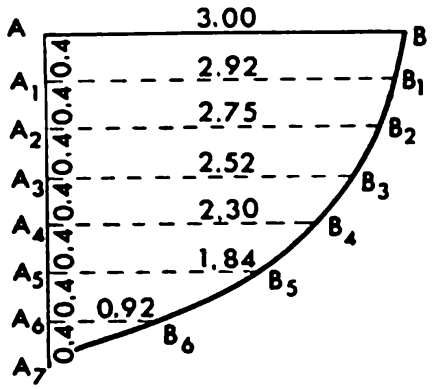


Fig. 39

rivière. Les longueurs de ces perpendiculaires sont respectivement égales à 3,28 ; 4,02 ; 4,64 ; 5,26 ; 4,98 ; 3,62 ; 3,82 ; 4,68 ; 5,26 ; 3,82 ; 3,24 m. Calculer approximativement l'aire de la zone.

2358. Calculer l'aire de la section transversale d'un bateau sachant que (fig. 39) :

$$AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6 = A_6A_7 = 0{,}4 \text{ m},$$
$$AB = 3 \text{ m},\ A_1B_1 = 2{,}92 \text{ m},\ A_2B_2 = 2{,}75 \text{ m},\ A_3B_3 = 2{,}52 \text{ m},$$
$$A_4B_4 = 2{,}30 \text{ m},\ A_5B_5 = 1{,}84 \text{ m},\ A_6B_6 = 0{,}92 \text{ m}.$$

2359. Pour évaluer le travail effectué par la vapeur d'eau dans le cylindre d'une machine on calcule l'aire du diagramme (fig. 40) exprimant la pression de la vapeur dans le cylindre en fonction de la course du piston. Les ordonnées des points des lignes $ABC$ et $ED$

correspondant aux abscisses $x_0$, $x_1$, $x_2$, . . ., $x_{10}$ sont données par le tableau suivant:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Abscisses . . . . . | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
| Ordonnées de la ligne $ABC$ . . . . | 60,6 | 53,0 | 32,2 | 24,4 | 19,9 | 17,0 |
| Ordonnées de la ligne $ED$ . . . . | 5,8 | 1,2 | 0,6 | 0,6 | 0,7 | 0,8 |
| Abscisses . . . . . | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_9$ | $x_{10}$ | |
| Ordonnées de la ligne $ABC$ . . . . | 15,0 | 13,3 | 12,0 | 11,0 | 6,2 | |
| Ordonnées de la ligne $ED$ . . . . | 0,9 | 1,0 | 1,3 | 1,8 | 5,7 | |

Utiliser la formule de Simpson pour calculer l'aire $ABCDE$. Les ordonnées sont exprimées en millimètres. $OF = 88{,}7$ mm ($F$ est la projection commune des points $C$ et $D$ sur l'axe des abscisses).

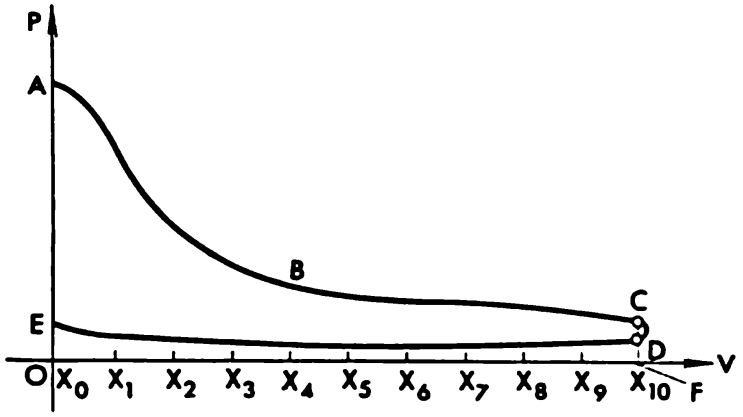


Fig. 40

Dans les exercices 2360-2363 on se servira des méthodes de résolution approchée des équations pour trouver les limites d'intégration.

**2360.** Calculer l'aire de la figure comprise entre les arcs des paraboles $y = x^3 - 7$ et $y = -2x^2 + 3x$ et l'axe des ordonnées.

**2361.** Calculer l'aire de la figure comprise entre la parabole $y = x^3$ et la droite $y = 7(x + 1)$.

**2362.** Trouver l'aire de la figure comprise entre la parabole $y = 16 - x^2$ et la parabole semi-cubique $y = -\sqrt[3]{x^2}$.

**2363.** Trouver l'aire de la figure comprise entre les courbes $y = 4 - x^4$ et $y = \sqrt[3]{x}$.

**2364.** La fig. 41 représente le diagramme d'indicateur (simplifié) d'une machine à vapeur. Les dimensions sont données en mm. Calculer l'aire $ABCDO$ sachant que l'équation de la courbe $BC$ est $pv^\gamma = \text{const}$ (la courbe $BC$ est appelée *adiabate*), $\gamma = 1{,}3$ et $AB$ est parallèle à l'axe $Ov$.

2365. La fig. 42 représente le diagramme d'indicateur d'un moteur Diesel. Le segment $AB$ correspond au processus de combustion du mélange, l'adiabate $BC$ à l'expansion, le segment $CD$

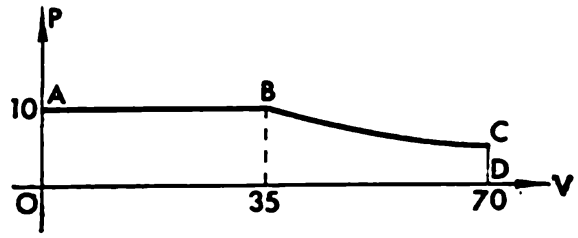


Fig. 41

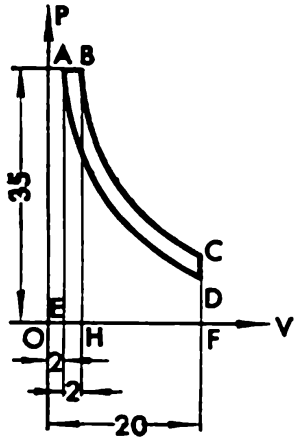


Fig. 42

à l'échappement et l'adiabate $DA$ à la compression. L'équation de l'adiabate $BC$ est $pv^{1,3} = \text{const}$, celle de l'adiabate $AD$ est $pv^{1,35} = \text{const}$. Calculer l'aire $ABCD$ (les dimensions sont données en mm).

## § 3. Intégrales impropres

### Intégrales à limites infinies

Calculer les intégrales impropres (le cas échéant, établir leur divergence).

2366. $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^4}$.  2367. $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

2368. $\int\limits_0^\infty e^{-ax}\,dx \quad (a>0)$.

2369. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{2x\,dx}{x^2+1}$.  2370. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2}$.  2371. $\int\limits_2^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx$.

2372. $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2(x+1)}$.  2373. $\int\limits_0^\infty \frac{x}{(1+x)^3}\,dx$.  2374. $\int\limits_{\sqrt{2}}^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

2375. $\int\limits_{a^2}^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.  2376. $\int\limits_0^\infty xe^{-x^2}\,dx$.  2377. $\int\limits_0^\infty x^3e^{-x^2}\,dx$.

2378 $\int\limits_0^\infty x\sin x\,dx$.  2379. $\int\limits_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\,dx$.  2380. $\int\limits_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx$.

2381. $\int\limits_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx$. 2382. $\int\limits_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx$. 2383. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}$.

2384. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2}$. 2385. $\int\limits_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}\,dx$.

Etablir la convergence des intégrales.

2386. $\int\limits_0^\infty \frac{x}{x^3+1}\,dx$. 2387. $\int\limits_1^\infty \frac{x^3+1}{x^4}\,dx$. 2388. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{13}}{(x^5+x^3+1)^3}\,dx$.

2389. $\int\limits_1^\infty \frac{\ln(x^2+1)}{x}\,dx$. 2390. $\int\limits_0^\infty \sqrt{x}\,e^{-x}\,dx$.

2391. $\int\limits_0^\infty \frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{1+x^4}}\,dx$. 2392. $\int\limits_{e^2}^\infty \frac{dx}{x\ln\ln x}$. 2393. $\int\limits_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^{\frac{3}{2}}}$.

## Intégrales de fonctions à discontinuités infinies

Calculer les intégrales impropres (ou établir leur divergence).

2394. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. 2395. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$. 2396. $\int\limits_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}}$.

2397. $\int\limits_0^1 x\ln x\,dx$. 2398. $\int\limits_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x\ln^2 x}$. 2399. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$.

2400. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$. 2401. $\int\limits_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ $(a<b)$.

2402. $\int\limits_a^b \frac{x\,dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ $(a<b)$. 2403. $\int\limits_3^5 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x-3)(5-x)}}$.

2404. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}}$. 2405. $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}$.

2406. $\int\limits_{-1}^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$. 2407. $\int\limits_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}}\,dx$. 2408. $\int\limits_{-1}^1 \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}}\,dx$.

2409. $\int\limits_{-1}^1 \frac{\ln(2+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}\,dx$. 2410. $\int\limits_{-1}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx$. 2411. $\int\limits_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx$.

Etudier la convergence des intégrales.

2412. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$. 2413. $\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$. 2414. $\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$.

2415. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{e^{\sin x}-1}$. 2416. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x-\cos x}$. 2417. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}}\,dx$.

## Problèmes divers

2418. Une fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle $[a, \infty[$ et tend vers $A \neq 0$ lorsque $x \to \infty$. Etudier la convergence de l'intégrale $\int_a^\infty f(x)\,dx$.

2419. Pour quelles valeurs de $k$ l'intégrale $\int_1^\infty x^k \frac{x+\sin x}{x-\sin x}\,dx$ est-elle convergente ?

2420. Pour quelles valeurs de $k$ convergent les intégrales

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^k \ln x} \quad \text{et} \quad \int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^k}\,?$$

2421. Pour quelles valeurs de $k$ converge l'intégrale $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^k}$ $(b < a)$ ?

2422. Peut-on trouver un $k$ tel que l'intégrale $\int_0^\infty x^k\,dx$ soit convergente ?

2423. Pour quelles valeurs de $k$ et de $t$ l'intégrale $\int_0^\infty \frac{x^k}{1+x^t}\,dx$ est-elle convergente ?

2424. Pour quelles valeurs de $m$ converge l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^m}\,dx$ ?

2425. Pour quelles valeurs de $k$ l'intégrale $\int_0^\pi \frac{dx}{\sin^k x}$ converge-t-elle ?

Calculer les intégrales impropres.

2426. $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$.

2427*. $\int\limits_{-1}^1 \ln\frac{1+x}{1-x}\frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

2428. $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(x-1)\,dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}$.

2429. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$ ($n$ est un entier positif).

2430. $\int\limits_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$ ($n$ est un entier positif).

2431. $\int\limits_0^\infty x^{2n+1}e^{-x^2}\,dx$ ($n$ est un entier positif).

2432. $\int\limits_0^1 (\ln x)^n\,dx$ ($n$ est un entier positif).

2433*. $\int\limits_0^1 \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ pour $m>0$: a) pair; b) impair.

2434*. $\int\limits_0^1 \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}}\,dx$ ($n$ est un entier positif).

2435. $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{(x-\cos\alpha)\sqrt{x^2-1}}$ $(0<\alpha<2\pi)$.

2436*. Montrer que $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}=\int\limits_0^\infty \frac{x^2\,dx}{1+x^4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

2437*. Montrer que $\int\limits_0^\infty \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx=0$.

2438. Calculer l'intégrale $\int\limits_1^\infty \frac{x^2-2}{x^3\sqrt{x^2-1}}\,dx$.

Dans les exercices ci-après calculer les intégrales à l'aide des formules

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ (intégrale de Poisson)},$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2} \text{ (intégrale de Dirichlet)}.$$

2439. $\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx \quad (a>0)$. 2440. $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$.

2441*. $\int_0^\infty x^2 e^{-x^2}\,dx$.

2442. $\int_0^\infty x^{2n} e^{-x^2}\,dx$ ($n$ est un entier positif).

2443. $\int_0^\infty \frac{\sin 2x}{x}\,dx$. 2444. $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx$.

2445. $\int_0^\infty \frac{\sin ax \cos bx}{x}\,dx \quad (a>0,\ b>0)$.

2446*. $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$. 2447*. $\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x}\,dx$. 2448*. $\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2}\,dx$.

2449*. Soit $\varphi(x) = -\int_0^x \ln\cos y\,dy$. (Cette intégrale porte le nom *d'intégrale de Lobatchevski*.) Démontrer la relation

$$\varphi(x) = 2\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) - 2\varphi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) - x\ln 2.$$

Appliquer cette relation au calcul de l'intégrale

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos y\,dy$$

(Euler fut le premier à la calculer).

Calculer les intégrales.

2450. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx$. 2451. $\int_0^{\pi} x\ln\sin x\,dx$. 2452*. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\operatorname{ctg} x\,dx$.

2453*. $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x}\,dx$. 2454. $\int_0^1 \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

# CHAPITRE VIII

# APPLICATIONS DE L'INTÉGRALE

## § 1. Quelques problèmes de géométrie et de statique

### Aire d'une figure

**2455.** Calculer l'aire limitée par les courbes d'équations $y^2 = 2x + 1$ et $x - y - 1 = 0$.

**2456.** Calculer l'aire comprise entre la parabole $y = -x^2 + 4x - 3$ et ses tangentes aux points $(0; -3)$ et $(3; 0)$.

**2457.** Calculer l'aire comprise entre la parabole $y^2 = 2px$ et la normale qui fait un angle de 135° avec l'axe des abscisses.

**2458.** Calculer l'aire comprise entre les paraboles $y = x^2$ et $y = \sqrt{x}$.

**2459.** Calculer l'aire comprise entre les paraboles $y^2 + 8x = 16$ et $y^2 - 24x = 48$.

**2460.** Calculer l'aire limitée par les paraboles $y = x^2$ et $y = x^3/3$.

**2461.** Le cercle $x^2 + y^2 = 8$ est partagé en deux régions par la parabole $y = x^2/2$. Calculer l'aire de chacune d'elles.

**2462.** Trouver l'aire des figures découpées par la parabole $y^2 = 6x$ sur le cercle $x^2 + y^2 = 16$.

**2463.** Dans un cercle de rayon $a$ on découpe une ellipse dont le grand axe est confondu avec un diamètre, et le petit, égal à $2b$. Montrer que l'aire de la partie restante est égale à celle d'une ellipse de demi-axes $a$ et $a - b$.

**2464.** Calculer l'aire comprise entre un arc d'hyperbole et la corde qui passe par le foyer et est perpendiculaire à l'axe réel.

**2465.** Le cercle $x^2 + y^2 = a^2$ est partagé en trois régions par l'hyperbole $x^2 - 2y^2 = a^2/4$. Calculer l'aire de chacune de ces régions.

**2466.** Calculer l'aire des figures curvilignes engendrées par l'intersection de l'ellipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ et de l'hyperbole $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$.

**2467.** Calculer l'aire comprise entre la courbe $y = \frac{1}{1+x^2}$ et la parabole $y = \frac{x^2}{2}$.

**2468.** Calculer l'aire comprise entre la courbe $y = x(x-1)^2$ et l'axe des abscisses.

2469. Calculer l'aire comprise entre l'axe des ordonnées et la courbe $x = y^2 (y - 1)$.

2470. Calculer l'aire limitée dans le premier quadrant par les courbes $y^m = x^n$ et $y^n = x^m$, où $m$ et $n$ sont des entiers positifs. Traiter le cas de l'aire de toute la figure en fonction de la parité des nombres $m$ et $n$.

2471. a) Calculer l'aire du trapèze curviligne limité par l'axe des abscisses et la courbe $y = x - x^2 \sqrt{x}$.

b) Calculer l'aire comprise entre les deux branches de la courbe $(y - x)^2 = x^5$ et la droite $x = 4$.

2472. Calculer l'aire limitée par la courbe $(y - x - 2)^2 = 9x$ et les axes de coordonnées.

2473. Calculer l'aire d'une boucle de courbe $y^2 = x (x - 1)^2$.

2474. Calculer l'aire limitée par la courbe fermée $y^2 = (1 - x^2)^3$.

2475. Calculer l'aire limitée par la courbe fermée $y^2 = x^2 - x^4$.

2476. Calculer l'aire limitée par la courbe fermée $x^4 - ax^3 + a^2y^2 = 0$.

2477. Calculer l'aire de la région finie de la figure comprise entre la courbe $x^2y^2 = 4 (x - 1)$ et la droite passant par ses points d'inflexion.

2478. Calculer l'aire comprise entre les courbes $y = e^x$, $y = e^{-x}$ et la droite $x = 1$.

2479. Calculer l'aire du trapèze curviligne limité par la courbe $y = (x^2 + 2x) e^{-x}$ et l'axe des abscisses.

2480. Calculer l'aire du trapèze curviligne limité par la courbe $y = e^{-x} (x^2 + 3x + 1) + e^2$, l'axe des $Ox$ et les deux droites parallèles à l'axe $Oy$ qui passent par les points d'extrémum de la fonction $y$.

2481. Calculer l'aire de la partie finie de la figure limitée par les courbes $y = 2x^2e^x$ et $y = -x^3e^x$.

2482. a) Calculer l'aire du trapèze curviligne de base $[a, b]$ limité par la courbe $y = \ln x$.

b) Calculer l'aire limitée par la courbe $y = \ln x$, l'axe des ordonnées et les droites $y = \ln a$ et $y = \ln b$.

2483. Calculer l'aire limitée par les courbes $y = \ln x$ et $y = \ln^2 x$.

2484. Calculer l'aire limitée par les courbes

$$y = \frac{\ln x}{4x} \quad \text{et} \quad y = x \ln x.$$

2485. Calculer l'aire de l'un des triangles curvilignes limités par l'axe des abscisses et les courbes $y = \sin x$ et $y = \cos x$.

2486. Calculer l'aire du triangle curviligne limité par l'axe des ordonnées et les courbes $y = \operatorname{tg} x$ et $y = 2/3 \cos x$.

2487. Calculer l'aire de la figure limitée par la courbe $y = \sin^3 x + \cos^3 x$ et le segment joignant deux points d'intersection consécutifs de cette courbe avec l'axe des abscisses.

2488. Calculer l'aire limitée par l'axe des abscisses et les courbes $y = \arcsin x$ et $y = \arccos x$.

2489. Calculer l'aire limitée par la courbe fermée $(y - \arcsin x)^2 = x - x^2$.

2490. Calculer l'aire limitée par une arche de la cycloïde $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ et l'axe des abscisses.

2491. Calculer l'aire limitée par l'astroïde $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

2492. Calculer l'aire limitée par la cardioïde $x = 2a\cos t - a\cos 2t$, $y = 2a\sin t - a\sin 2t$.

2493. Calculer l'aire limitée par: 1) l'épicycloïde

$$x = (R+r)\cos t - r\cos\frac{R+r}{r}t, \quad y = (R+r)\sin t - r\sin\frac{R+r}{r}t;$$

2) l'hypocycloïde

$$x = (R-r)\cos t + r\cos\frac{R-r}{r}t, \quad y = (R-r)\sin t - r\sin\frac{R-r}{r}t,$$

où $R = nr$ ($n$ est un entier), $R$ est le rayon du cercle fixe, $r$ celui du cercle mobile. Le centre du cercle fixe est confondu avec l'origine des coordonnées, $t$ représente l'angle de rotation du rayon $R$ qui aboutit au point de contact de la tangente.

2494. Calculer l'aire de la boucle de la courbe:

1) $x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$; 2) $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$.

---

2495. a) Calculer l'aire balayée par le rayon polaire de la spirale d'Archimède $\rho = a\varphi$ pendant une rotation si le mouvement commence lorsque $\varphi = 0$.

b) Calculer l'aire limitée par la deuxième et la troisième spire de la spirale et le segment d'axe polaire.

2496. Calculer l'aire limitée par les courbes $\rho = a\sin 2\varphi$ (rose à deux branches).

2497. Calculer l'aire limitée par la courbe $\rho = a\cos 5\varphi$.

2498. Calculer l'aire limitée par le limaçon de Pascal $\rho = 2a(2 + \cos\varphi)$.

2499. Calculer l'aire limitée par la courbe $\rho = a\,\mathrm{tg}\,\varphi$ $(a > 0)$ et la droite $\varphi = \pi/4$.

2500. Calculer l'aire de la partie commune des figures limitées par les courbes $\rho = 3 + \cos 4\varphi$ et $\rho = 2 - \cos 4\varphi$.

2501. Calculer l'aire limitée par la courbe $\rho = 2 + \cos 2\varphi$, extérieure à la courbe $\rho = 2 + \sin\varphi$.

2502. Calculer l'aire limitée par la courbe $\rho^2 = a^2\cos n\varphi$ ($n$ est un entier positif).

2503. Montrer que l'aire limitée par deux rayons polaires quelconques de la spirale hyperbolique $\rho\varphi = a$ et son arc est proportionnelle à la différence de ces rayons.

2504. Montrer que l'aire limitée par deux rayons polaires quelconques de la spirale logarithmique $\rho = ae^{m\varphi}$ et son arc est proportionnelle à la différence des carrés de ces rayons.

2505 *. Calculer l'aire comprise entre les parties extérieure et intérieure de la courbe $\rho = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$.

2506. Calculer l'aire limitée par la courbe

$$\rho = \sqrt{1-t^2}, \quad \varphi = \arcsin t + \sqrt{1-t^2}.$$

Dans les exercices 2507-2511 passer aux coordonnées polaires.

2507. Calculer l'aire limitée par la lemniscate de Bernoulli $(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$.

2508. Calculer l'aire de la lemniscate de Bernoulli (cf. exercice 2507) contenue à l'intérieur du cercle $x^2 + y^2 = a^2/2$.

2509. Calculer l'aire limitée par la courbe $(x^2 + y^2)^2 - a^2x^2 - b^2y^2 = 0$.

2510. Calculer l'aire limitée par la courbe

$$(x^2 + y^2)^3 = 4a^2xy\,(x^2 - y^2).$$

2511. Calculer l'aire limitée par la courbe $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.

2512. Calculer l'aire limitée par la courbe $y = \frac{1}{1+x^2}$ et son asymptote.

2513. Calculer l'aire comprise entre la courbe $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ et son asymptote.

2514. Calculer l'aire comprise entre la cissoïde $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ et son asymptote.

2515. Calculer l'aire comprise entre la courbe $xy^2 = 8 - 4x$ et son asymptote.

2516 *. 1) Calculer l'aire limitée par la courbe $y = x^2e^{-x^2}$ et son asymptote.

2) Calculer l'aire limitée par la courbe $y^2 = xe^{-2x}$.

2517. Calculer l'aire comprise entre la tractrice $x = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$, $y = a \sin t$ et l'axe des abscisses.

2518. On considère la courbe $\rho = \frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi}$. Calculer l'aire d'une boucle et l'aire comprise entre cette courbe et son asymptote.

## Longueur d'une courbe *)

2519. Calculer la longueur de la chaînette $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ (de $x_1 = 0$ à $x_2 = b$).

2520. Calculer la longueur de l'arc de parabole $y^2 = 2px$ du sommet au point $M(x, y)$. (Prendre $y$ pour variable indépendante.)

---

*) Dans les problèmes de calcul des arcs, l'intervalle de variation de la variable indépendante, correspondant à l'arc sous-tendu, est indiqué entre parenthèses là où cela est nécessaire.

**2521.** Calculer la longueur de l'arc de la courbe $y = \ln x$ (de $x_1 = \sqrt{3}$ à $x_2 = \sqrt{8}$).

**2522.** Calculer la longueur de l'arc de la courbe $y = \ln (1 - x^2)$ (de $x_1 = 0$ à $x_2 = 1/2$).

**2523.** Calculer la longueur de l'arc de la courbe $y = \ln \frac{e^x+1}{e^x-1}$ (de $x_1 = a$ à $x_2 = b$).

**2524.** Calculer la longueur de l'arc de la parabole semi-cubique $y^2 = 2/3\,(x - 1)^3$ comprise à l'intérieur de la parabole $y^2 = x/3$.

**2525.** Calculer la longueur de l'arc de la parabole semi-cubique $5y^3 = x^2$ comprise à l'intérieur du cercle $x^2 + y^2 = 6$.

**2526.** Calculer la longueur d'une boucle de la courbe $9ay^2 = x\,(x - 3a)^2$.

**2527.** Calculer le périmètre de l'un des triangles curvilignes limités par l'axe des abscisses et les courbes $y = \ln \cos x$ et $y = \ln \sin x$.

**2528.** Calculer la longueur de l'arc de la courbe $x = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$, compris entre son point le plus bas et son sommet (i.e. le point de courbure maximale).

**2529.** Calculer la longueur de la courbe $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin \sqrt{x}$.

**2530.** Calculer la longueur de la courbe $(y - \arcsin x)^2 = 1 - x^2$.

**2531.** Trouver le point de la cycloïde $x = a\,(t - \sin t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$ qui partage le premier arc dans le rapport 1/3.

**2532.** Soient les points $A\,(R, 0)$ et $B\,(0, R)$ de l'astroïde $x = R \cos^3 t$, $y = R \sin^3 t$. Trouver sur l'arc $\overset{\smile}{AB}$ un point $M$ tel que $\frac{\overset{\smile}{AM}}{\overset{\smile}{AB}} = 1/4$.

**2533*.** Calculer la longueur de la courbe $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$.

**2534.** Calculer la longueur de la courbe $x = a \cos^5 t$, $y = a \sin^5 t$.

**2535.** Calculer la longueur de l'arc de la tractrice

$$x = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}\right), \quad y = a \sin t$$

depuis le point $(0, a)$ jusqu'au point $(x, y)$.

**2536.** Calculer la longueur de l'arc de la développante du cercle

$$x = R\,(\cos t + t \sin t), \quad y = R\,(\sin t - t \cos t)$$

(entre $t_1 = 0$ et $t_2 = \pi$).

**2537.** Calculer la longueur de l'arc de la courbe

$$x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \quad y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t$$

(de $t_1 = 0$ à $t_2 = \pi$).

**2538.** Calculer la longueur de la boucle de la courbe $x = t^2$, $y = t - \frac{t^3}{3}$.

**2539.** Deux cercles $(C_1)$ et $(C_2)$ de rayon $b$ roulent sans glisser avec une même vitesse angulaire sur une circonférence $(C)$ de rayon $a$, le premier à l'intérieur, le second à l'extérieur. A l'instant $t = 0$ les points $M_1$ de $(C_1)$, $M_2$ de $(C_2)$ et $M$ de $(C)$ sont confondus. Montrer que le rapport des espaces parcourus par les points $M_1$ et $M_2$ dans un intervalle de temps arbitraire $t$ est constant et égal à $\frac{a+b}{a-b}$ (voir problème 2493).

**2540.** Montrer que la longueur de l'arc de la courbe

$$x = f''(t)\cos t + f'(t)\sin t, \quad y = -f''(t)\sin t + f'(t)\cos t,$$

correspondant à l'intervalle $]t_1, t_2[$, est égale à $[f(t) + f''(t)]\Big|_{t_1}^{t_2}$.

**2541.** Comparer le résultat du calcul précédent au calcul de la longueur de l'arc de la courbe $x = e^t(\cos t + \sin t)$, $y = e^t(\cos t - \sin t)$, depuis $t_1 = 0$ jusqu'à $t_2 = t$.

**2542.** Montrer que les arcs des courbes

$$x = f(t) - \varphi'(t), \quad y = \varphi(t) + f'(t)$$

et

$$x = f'(t)\sin t - \varphi'(t)\cos t, \quad y = f'(t)\cos t + \varphi'(t)\sin t,$$

correspondant à un même intervalle de variation du paramètre $t$ sont d'égale longueur.

**2543.** Calculer la longueur de la première spire de la spirale d'Archimède $\rho = a\varphi$.

**2544.** Montrer que l'arc de parabole $y = \frac{1}{2p}x^2$, correspondant à l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant a$, est de même longueur que l'arc de spirale $\rho = p\varphi$, correspondant à l'intervalle $0 \leqslant \rho \leqslant a$.

**2545.** Calculer la longueur de l'arc de spirale hyperbolique $\rho\varphi = 1$ (entre $\varphi_1 = 3/4$ et $\varphi_2 = 4/3$).

**2546.** Calculer la longueur de la cardioïde $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

**2547.** Calculer la longueur de la courbe $\rho = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$ (cf. exercice 2505).

**2548.** Montrer que la longueur de la courbe $\rho = a\sin^m\frac{\varphi}{m}$ ($m$ est un entier) est commensurable avec $a$ pour $m$ pair et avec la longueur d'une circonférence de rayon $a$ pour $m$ impair.

**2549.** Pour quelles valeurs de l'exposant $k$ ($k \neq 0$) la longueur de l'arc de la courbe $y = ax^k$ s'exprime-t-elle au moyen de fonctions élémentaires? (Utiliser le théorème de Tchébychev sur les conditions d'intégrabilité sous forme finie de la différentielle binôme).

**2550.** Calculer la longueur de la courbe d'équation

$$y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \sqrt{\cos x}\, dx.$$

**2551.** Calculer la longueur de l'arc de la courbe

$$x = \int_{1}^{t} \frac{\cos z}{z}\, dz, \quad y = \int_{1}^{t} \frac{\sin z}{z}\, dz$$

depuis l'origine des coordonnées jusqu'au plus proche point de contact d'une tangente verticale.

**2552.** Montrer que la longueur d'un arc de courbe de la sinusoïde $y = \sin x$ correspondant à une période est égale à la longueur de l'ellipse de demi-axes $\sqrt{2}$ et 1.

**2553.** Montrer que la longueur de l'arc de cycloïde « raccourcie » ou « allongée » $x = mt - n \sin t$, $y = m - n \cos t$ ($m$ et $n$ sont des nombres positifs) depuis $t_1 = 0$ jusqu'à $t_2 = 2\pi$ est égale à la longueur de l'ellipse de demi-axes $a = m + n$, $b = |m - n|$.

**2554 *.** Montrer que la longueur de l'ellipse de demi-axes $a$ et $b$ vérifie la double inégalité $\pi(a + b) < L < \pi\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2 + b^2}$ (problème de I. Bernoulli).

## Volume d'un corps

**2555.** Calculer le volume d'un corps limité par la surface de révolution de la parabole $y^2 = 4x$ autour de son propre axe (paraboloïde de révolution) et le plan perpendiculaire à cet axe et situé à une distance égale à l'unité du sommet de la parabole.

**2556.** Une ellipse de grand axe $2a$ et de petit axe $2b$ tourne *a*) autour de son grand axe, 2) autour de son petit axe. Trouver le volume des ellipsoïdes de révolution obtenus. Etudier le cas particulier du volume de la sphère.

**2557.** Calculer le volume engendré par la révolution d'un segment parabolique symétrique de base $a$ et de hauteur $h$ autour de sa base (« citron » de Cavalieri).

**2558.** Trouver le volume engendré par la révolution autour de l'axe des abscisses de la figure limitée par l'hyperbole $x^2 - y^2 = a^2$ et la droite $x = a + h$ ($h > 0$).

**2559.** Déterminer le volume engendré par la révolution du trapèze curviligne limité par la courbe $y = xe^x$ et les droites $x = 1$ et $y = 0$ autour de l'axe des abscisses.

**2560.** En tournant autour de l'axe des abscisses la chaînette $y = \operatorname{ch} x$ engendre une surface appelée *caténoïde*. Trouver le volume limité par la caténoïde et les deux plans perpendiculaires à l'axe des abscisses aux points d'abscisses $a$ et $b$.

**2561.** Trouver le volume engendré par la révolution de la figure limitée par les arcs de parabole $y = x^2$ et $y^2 = x$ autour de l'axe des abscisses.

**2562.** Trouver le volume engendré par la révolution autour de l'axe des abscisses du trapèze situé au-dessus de l'axe $Ox$ et limité par la courbe $(x - 4)\, y^2 = x\,(x - 3)$.

**2563.** Trouver le volume engendré par la révolution autour de l'axe $Ox$ du trapèze curviligne de base $[0, 1]$ limité par la courbe $y = \arcsin x$.

**2564.** Trouver le volume engendré par la révolution autour de l'axe des ordonnées de la figure limitée par la parabole $y = 2x - x^2$ et l'axe des abscisses.

**2565.** Déterminer le volume engendré par la révolution autour de l'axe des ordonnées du trapèze curviligne limité par l'arc de sinusoïde $y = \sin x$ correspondant à une demi-période.

**2566.** Trouver le volume engendré par la révolution autour de l'axe des abscisses de la lemniscate $(x^2 + y^2)^2 = a^2\,(x^2 - y^2)$.

**2567.** Trouver le volume engendré par la révolution autour de l'axe des abscisses des courbes: 1) $x^4 + y^4 = a^2x^2$; 2) $x^4 + y^4 = x^3$.

**2568.** Trouver le volume engendré par la révolution d'une arche de la cycloïde $x = a\,(t - \sin t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$ autour de sa base.

**2569.** Trouver le volume engendré par la révolution de l'aire limitée par une arche de cycloïde (cf. exercice précédent) et sa base autour de la médiatrice de sa base (axe de symétrie).

**2570.** Trouver le volume engendré par la révolution de l'astroïde $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ autour de son axe de symétrie.

**2571.** Trouver le volume engendré par la révolution autour de l'axe des abscisses de l'aire limitée par l'arc de courbe $x = \frac{c^2}{a} \cos^3 t$, $y = \frac{c^2}{b} \sin^3 t$ (développée de l'ellipse) contenue dans le premier quadrant et les axes de coordonnées.

**2572.** Trouver le volume engendré par la révolution de la courbe $y = \frac{1}{1 + x^2}$ autour de son asymptote (fuseau infini).

**2573.** Trouver le volume engendré par la révolution de la courbe $y^2 = 2exe^{-2x}$ autour de son asymptote.

**2574*.** 1) Trouver le volume engendré par la révolution autour de l'axe des ordonnées de l'aire limitée par la courbe $y = e^{-x^2}$ et son asymptote. 2) Même question pour la révolution autour de l'axe des abscisses.

**2575*.** Trouver le volume engendré par la révolution de l'aire limitée par la courbe $y = x^2e^{-x^2}$ autour de son asymptote.

**2576*.** Trouver le volume engendré par la révolution autour de l'axe des abscisses de l'aire limitée par la courbe $y = \frac{\sin x}{x}$ et l'axe des abscisses.

**2577*.** Trouver le volume engendré par la révolution de la cissoïde $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ $(a > 0)$ autour de son asymptote.

**2578.** Trouver le volume engendré par la révolution de la tractrice $x = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}\right)$, $y = a \sin t$ autour de son asymptote.

---

**2579*.** Trouver le volume limité par l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

**2580.** Trouver le volume limité par le paraboloïde elliptique $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{}$ et le plan $z = 1$.

2) Trouver le volume limité par l'hyperboloïde à une nappe $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1$ et les plans $z = -1$ et $z = 2$.

**2581.** Trouver les volumes limités par le paraboloïde $z = x^2 + 2y^2$ et l'ellipsoïde $x^2 + 2y^2 + z^2 = 6$.

**2582.** Trouver les volumes limités par l'hyperboloïde à deux nappes $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$ et l'ellipsoïde $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$.

**2583.** Trouver le volume limité par la surface conique $(z-2)^2 = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2}$ et le plan $z = 0$.

**2584.** Trouver le volume limité par le paraboloïde $2z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ et le cône $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z^2$.

**2585*.** Trouver le volume limité par l'intersection d'un cylindre par un plan passant par le diamètre de la base (« segment cylindrique », fig. 43). Poser en particulier $R = 10$ cm et $H = 6$ cm.

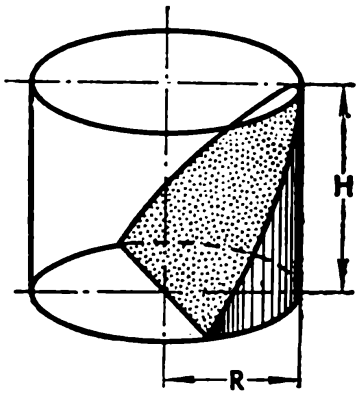


Fig. 43

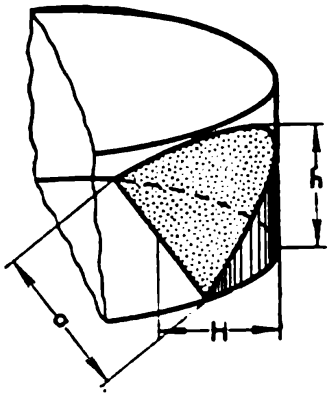


Fig. 44

**2586.** Un cylindre parabolique est coupé par deux plans dont l'un est perpendiculaire à la génératrice comme l'indique la fig. 44. La base commune des segments paraboliques est $a = 10$ cm, la

hauteur du segment parabolique servant de base est $H = 8$ cm, la hauteur du corps est $h = 6$ cm. Trouver le volume du corps.

**2587.** Un cylindre dont la base a la forme d'une ellipse est coupé par un plan oblique passant par le petit axe de l'ellipse.

Trouver le volume du corps engendré. Les dimensions sont indiquées sur la fig. 45.

**2588*.** Sur toutes les cordes d'un cercle de rayon $R$, parallèles à une direction donnée, on construit des segments paraboliques

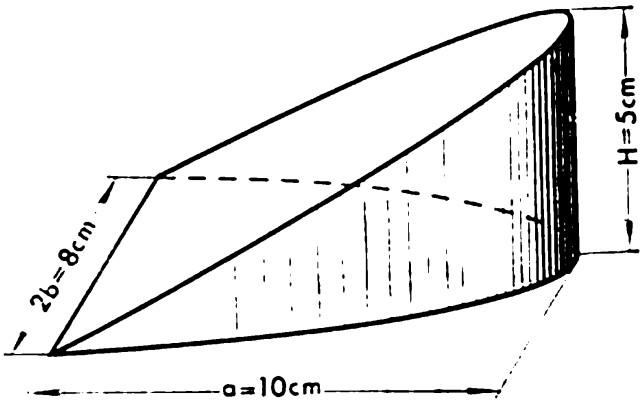


Fig. 45

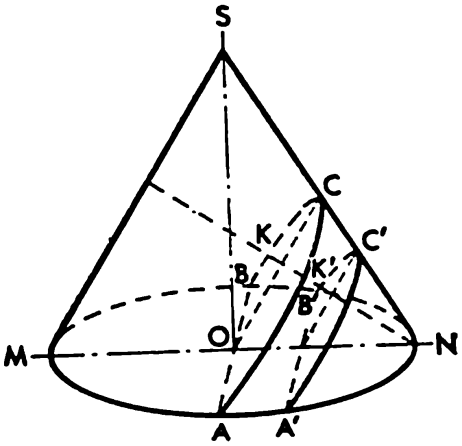


Fig. 46

symétriques de hauteur constante $H$. Les plans des segments sont perpendiculaires au plan du cercle. Trouver le volume du corps engendré.

**2589*.** Un cône droit de base circulaire de rayon $R$ et de hauteur $H$ est coupé en deux parties par un plan passant par le centre de la base et parallèle à la génératrice (fig. 46). Trouver les volumes des deux parties du cône. (Les sections du cône par les plans parallèles à la génératrice sont des segments paraboliques).

**2590.** Le centre d'un carré de dimension variable se déplace le long d'un diamètre d'un cercle de rayon $a$ de telle sorte que le plan du carré reste perpendiculaire à celui du cercle et deux sommets opposés du carré décrivent la circonférence de ce cercle. Trouver le volume du corps engendré.

**2591.** Un cercle de rayon variable se déplace de telle sorte qu'un de ses points parcourt l'axe des abscisses, son centre décrit la circonférence $x^2 + y^2 = r^2$ et le plan qui le contient est perpendiculaire à l'axe des abscisses. Trouver le volume du corps engendré.

**2592.** Les axes de deux cylindres égaux se coupent à angle droit. Trouver le volume de leur intersection (sur la fig. 47 est représentée la huitième partie du corps). (Examiner les sections engendrées par des plans parallèles aux axes des deux cylindres.)

**2593.** Deux cylindres obliques possèdent une même hauteur $H$ et une base supérieure commune de rayon $R$, quant à leurs bases inférieures, elles sont tangentes (fig. 48). Trouver le volume de l'intersection de ces cylindres.

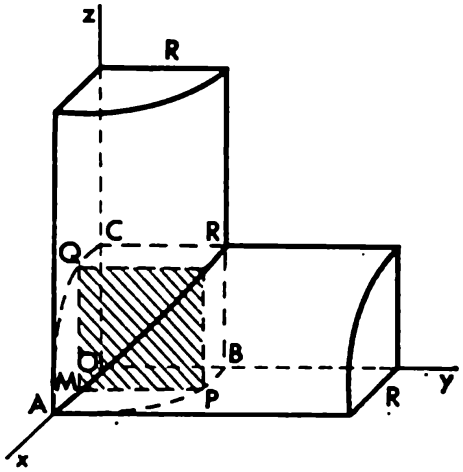


Fig. 47

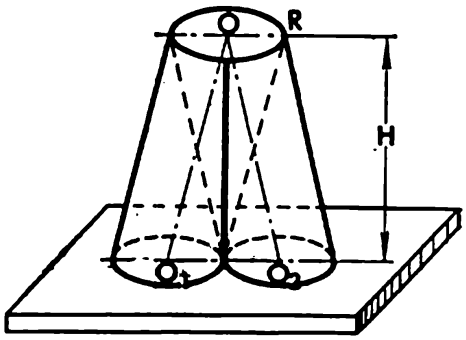


Fig. 48

## Aire d'une surface de révolution

**2594.** Trouver l'aire de la surface engendrée par la révolution de la parabole $y^2 = 4ax$ autour de l'axe des abscisses depuis le sommet jusqu'au point d'abscisse $x = 3a$.

**2595.** Trouver l'aire de la surface engendrée par la révolution de la parabole cubique $3y - x^3 = 0$ autour de l'axe des abscisses (entre $x_1 = 0$ et $x_2 = a$).

**2596.** Trouver l'aire de la caténoïde (surface engendrée par la révolution de la chaînette $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ autour de l'axe des abscisses) (entre $x_1 = 0$ et $x_2 = a$).

**2597.** Trouver les aires des surfaces engendrées par la révolution de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ autour du grand axe (ellipsoïde allongé) et autour du petit axe (ellipsoïde raccourci).

**2598.** Trouver l'aire de la surface fusiforme engendrée par la révolution autour de l'axe des abscisses d'une arche de sinusoïde $y = \sin x$.

**2599.** Trouver l'aire de la surface engendrée par la révolution de la tangensoïde $y = \operatorname{tg} x$ autour de l'axe des abscisses entre les points $(0, 0)$ et $(\pi/4, 1)$.

**2600.** Trouver l'aire de la surface engendrée par la révolution de la boucle de la courbe $9ay^2 = x(3a - x)^2$ autour de l'axe des abscisses.

**2601.** Trouver l'aire de la surface engendrée par la révolution de l'arc de cercle $x^2 + y^2 = a^2$ situé dans le premier quadrant autour de la corde qui le sous-tend.

2602. Trouver l'aire de la surface engendrée par la révolution autour de l'axe des abscisses de l'arc de la courbe $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$ entre les points $t_1 = 0$ et $t_2 = \frac{\pi}{2}$.

2603. Trouver l'aire de la surface engendrée par la révolution autour de l'axe des abscisses de l'astroïde $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.

2604. Trouver l'aire de la surface engendrée par la révolution d'un arc de cycloïde autour de son axe de symétrie (cf. exercice 2568).

2605. Trouver l'aire de la surface engendrée par la révolution de la cardioïde $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ autour de l'axe polaire.

2606. Trouver l'aire de la surface engendrée par la révolution du cercle $\rho = 2r \sin \varphi$ autour de l'axe polaire.

2607. Trouver l'aire de la surface engendrée par la révolution de la lemniscate $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ autour de l'axe polaire.

2608. Trouver l'aire de la surface engendrée par la révolution de l'arc infini de la courbe $y = e^{-x}$ correspondant aux valeurs positives de $x$ autour de l'axe des abscisses.

2609. Trouver l'aire de la surface infinie engendrée par la révolution de la tractrice $x = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}\right)$, $y = a \sin t$ autour de l'axe des abscisses.

## Moments et centre de gravité*)

2610. Trouver le moment statique d'un rectangle de base $a$ et de hauteur $h$ par rapport à sa base.

2611. Trouver le moment statique d'un triangle rectangle isocèle de côté $a$ par rapport à chacun de ses côtés.

2612. Démontrer la formule suivante

$$\int_a^b (ax + b) f(x)\, dx = (a\xi + b) \int_a^b f(x)\, dx,$$

où $\xi$ est l'abscisse du centre de gravité du trapèze curviligne de base $[a, b]$ limité par la courbe $y = f(x)$.

2613. Trouver le centre de gravité d'un segment parabolique symétrique de base $a$ et de hauteur $h$.

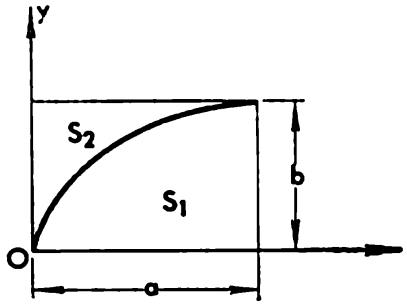

Fig. 49

2614. Un rectangle de côtés $a$ et $b$ est divisé en deux régions par un arc de parabole dont le sommet se confond avec l'un des sommets du rectangle et qui passe par le sommet opposé (fig. 49). Trouver le centre de gravité des deux parties $S_1$ et $S_2$ du rectangle.

2615. Trouver les coordonnées du centre de gravité du demi-cercle $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

*) Dans tous les problèmes de ce chapitre (2610-2662) la densité est égale à l'unité.

**2616.** Trouver les coordonnées du centre de gravité du demi-cercle limité par l'axe des abscisses et le demi-cercle $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

**2617.** Trouver le centre de gravité d'un arc de cercle de rayon $R$ intercepté par un angle au centre $\alpha$.

**2618.** Trouver les coordonnées du centre de gravité de la figure limitée par les axes de coordonnées et la parabole $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

**2619.** Trouver les coordonnées du centre de gravité de la figure limitée par les axes de coordonnées et l'arc d'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ contenu dans le premier quadrant.

**2620.** Trouver le moment statique de l'arc d'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ contenu dans le premier quadrant par rapport à l'axe des abscisses.

**2621.** Trouver les coordonnées du centre de gravité de la figure limitée par l'arc de sinusoïde $y = \sin x$ et le segment de l'axe des abscisses compris entre $x_1 = 0$ et $x_2 = \pi$.

Dans les exercices 2622-2624 trouver le moment statique des figures limitées par les courbes données par rapport à l'axe des abscisses.

**2622.** $y = \frac{2}{1+x^2}$ et $y = x^2$.

**2623.** $y = \sin x$ et $y = \frac{1}{2}$ (pour un segment).

**2624.** $y = x^2$ et $y = \sqrt{x}$.

**2625.** Trouver les coordonnées du centre de gravité de la figure limitée par la courbe fermée $y^2 = ax^3 - x^4$.

**2626.** Trouver les coordonnées du centre de gravité de l'arc de la chaînette $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ compris entre les points d'abscisses $x_1 = -a$ et $x_2 = a$.

**2627.** Montrer que le moment statique d'un arc arbitraire de parabole par rapport à l'axe de cette parabole est proportionnel à la différence des rayons de courbure aux extrémités de cet arc. Le coefficient de proportionnalité est égal à $p/3$, où $p$ est le paramètre de la parabole.

**2628.** Trouver les coordonnées du centre de gravité du premier arc de la cycloïde $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

**2629.** Trouver les coordonnées du centre de gravité de la figure limitée par le premier arc de cycloïde et l'axe des abscisses.

**2630.** Trouver les coordonnées du centre de gravité de l'arc de l'astroïde $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, compris dans le premier quadrant.

**2631.** Trouver les coordonnées du centre de gravité de la figure limitée par les axes de coordonnées et l'arc de l'astroïde (dans le premier quadrant).

**2632.** Montrer que l'abscisse et l'ordonnée du centre de gravité du secteur limité par deux rayons polaires et la courbe d'équation

$\rho = \rho(\varphi)$ (en coordonnées polaires) ont pour expressions:

$$x = \frac{2}{3} \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^3 \cos\varphi \, d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 \, d\varphi}, \qquad y = \frac{2}{3} \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^3 \sin\varphi \, d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 \, d\varphi}.$$

**2633.** Trouver les coordonnées cartésiennes du centre de gravité du secteur limité par la demi-spire de la spirale d'Archimède $\rho = a\varphi$ (comprise entre $\varphi_1 = 0$ et $\varphi_2 = \pi$).

**2634.** Trouver le centre de gravité du secteur de cercle de rayon $R$ d'angle au centre $2\alpha$.

**2635.** Trouver les coordonnées cartésiennes du centre de gravité de la figure limitée par la cardioïde $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

**2636.** Trouver les coordonnées cartésiennes du centre de gravité de la figure limitée par la boucle de droite de la lemniscate de Bernoulli $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

**2637.** Montrer que les coordonnées cartésiennes du centre de gravité de l'arc de la courbe d'équation $\rho = \rho(\varphi)$ en coordonnées polaires ont pour expressions:

$$y = \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho \cos\varphi \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \, d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \, d\varphi}, \qquad y = \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho \sin\varphi \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \, d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \, d\varphi}.$$

**2638.** Trouver les coordonnées cartésiennes du centre de gravité de l'arc de spirale logarithmique $\rho = ae^{\varphi}$ (entre $\varphi_1 = \pi/2$ et $\varphi_2 = \pi$).

**2639.** Trouver les coordonnées cartésiennes du centre de gravité de l'arc de cardioïde $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ (entre $\varphi_1 = 0$ et $\varphi_2 = \pi$).

---

**2640.** A quelle distance du centre géométrique se trouve le centre de gravité d'une hémisphère de rayon $R$?

**2641.** Trouver le centre de gravité de la surface d'une hémisphère.

**2642.** On donne un cône droit de base circulaire; le rayon de base est $R$, la hauteur $H$. Trouver la distance de la base du cône au centre de gravité de la surface latérale, de la surface totale et du volume.

**2643.** A quelle distance de la base se trouve le centre de gravité d'un corps limité par un paraboloïde de révolution et un plan perpendiculaire à son axe? La hauteur du corps est égale à $h$.

**2644.** Trouver le moment d'inertie du segment $AB = l$ par rapport à un axe contenu dans le même plan sachant que les extrémités $A$ et $B$ se trouvent respectivement à une distance $a$ et $b$ de l'axe.

**2645.** Trouver le moment d'inertie d'une demi-circonférence de rayon $R$ par rapport à son diamètre.

**2646.** Trouver le moment d'inertie de l'arc de la courbe $y = e^x$ $\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right)$ par rapport à l'axe des abscisses.

**2647.** Trouver les moments d'inertie par rapport aux deux axes de coordonnées d'une arche de cycloïde $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

**2648.** Trouver le moment d'inertie d'un rectangle de côtés $a$ et $b$ par rapport à un côté $a$.

**2649.** Trouver le moment d'inertie d'un triangle de base $a$ et de hauteur $h$ par rapport à

1) la base;

2) la droite parallèle à la base qui passe par le sommet;

3) la droite parallèle à la base qui passe par le centre de gravité.

**2650.** Trouver le moment d'inertie d'un demi-cercle de rayon $R$ par rapport à son diamètre.

**2651.** Trouver le moment d'inertie d'un cercle de rayon $R$ par rapport à son centre.

**2652.** Trouver le moment d'inertie d'une ellipse de demi-axes $a$ et $b$ par rapport aux deux axes.

**2653.** Trouver le moment d'inertie d'un cylindre de rayon de base $R$ et de hauteur $H$ par rapport à son axe.

**2654.** Trouver le moment d'inertie d'un cône de rayon de base $R$ et de hauteur $H$ par rapport à son axe.

**2655.** Trouver le moment d'inertie d'une sphère de rayon $R$ par rapport à un diamètre.

**2656.** Une ellipse tourne autour de l'un de ses axes. Trouver le moment d'inertie de l'ellipsoïde de révolution engendré.

**2657.** Trouver le moment d'inertie d'un paraboloïde de révolution de rayon de base $R$ et de hauteur $H$ par rapport à l'axe de révolution.

**2658.** Trouver le moment d'inertie par rapport à l'axe $Oz$ du corps limité par l'hyperboloïde à une nappe $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - z^2 = 1$ et les plans $z = 0$ et $z = 1$.

**2659.** Un trapèze curviligne limité par les courbes $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$ et $x = 1$ tourne

1) autour de l'axe $Ox$; 2) autour de l'axe $Oy$.

Trouver le moment d'inertie du corps de révolution engendré.

**2660.** Trouver le moment d'inertie de la surface latérale d'un cylindre de rayon de base $R$ et de hauteur $H$ par rapport à son axe.

**2661.** Trouver le moment d'inertie de la surface latérale d'un cône de rayon de base $R$ et de hauteur $H$ par rapport à son axe.

**2662.** Trouver le moment d'inertie de la surface d'une sphère de rayon $R$ par rapport à un diamètre.

## Théorème de Guldin

**2663.** Trouver le volume engendré par la révolution d'un hexagone régulier de côté $a$ autour de l'un de ses côtés.

**2664.** Trouver le volume engendré par la révolution d'une ellipse d'axes $AA_1 = 2a$ et $BB_1 = 2b$ autour d'une droite qui est parallèle à l'axe $AA_1$ et en est distante de $3b$.

**2665.** Trouver le volume et la surface engendrés par la révolution d'une astroïde autour d'une droite passant par deux sommets consécutifs (cf. exercice 2630).

**2666.** Trouver le volume et la surface engendrés par la révolution des premières arches des cycloïdes

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

et

$$x = a(t - \sin t), \quad y = -a(1 - \cos t)$$

autour de l'axe des ordonnées.

**2667.** Un carré tourne autour d'une droite située dans le même plan que lui et passant par l'un de ses sommets. Trouver la position que doit occuper cette droite par rapport au carré pour que le volume de révolution engendré soit maximal. Même question pour un triangle.

## § 2. Quelques problèmes de physique

**2668.** La vitesse d'un corps est donnée par la formule $v = \sqrt{1 + t}$ m/s. Trouver l'espace parcouru pendant les 10 premières secondes après le départ.

**2669.** La vitesse d'un mouvement vibratoire harmonique le long de l'axe des abscisses au voisinage de l'origine des coordonnées est donnée par la formule

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2\pi}{T} \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_0\right)$$

($t$ est le temps, $T$ la période de vibration, $\varphi_0$ la phase initiale). Trouver la position du point à l'instant $t_2$ sachant qu'au moment $t_1$ il se trouvait en $x = x_1$.

---

La force $f$ d'interaction de deux masses ponctuelles est donnée par la formule $f = k\frac{mM}{r^2}$, où $m$ et $M$ sont les masses respectives des points, $r$ la distance qui les sépare et $k$ le coefficient de proportionnalité qui est égal à $6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$ (loi de Newton). Utiliser cette formule dans les exercices 2670-2678. (On suppose que la densité est constante.)

**2670.** Une tige $AB$ de longueur $l$ et de masse $M$ attire un point $C$ de masse $m$ situé sur son prolongement à une distance $a$ de l'extrémité $B$ qui est la plus proche. Trouver la force d'interaction de la tige et du point. Quelle masse ponctuelle faut-il placer en $A$ pour qu'elle agisse sur $C$ avec la même force que la tige $AB$? Quel est le travail accompli par la force d'attraction lorsque le point vient de la distance $r_1$ à une distance $r_2$ de la tige en se déplaçant sur le prolongement de celle-ci?

**2671.** Trouver la force avec laquelle un demi-anneau de rayon $r$ et de masse $M$ agit sur un point matériel de masse $m$ situé en son centre.

**2672.** Trouver la force d'action d'un anneau en fil de fer de masse $M$ et rayon $R$ sur un point matériel $C$ de masse $m$ situé sur une droite passant par le centre de cet anneau et perpendiculaire à son plan. Le point est situé à une distance $a$ du centre de l'anneau. Quel travail accomplira la force d'attraction pour amener le point de l'infini au centre de l'anneau?

**2673.** Appliquer le résultat de l'exercice précédent au calcul de la force d'action d'un disque plan de rayon $R$ et de masse $M$ sur un point matériel de masse $m$ situé sur son axe à une distance $a$ du centre.

**2674.** Appliquer le résultat de l'exercice précédent au calcul de la force d'action d'un plan infini dont la masse est équirépartie et la densité surfacique est $\sigma$, sur un point matériel de masse $m$. Le point est situé à une distance $a$ du plan.

**2675.** Les rayons de base d'un cône circulaire droit tronqué sont égaux à $R$ et $r$, la hauteur est $h$, la densité $\gamma$. Quelle force exerce-t-il sur un point matériel de masse $m$ placé en son sommet?

**2676.** Avec quelle force la ligne polygonale matérielle $y = |x| + 1$ attire-t-elle un point matériel de masse $m$ se trouvant à l'origine des coordonnées? (La densité linéaire est égale à $\gamma$.)

**2677.** Montrer que la ligne polygonale matérielle $y = a|x| + 1$ ($a \geqslant 0$) attire un point matériel situé à l'origine des coordonnées avec une force indépendante de $a$, i.e. qui ne dépend pas de l'angle des côtés de la ligne.

**2678*.** Deux tiges identiques (de longueur $l$ et de masse $M$ chacune) reposent sur une même droite à une distance $l$ l'une de l'autre. Trouver la force d'attraction.

---

**2679.** Une goutte de masse initiale $M$ tombe sous l'action de la force de pesanteur et s'évapore uniformément en perdant une masse $m$ par seconde. Trouver le travail fourni par la force de pesanteur depuis l'instant où le mouvement a commencé jusqu'à l'évaporation totale de la goutte. (On négligera la résistance de l'air.)

**2680.** Quel travail faut-il fournir pour entasser du sable sous la forme d'un cône tronqué de hauteur $H$ et de rayons de base $R$ et $r$ ($r < R$)? Le poids spécifique est égal à $d$ (le sable est pris du plan sur lequel repose la grande base du cône).

**2681.** Les dimensions de la pyramide de Chéops sont approximativement les suivantes: hauteur 140 m, côté de la base carrée — 200 m. Le poids spécifique de la pierre qui a servi à la construction est environ de 2,5 g/cm$^3$. Trouver le travail fourni pour vaincre la force de pesanteur.

**2682.** Trouver le travail qu'il faut fournir pour pomper l'eau d'un réservoir cylindrique de hauteur $H = 5$ m et de rayon du cercle de base $R = 3$ m.

**2683.** Trouver le travail effectué pour pomper un liquide de poids spécifique $d$ d'un réservoir ayant la forme d'un cône renversé de hauteur $H$ et de rayon de base $R$. Comment variera le résultat si le cône est debout?

**2684.** Trouver le travail qu'il faut fournir pour pomper l'eau d'un réservoir hémisphérique de rayon $R = 0{,}6$ m.

**2685.** Une chaudière ayant la forme d'un paraboloïde de révolution (fig. 50), de rayon de base $R = 2$ m et de hauteur $H = 4$ m,

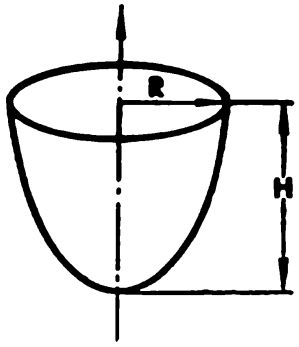


Fig. 50

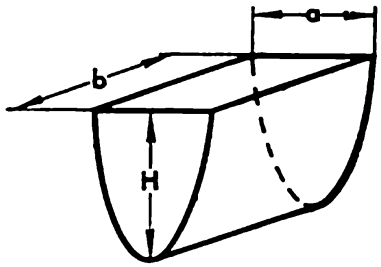


Fig. 51

est remplie d'un liquide de poids spécifique $d = 0{,}8$ g/cm³. Trouver le travail nécessaire pour la vider.

**2686.** Trouver le travail accompli pour vider une citerne pleine d'eau dont les dimensions sont les suivantes (fig. 51): $a = 0{,}75$ m, $b = 1{,}2$ m, $H = 1$ m. La surface latérale de la citerne est un cylindre parabolique.

---

L'énergie cinétique d'un corps tournant autour d'un axe fixe est égale à $\frac{1}{2} J\omega^2$, où $\omega$ est la vitesse angulaire, $J$ le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation. Utiliser cette donnée dans les exercices 2687-2692.

**2687.** Une tige $AB$ (fig. 52) tourne dans un plan horizontal autour de l'axe $OO'$ avec une vitesse angulaire $\omega = 10\pi$ s$^{-1}$. La section transversale de la tige est $S = 4$ cm², la longueur est $l = 20$ cm et la densité $\gamma = 7{,}8$ g/cm³. Trouver l'énergie cinétique de la tige.

**2688.** Une lame rectangulaire de côtés $a = 50$ cm et $b = 40$ cm tourne autour d'un côté $a$ avec une vitesse angulaire constante égale à $3\pi$ s$^{-1}$. Trouver l'énergie cinétique de cette lame sachant que son épaisseur est 0,3 cm et la densité $\gamma = 8$ g/cm³.

**2689.** Une lame triangulaire de base $a = 40$ cm et de hauteur $h = 30$ cm tourne autour de sa base à une vitesse angulaire constante $\omega = 5\pi$ s$^{-1}$. Trouver son énergie cinétique sachant que son épaisseur est $d = 0{,}2$ cm et sa densité $\gamma = 2{,}2$ g/cm³.

**2690.** Une lame ayant la forme d'un segment parabolique (fig. 53) tourne autour de l'axe de la parabole à une vitesse angulaire

constante égale à $\omega = 4\pi\ s^{-1}$. Trouver l'énergie cinétique de cette lame sachant que la base du segment est $a = 20$ cm, sa hauteur $h = 30$ cm, l'épaisseur de la lame $d = 0{,}3$ cm et sa densité $\gamma = 7{,}8$ g/cm$^3$.

**2691.** Un cylindre circulaire de rayon de base $R$ et de hauteur $H$ tourne autour de son axe à une vitesse angulaire constante $\omega$. Trouver l'énergie cinétique de ce cylindre sachant que sa densité est $\gamma$.

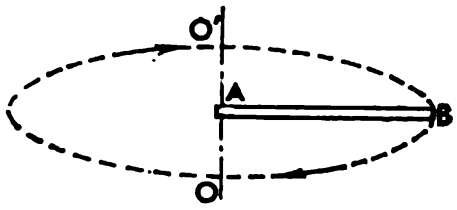


Fig. 52

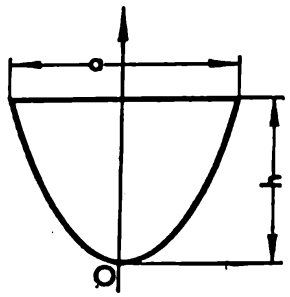


Fig. 53

**2692.** Un fil fin de masse $M$ tordu sous forme d'un demi-cercle de rayon $R$ tourne autour de l'axe passant par les extrémités du demi-cercle à raison de $n$ tours par minute. Trouver son énergie cinétique.

Trouver l'énergie cinétique si l'axe de rotation est la tangente au milieu du demi-cercle.

---

**2693.** Une lame triangulaire de base $a$ et de hauteur $h$ est plongée verticalement dans de l'eau de telle manière que sa base soit confondue avec la surface libre de l'eau.

a) Déterminer la pression qui s'exerce sur chaque face de la lame.

b) De combien de fois croîtra la pression si l'on renverse la lame de manière que son sommet se confonde avec la surface libre et la base soit parallèle à cette surface?

**2694.** Une lame carrée est plongée verticalement dans l'eau de manière que l'un quelconque des sommets du carré soit à la surface libre de l'eau et une diagonale parallèle à la surface. Trouver la pression de l'eau sur chaque face de la lame sachant que le côté du carré est $a$.

**2695.** Trouver la pression exercée par l'eau sur une digue ayant la forme d'un trapèze isocèle de base supérieure $a = 6{,}4$ m, de base inférieure $b = 4{,}2$ m et de hauteur $H = 3$ m.

**2696.** Une lame ayant la forme d'une ellipse est à moitié plongée (verticalement) dans un liquide de telle manière que l'un des axes (de longueur $2b$) soit situé sur la surface. Trouver la poussée du liquide sur chaque paroi de la lame sachant que la longueur du demi-axe immergé est $a$ et le poids spécifique du liquide $d$.

**2697.** Une lame rectangulaire de côtés $a$ et $b$ ($a > b$) est plongée dans un liquide sous un angle $\alpha$ avec la surface. La longueur est immergée à une profondeur $h$ parallèlement à la surface libre du

liquide. Trouver la poussée du liquide sur chaque face sachant que le poids spécifique est $d$.

**2698.** Un récipient de base rectangulaire est rempli d'eau et d'huile en quantité égale. Sachant que l'huile pèse deux fois moins que l'eau montrer que la poussée exercée sur chaque paroi du récipient diminuera de $n = \frac{1}{5}$ si l'on remplace ce mélange uniquement par de l'huile. (On considérera que toute l'huile est en haut.)

---

Dans les exercices 2699 et 2700 on se servira du principe d'Archimède: tout corps plongé dans un liquide subit une poussée verticale de bas en haut égale au poids du liquide déplacé.

**2699.** Un flotteur en bois de forme cylindrique, de surface de base $S = 4\,000$ cm² et de hauteur $H = 50$ cm flotte à la surface de l'eau. Le poids spécifique du bois est $d = 0{,}8$ g/cm³. a) Quel travail faut-il fournir pour le tirer de l'eau? b) Quel travail faut-il fournir pour l'immerger complètement?

**2700.** Une sphère de rayon $R$ et de poids spécifique 1 est plongée dans l'eau de façon à être tangente à la surface libre de l'eau. Quel travail faut-il fournir pour la tirer de l'eau?

---

Dans les exercices 2701-2706 nous allons étudier l'écoulement d'un fluide à travers un orifice. On rappelle que la vitesse d'écoulement obéit à la loi de Torricelli $v = \sqrt{2gh}$, où $h$ est la hauteur de fluide au-dessus de l'orifice, $g$ l'accélération de la force de pesanteur *).

**2701.** On pratique un orifice au fond d'un récipient de forme cylindrique de surface de base 100 cm² et de hauteur 30 cm. Trouver l'aire de cet orifice sachant que le récipient se videra de son eau au bout de 2 mn.

**2702.** Un entonnoir conique de hauteur $H = 20$ cm est rempli d'eau. Le rayon de la base supérieure est $R = 12$ cm. Le rayon du col est $r = 0{,}3$ cm. a) Au bout de combien de temps le niveau de l'eau baissera-t-il de 5 cm dans l'entonnoir? b) Au bout de combien de temps l'entonnoir sera-t-il vide?

**2703.** Au fond d'une chaudière hémisphérique de rayon $R = 43$ cm on a pratiqué un trou de surface $S = 0{,}2$ cm². Au bout de combien de temps cette chaudière se videra-t-elle de son eau?

**2704.** Une chaudière a la forme d'un cylindre elliptique d'axe horizontal. Les demi-axes de la section elliptique (perpendiculaire à l'axe du cylindre) sont égaux à $b$ (l'axe horizontal) et à $a$ (l'axe vertical); la génératrice du cylindre est égale à $L$ (fig. 54). La chau-

---

*) Dans cette forme la loi de Torricelli ne s'applique qu'aux fluides parfaits. Les réponses aux exercices sont données relativement à un fluide parfait. (En pratique on utilise la formule $v = \mu \sqrt{2gh}$, où $\mu$ est un coefficient qui dépend de la viscosité du fluide et de la nature de l'orifice d'où coule ce fluide. Pour l'eau, dans le cas simple $\mu = 0{,}6$.)

dière est à moitié remplie d'eau. Au bout de combien de temps se videra-t-elle de son eau à travers un orifice de surface $S$?

**2705.** Dans une paroi verticale d'un récipient en forme de prisme plein d'eau on pratique une fente rectangulaire verticale de hauteur $h$ et de largeur $b$. L'extrémité supérieure de la fente est parallèle à la surface de l'eau et en est située à une distance $H$. Quel volume d'eau s'écoulera-t-il en 1 s si le niveau de l'eau est maintenu toujours à la même hauteur? Traiter le cas $H = 0$ (problème du déversoir).

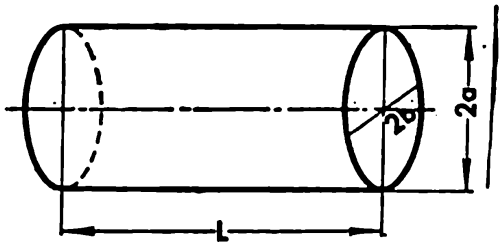


Fig. 54

**2706.** Un récipient ayant la forme d'un parallélépipède de 100 cm² de surface de base est rempli d'eau. On pratique sur sa paroi latérale une fente étroite de 20 cm de hauteur et de 0,1 cm de largeur (fig. 55). Au bout de combien de temps le niveau baissera-t-il a) de 5 cm? b) de 10 cm? c) de 19 cm? d) de 20 cm? (Utiliser le résultat de l'exercice précédent.)

---

L'équation d'état d'un gaz parfait est $pv = RT$, où $p$ est la pression, $v$ le volume, $T$ la température absolue et $R$ la constante de la masse de gaz donnée. Dans les exercices 2707-2709 on supposera que les gaz sont parfaits.

**2707.** Un cylindre de 10 cm² de surface de base et de 30 cm de hauteur contient de l'air atmosphérique. Quel travail faut-il effectuer pour déplacer un piston de 20 cm du sommet vers la base (fig. 56)? La pression atmosphérique est égale à 1,033 kgf/cm². Le processus est isothermique, i.e. se déroule à une température constante. (Pour obtenir le travail en kgm il faut exprimer la pression en kgf/m² et le volume en m³.)

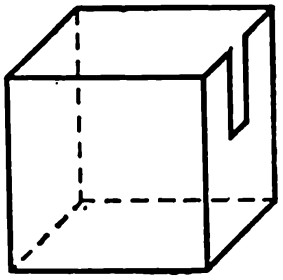

Fig. 55

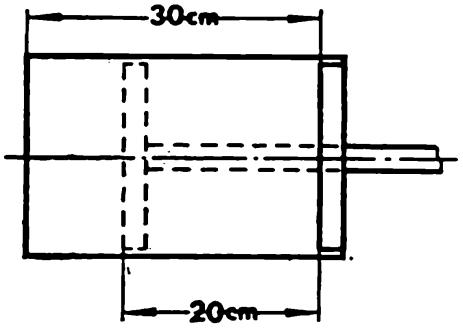


Fig. 56

**2708.** Un récipient cylindrique de 100 cm² de surface latérale contient de l'air à la pression atmosphérique. Le récipient comporte un piston. Au départ il se trouve à 0,1 m du fond. En plaçant le

cylindre dans le vide on constate que l'air se dilate et pousse le piston. 1) Trouver le travail fourni par l'air pour soulever le piston d'une hauteur de a) 0,2 m, b) 0,5 m, c) 1 m. 2) Ce travail peut-il tendre vers l'infini lorsque le gaz se dilatera indéfiniment? (Le processus est isothermique comme dans l'exemple précédent).

**2709.** Un récipient cylindrique de volume $v_0 = 0{,}1$ m$^3$ est plein d'air atmosphérique que l'on comprime en poussant rapidement un piston (on suppose que le processus est adiabatique, i.e. qu'il se déroule sans gain ou perte de chaleur). Quel travail faut-il fournir pour comprimer l'air jusqu'à un volume $v = 0{,}03$ m$^3$? (La pression atmosphérique est égale à 1,033 kgf/cm$^2$.) Dans le cas d'un processus adiabatique on a la relation suivante entre la pression et le volume d'un gaz: $pv^\gamma = p_0 v_0^\gamma$ (équation de Poisson). $\gamma \approx 1{,}40$ pour les gaz diatomiques (ainsi que pour l'air).

---

D'après la loi de Newton la vitesse de refroidissement d'un corps est proportionnelle à la différence entre la température du corps et la température du milieu ambiant. Appliquer cette loi dans les exercices 2710-2711.

**2710.** Un corps dont la température est de 25° est plongé dans un thermostat (la température du thermostat est maintenue à 0°). Combien de temps le corps mettra-t-il pour se refroidir jusqu'à 10° si en 20 mn sa température tombe jusqu'à 20°?

**2711.** Un corps voit sa température baisser de 30° à 22,5° pendant les 30 mn qu'il passe dans un thermostat maintenu à 0°. Quelle sera sa température trois heures après le début de l'expérience?

---

D'après la loi de Coulomb, la force d'interaction de deux charges électriques est égale à $\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2}$ N, où $q_1$ et $q_2$ sont les charges exprimées en coulombs, $r$ la distance des deux charges en m, la constante électrique $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ F/m ($4\pi\varepsilon_0 = 1{,}11 \cdot 10^{-10}$), $\varepsilon$ est la constante diélectrique ou permittivité du milieu considéré (pour l'air $\varepsilon \approx 1$). (Les unités sont celles du système M.K.S.A.) Appliquer cette loi dans les exercices 2712-2714.

**2712.** Une droite infinie est uniformément chargée d'électricité positive (la densité linéaire de l'électricité est $\sigma$). Trouver la force exercée par cette droite sur une charge unitaire placée en un point $A$ à une distance $a$ de cette droite. La constante diélectrique est égale à l'unité.

**2713.** Deux charges électriques $q_1 = 6{,}67 \cdot 10^{-9}$ C et $q_2 = 10 \times \times 10^{-9}$ C se trouvent à 10 cm l'une de l'autre. Le milieu ambiant est l'air. Au départ les deux charges sont immobiles, puis $q_2$ est libérée. Sous l'action de la force de répulsion la charge $q_2$ se déplace en s'éloignant de la charge $q_1$. Quel travail fournira la force de répulsion lorsque la charge s'éloignera a) de 30 cm? b) à l'infini?

**2714.** Deux charges électriques $q_1 = 33{,}3 \cdot 10^{-9}$ C et $q_2 = 40 \times \times 10^{-9}$ C sont distantes de 20 cm l'une de l'autre. Sachant qu'on

a fourni un travail de $18 \cdot 10^{-5}$ J pour rapprocher $q_2$ de $q_1$ trouver la distance qui les sépare. (Le milieu ambiant est l'air.)

---

**2715.** La tension aux bornes d'un circuit électrique est $V = 120$ V. On branche progressivement une résistance à raison de 0,1 ohm par seconde. Le circuit comporte déjà une résistance constante $r = 10$ ohms. Quelle quantité d'électricité (en coulombs) traversera le circuit en l'espace de deux minutes?

**2716.** La tension aux bornes d'un circuit électrique qui est initialement égale à 120 V baisse uniformément à raison de 0,01 V/s. On branche en même temps une résistance à la vitesse constante de 0,1 ohm/s. Sachant que le circuit comporte une résistance constante $r = 12$ ohms trouver la quantité d'électricité (en coulombs) qui traversera le circuit en 3 mn.

**2717.** La résistance d'un conducteur métallique varie en fonction de la température (pour des valeurs ordinaires) en vertu de la loi $R = R_0 (1 + 0{,}004\vartheta)$, où $R_0$ est la résistance à 0° C et $\vartheta$ la température en degrés Celcius. (Cette loi s'applique à la plupart des métaux purs.) Un conducteur dont la résistance à 0° C est égale à 10 ohms est uniformément chauffé de $\vartheta_1 = 20°$ à $\vartheta_2 = 200°$ en l'espace de 10 mn. Trouver la quantité d'électricité (en coulombs) qui traversera le circuit pendant ce temps sachant qu'il est mis sous une tension de 120 V.

**2718.** La tension d'un courant sinusoïdal de fréquence $\omega$ varie selon la loi : $E = E_0 \sin(\omega t + \varphi)$, où $E_0$ est la tension maximale, $\varphi$ la phase, $t$ le temps. Trouver la valeur moyenne du carré de la tension en une période. Montrer que si la résistance est constante le courant alternatif dégage en une période autant de chaleur qu'un courant continu de tension $\sqrt{(E^2)_{\text{moy}}}$. (Pour cette raison l'expression $\sqrt{(E^2)_{\text{moy}}}$ est appelée tension effective du courant alternatif.)

**2719.** La tension d'un courant alternatif est donnée par la formule

$$E = E_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right),$$

et le courant par

$$I = I_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi_0\right),$$

où $E_0$ et $I_0$ sont des constantes (les valeurs maximales de la tension et du courant), $T$ la période et $\varphi_0$ la différence de phases. Calculer le travail effectué par le courant de l'instant $t_1 = 0$ à l'instant $t_2 = T$ et montrer que ce travail sera maximal pour une différence de phases $\varphi_0 = 0$.

**2720.** Trouver le temps que mettra un appareil électrique pour chauffer 1 kg d'eau de 20 à 100 °C sachant que la tension du courant est 120 V, la résistance 14,4 ohms, la température ambiante 20 °C et qu'il faut 10 mn à 1 kg d'eau pour se refroidir de 40 à 30 °C. (D'après la loi de Joule-Lenz $Q = I^2Rt$, où $Q$ est la quantité de chaleur

en joules, $I$ l'intensité du courant en ampères, $R$ la résistance en ohms, $t$ le temps en secondes, la chaleur spécifique de l'eau est 4190 j/kg·degrés. On se servira de la loi de Newton sur le refroidissement ; cf. exercice 2710.)

---

**2721.** Un récipient d'un volume de 3 l est rempli d'air d'une teneur de 20 % en oxygène. Ce récipient comporte deux tubes. Par l'un d'eux on envoie de l'oxygène pur qui chasse un volume d'air égal dans l'autre. Quelle quantité d'oxygène contiendra le récipient sachant qu'on y a envoyé 10 l d'air?

**2722.** L'air contient $a$ % (=8 %) de $CO_2$ ; on l'envoie dans un récipient cylindrique renfermant une matière absorbante. La quantité de gaz absorbée est proportionnelle à la concentration du gaz et à l'épaisseur de l'absorbant. a) Sachant que l'air qui a traversé une couche d'absorbant d'épaisseur $H$ cm (=10 cm) contient $b$ % (=2 %) de $CO_2$, quelle doit être l'épaisseur $H_1$ de l'absorbant pour que l'air qui en sort ne contienne que $c$ % (=1 %) de $CO_2$? Quelle quantité de $CO_2$ contient l'air après avoir traversé un absorbant d'une épaisseur de 30 cm?

**2723.** Sachant qu'une couche d'eau de 3 m d'épaisseur absorbe la moitié de la lumière qui la traverse, on demande de trouver la quantité de lumière initiale qui atteindra la profondeur de 30 m. La quantité de lumière absorbée au passage d'une étroite couche d'eau est proportionnelle à l'épaisseur de cette couche et la quantité de lumière qui frappe sa surface.

**2724.** La masse d'un ferment passe de 1 g à 1,2 g en l'espace d'une heure. Trouver la masse de ce ferment au bout de 5 h de fermentation sachant que l'accroissement du ferment est proportionnel à la masse initiale.

**2725.** Trouver la masse initiale d'un ferment sachant qu'il pèse 2g après deux heures de fermentation et 3 g après 3 heures. (Voir exercice précédent.)

**2726.** On fait dissoudre 2 kg de sel dans 30 l d'eau. Sachant qu'il faut 5 mn à 1 kg de sel pour se dissoudre, on demande de trouver le temps nécessaire à 99 % de la quantité initiale de sel pour se dissoudre. (La vitesse de dissolution est proportionnelle à la quantité non dissoute de sel et à la différence entre la concentration de solution saturée, qui est ici de 1 kg pour 3 l, et la concentration de la solution à l'instant considéré.)

# CHAPITRE IX

# SÉRIES

## § 1. Séries numériques

### Convergence d'une série numérique

Dans les exercices ci-dessous 1) trouver la somme des $n$ premiers termes de la série $(S_n)$, 2) montrer que ces séries sont convergentes à partir de la définition de la convergence et 3) trouver la somme $(S)$ des séries.

**2727*.** $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$

**2728.** $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots$

**2729.** $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots$

**2730.** $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+3)}+\ldots$

**2731.** $\frac{1}{1\cdot 7}+\frac{1}{3\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}+\ldots$

**2732.** $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\ldots$

**2733.** $\frac{5}{6}+\frac{13}{36}+\ldots+\frac{3^n+2^n}{6^n}+\ldots$

**2734.** $\frac{3}{5}+\frac{5}{36}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}+\ldots$

**2735.** $\frac{1}{9}+\frac{2}{225}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2}+\ldots$

**2736.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{1}{2\cdot n^2}+\ldots$

### Séries à termes positifs

Etudier la convergence des séries ci-après en se servant d'un indice de comparaison.

**2737.** $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^{2n-1}}+\ldots$

**2738.** $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{4}+\ldots+\sin\frac{\pi}{2^n}+\ldots$

2739. $1+\frac{1+2}{1+2^2}+\ldots+\frac{1+n}{1+n^2}+\ldots$

2740. $\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+4)}+\ldots$

2741. $\frac{2}{3}+\frac{3}{8}+\ldots+\frac{n+1}{(n+2)n}+\ldots$

2742. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}+\ldots+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4n}+\ldots$

2743. $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n^2+1}+\ldots$

2744. $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{3n-1}+\ldots$

2745. $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\ldots+\frac{1}{\ln(n+1)}+\ldots$

2746. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-4n+5}$.

2747. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$.

2748. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$.

2749. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$.

2750. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$.

2751. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{n^4+1}}$.

2752. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$.

2753. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1})$.

Etablir la convergence des séries suivantes à l'aide du critère de d'Alembert.

2754. $\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)!}+\ldots$

2755. $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\ldots+\frac{n}{2^n}+\ldots$

2756. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}+\ldots+n\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}+\ldots$

2757. $\frac{2}{1}+\frac{2\cdot 5}{1\cdot 5}+\ldots+\frac{2\cdot 5\ldots(3n-1)}{1\cdot 5\ldots(4n-3)}+\ldots$

2758. $\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\ldots+\frac{n^2}{3^n}+\ldots$

2759. $\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{3\cdot 6}+\ldots+\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{3^n\cdot n!}+\ldots$

2760. $\sin\frac{\pi}{2}+4\sin\frac{\pi}{4}+\ldots+n^2\sin\frac{\pi}{2^n}+\ldots$

2761. $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}+\ldots$

2762. $\frac{2}{2}+\frac{2\cdot 3}{2\cdot 4}+\ldots+\frac{(n+1)!}{2^n\cdot n!}+\ldots$

Etudier la convergence des séries suivantes à l'aide du critère de Cauchy.

2763. $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln^2 3}+\ldots+\frac{1}{\ln^n (n+1)}+\ldots$

2764. $\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\ldots+\left(\frac{n}{(2n+1)}\right)^n+\ldots$

2765. $\arcsin 1+\arcsin^2\frac{1}{2}+\ldots+\arcsin\frac{1}{n}+\ldots$

2766. $\frac{2}{3}+\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4}{9}+\ldots+\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}+\ldots$

Etudier la convergence des séries suivantes à l'aide du critère intégral de Cauchy.

2767. $\frac{1}{2\ln^2 2}+\frac{1}{3\ln^2 3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}+\ldots$

2768. $\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\ldots+\frac{1}{n\ln n}+\ldots$

2769. $\left(\frac{1+1}{1+1^2}\right)^2+\left(\frac{1+2}{1+2^2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2+\ldots$

2770. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}$.

Etudier la convergence des séries suivantes.

2771. $\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}+\ldots$

2772. $1+\frac{2}{3}+\ldots+\frac{n}{2n-1}+\ldots$

2773. $\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\ldots+\sqrt{\frac{n+1}{n}}+\ldots$

2774. $1+\frac{4}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{n^2}{n!}+\ldots$

2775. $2+\frac{5}{8}+\ldots+\frac{n^2+1}{n^3}+\ldots$

2776. $\frac{1}{1001}+\frac{2}{2001}+\ldots+\frac{n}{1000n+1}+\ldots$

2777. $\frac{1}{1+1^2}+\frac{2}{1+2^2}+\ldots+\frac{n}{1+n^2}+\ldots$

2778. $\frac{1}{3}+\frac{3}{3^2}+\ldots+\frac{2n-1}{3^n}+\ldots$

2779. $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg}^2 \frac{1}{2} + \ldots + \operatorname{arctg}^n \frac{1}{n} + \ldots$

2780. $2 + \frac{4}{16} + \ldots + \frac{2^n}{n^4} + \ldots$

2781. $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{6\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(5n-4)(4n-1)} + \ldots$

2782. $\frac{3}{2} + \frac{9}{8} + \ldots + \frac{3^n}{n\cdot 2^n} + \ldots$

2783. $1 + \frac{1\cdot 2}{2^2} + \ldots + \frac{n!}{n^n} + \ldots$

2784*. $\sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{4} + \ldots + \sin \frac{\pi}{2n} + \ldots$

Démontrer les relations suivantes en utilisant les séries ayant pour terme général la fonction donnée.

2785. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$

2786. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{a^{n!}} = 0 \quad (a > 1).$

2787. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0.$

2788. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0.$

2789. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}} = 0.$

## Séries à termes arbitraires.

## Convergence absolue

Etudier la convergence des séries suivantes.

2790. $1 - \frac{1}{3} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1} + \ldots$

2791. $1 - \frac{1}{3^3} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^3} + \ldots$

2792. $\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n+1)} + \ldots$

2793. $\frac{\sin \alpha}{1} + \frac{\sin 2\alpha}{4} + \ldots + \frac{\sin n\alpha}{n^2} + \ldots$

2794. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^n} + \ldots$

2795. $2 - \frac{3}{2} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n} + \ldots$

2796. $-1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$

2797. $\frac{1}{2} - \frac{8}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{n^3}{2^n} + \ldots$

2798. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}.$

2799. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{n^2}}{n!}.$

**2800.** Montrer que si les séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ sont convergentes, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ est absolument convergente.

**2801.** Montrer que si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est absolument convergente, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} a_n$ l'est également.

## § 2. Séries fonctionnelles

### Convergence des séries fonctionnelles

Déterminer le domaine de convergence des séries.

**2802.** $1+x+\ldots+x^n+\ldots$

**2803.** $\ln x+\ln^2 x+\ldots+\ln^n x+\ldots$

**2804.** $x+x^4+\ldots+x^{n^2}+\ldots$

**2805.** $x+\frac{x^2}{2^2}+\ldots+\frac{x^n}{n^2}+\ldots$

**2806.** $x+\frac{x^2}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{x^n}{\sqrt{n}}+\ldots$

**2807.** $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+x^2}+\ldots+\frac{1}{1+x^n}+\ldots$

**2808.** $2x+6x^2+\ldots+n(n+1)x^n+\ldots$

**2809.** $\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{x^n}{n+\sqrt{n}}+\ldots$

**2810.** $\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^2}{1+x^4}+\ldots+\frac{x^n}{1+x^{2n}}+\ldots$

**2811.** $\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{4}+\ldots+\sin\frac{x}{2^n}+\ldots$

**2812.** $x\operatorname{tg}\frac{x}{2}+x^2\operatorname{tg}\frac{x}{4}+\ldots+x^n\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}+\ldots$

**2813.** $\sin x+\frac{\sin 2x}{2^2}+\ldots+\frac{\sin nx}{n^2}+\ldots$

**2814.** $\frac{\cos x}{e^x}+\frac{\cos 2x}{e^{2x}}+\ldots+\frac{\cos nx}{e^{nx}}+\ldots$

**2815.** $e^{-x}+e^{-4x}+\ldots+e^{-n^2x}+\ldots$

**2816.** $\frac{x}{e^x}+\frac{2^x}{e^{2x}}+\ldots+\frac{nx}{e^{nx}}+\ldots$

## Convergence uniforme

Montrer que les séries suivantes sont uniformément convergentes sur l'axe des $x$ tout entier.

**2817.** $1+\frac{\sin x}{1!}+\ldots+\frac{\sin nx}{n!}+\ldots$

**2818.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2[1+(nx)^2]}$. **2819.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$. **2820.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n^2x^2}}{n^2}$.

**2821.** Montrer que la série $\frac{1}{1+[\varphi(x)]^2}+\frac{1}{4+[\varphi(x)]^2}+\ldots$ $\ldots\frac{1}{n^2+[\varphi(x)]^2}+\ldots$ est uniformément convergente dans tout intervalle de définition de la fonction $\varphi(x)$.

**2822.** Montrer que la série $\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{2\sqrt{1+2x}}+\ldots$ $\ldots+\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}}+\ldots$ est uniformément convergente sur l'axe $Ox$ tout entier. Combien faut-il prendre de termes pour que, quel que soit $x\geqslant 0$, l'on puisse calculer la somme de la série avec une précision de 0,001 ?

**2823*.** Montrer que la série $\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{\ln(1+2x)}{2x^2}+\ldots$ $\ldots+\frac{\ln(1+nx)}{nx^n}+\ldots$ est uniformément convergente dans l'intervalle $1+\omega\leqslant x<\infty$, où $\omega$ est un nombre positif quelconque. Vérifier que quel que soit $x$ de l'intervalle $(2\leqslant x\leqslant 100)$ il suffit de prendre 8 termes pour calculer la somme de la série avec une précision de 0,01.

**2824.** Montrer que la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n(1-x)$ converge uniformément dans l'intervalle $[0, 1]$.

**2825.** La fonction $f(x)$ est définie par l'égalité

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{10^n}.$$

Montrer que $f(x)$ est définie et continue quel que soit $x$. Trouver $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$. S'assurer que trois termes suffisent pour calculer $f(x)$ à 0,001 près quel que soit $x$. Calculer $f(1)$ et $f(-0{,}2)$ avec la même précision.

**2826.** La fonction $f(x)$ est définie par l'égalité

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+(x+n\omega)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+(x-n\omega)^2}\qquad(\omega>0).$$

Montrer que $f(x)$ est définie et continue quel que soit $x$. Vérifier que $f(x)$ est une fonction périodique de période $\omega$.

**2827.** Montrer que la série $x^2 + x^6 + \ldots + x^{4n-2} + \ldots$ converge uniformément dans l'intervalle $-1 + \omega \leqslant x \leqslant 1 - \omega$, où $\omega$ est un nombre positif quelconque inférieur à l'unité. Par intégration de cette série trouver la somme de la série

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{x^{4n-1}}{4n-1} + \ldots$$

dans l'intervalle $]-1, 1[$.

**2828.** Trouver la somme de la série

$$x + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{4n-3}}{4n-3} + \ldots$$

**2829.** Trouver la somme de la série

$$\frac{x^2}{1\cdot 2} - \frac{x^3}{2\cdot 3} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)} + \ldots$$

**2830.** La fonction $f(x)$ est définie par la relation

$$f(x) = e^{-x} + 2e^{-2x} + \ldots + ne^{-nx} + \ldots$$

Montrer que $f(x)$ est continue sur l'axe $Ox$ tout entier. Calculer $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)\,dx$.

**2831.** La fonction $f(x)$ est définie par l'égalité

$$f(x) = 1 + 2\cdot 3x + \ldots + n\cdot 3^{n-1}x^{n-1} + \ldots$$

Montrer qu'elle est continue dans l'intervalle $]-1/3, 1/3[$. Calculer $\int\limits_0^{0,125} f(x)\,dx$.

**2832*.** La fonction $f(x)$ est définie par l'égalité

$$f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n} + \ldots$$

Calculer $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ après s'être préalablement assuré que la fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle d'intégration indiqué.

**2833*.** Une fonction $f(x)$ est définie par la série $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 + x^2}$. Montrer que $f(x)$ est continue sur l'axe numérique tout entier. Calculer $\int\limits_0^{\infty} f(x)\,dx$.

**2834.** Moyennant la relation $\int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$ trouver la somme de la série:

1) $1-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}+\ldots$, 2) $1-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{4n-3}+\ldots$

**2835.** Se servir de la relation $\int_2^\infty \frac{dx}{x^{n+1}} = \frac{1}{n2^n}$ pour calculer la somme de la série $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\ldots+\frac{1}{n2^n}+\ldots$

**2836.** Utiliser la relation

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\ldots 4\cdot 2}$$

pour calculer la somme de la série

$$\frac{1}{2}-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}+\ldots$$

**2837.** Montrer que la série

$$\frac{\sin 2\pi x}{2}+\frac{\sin 4\pi x}{4}+\ldots+\frac{\sin 2^n\pi x}{2^n}+\ldots$$

est uniformément convergente sur l'axe des $x$ tout entier. Montrer que cette série ne peut être dérivée terme à terme dans aucun intervalle.

**2838.** Utiliser l'égalité $1+x+x^2+\ldots=\frac{1}{1-x}\,(|x|<1)$ pour calculer les sommes des séries $1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}+\ldots$ et $1+3x+\ldots+\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}+\ldots$ et montrer que la série $1+2x+\ldots+nx^{n-1}+\ldots$ est uniformément convergente dans l'intervalle $[-\rho, \rho]$, où $|\rho|<1$.

**2839.** Etablir la relation

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2x}{1+x^2}+\ldots+\frac{mx^{m-1}}{1+x^m}+\ldots=\frac{1}{1-x},$$

où $m=2^{n-1}$ et $-1<x<1$.

**2840.** Vérifier que la fonction $y=f(x)$ définie par la série $x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{(n-1)!}+\ldots$ satisfait la relation $xy'=y(x+1)$.

## § 3. Séries entières

### Développement des fonctions en séries entières

**2841.** Développer la fonction $y = \ln x$ en série de Taylor au voisinage du point $x = 1$ (pour $x_0 = 1$).

**2842.** Développer la fonction $y = \sqrt{x^3}$ en série de Taylor au voisinage du point $x = 1$.

**2843.** Développer la fonction $y = 1/x$ en série de Taylor au voisinage du point $x = 3$.

**2844.** Développer la fonction $y = \sin \frac{\pi x}{4}$ en série de Taylor au voisinage du point $x = 2$.

Développer les fonctions données en série de Taylor au voisinage du point $x = 0$ (série de Maclaurin).

**2845.** $y = \operatorname{ch} x$. **2846.** $y = x^2 e^x$. **2847.** $y = \cos(x + \alpha)$.

**2848.** $y = e^x \sin x$. **2849.** $y = \cos x \operatorname{ch} x$.

Dans les exercices ci-après trouver les cinq premiers termes de la série de Taylor des fonctions données dans le voisinage du point $x = 0$.

**2850.** $y = \ln(1 + e^x)$. **2851.** $y = e^{\cos x}$. **2852.** $y = \cos^n x$.

**2853.** $y = -\ln \cos x$. **2854.** $y = (1 + x)^x$.

Développer les fonctions données au voisinage du point $x = 0$ en utilisant le développement en série de Maclaurin des fonctions $e^x$, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1 + x)$ et $(1 + x)^m$.

**2855.** $y = e^{2x}$. **2856.** $y = e^{-x^2}$. **2857.** $y = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{pour } x \neq 0, \\ 1 & \text{pour } x = 0. \end{cases}$

**2858.** $y = \begin{cases} \frac{e^{x^3} - e^{-x^3}}{2x^3} & \text{pour } x \neq 0, \\ 1 & \text{pour } x = 0. \end{cases}$ **2859.** $y = \sin \frac{x}{2}$.

**2860.** $y = \cos^2 x$. **2861.** $y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{pour } x \neq 0. \\ 1 & \text{pour } x = 0. \end{cases}$

**2862.** $y = (x - \operatorname{tg} x) \cos x$.

**2863.** $y = \ln(10 + x)$. **2864.** $y = x \ln(1 + x)$.

**2865.** $y = \sqrt{1 + x^2}$. **2866.** $y = \sqrt[3]{8 - x^3}$.

**2867.** $y = \frac{1}{\sqrt[3]{1 + x^3}}$. **2868.** $y = \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$.

**2869.** Développer la fonction $y = \frac{1 + x}{(1 - x)^3}$ en série de Taylor au voisinage du point $x = 0$. Appliquer ce développement au calcul de la somme de la série $1 + \frac{4}{2} + \ldots + \frac{n^2}{2^{n-1}} + \ldots$

**2870.** Utiliser le développement en série de Taylor pour calculer:

1) la dérivée septième de la fonction $y=\frac{x}{1+x^2}$ pour $x=0$,

2) la dérivée cinquième de la fonction $y = x^2 \sqrt[4]{1+x}$ pour $x = 0$,

3) la dérivée dixième de la fonction $y = x^6 e^x$ pour $x = 0$,

4) la courbure de la courbe $y = x\,[\sqrt[3]{(1+x)^4} - 1]$ à l'origine des coordonnées.

Appliquer le développement des fonctions en série de Taylor au calcul des limites:

**2871.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x+\ln(\sqrt{1+x^2}-x)}{x^3}$. **2872.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2(\operatorname{tg} x-\sin x)-x^3}{x^5}$.

**2873.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{x(e^x-1)}$.

**2874.** $\lim\limits_{x\to\infty} \left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$. **2875.** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{cotg}^2 x\right)$.

**2876.** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2}-\frac{\operatorname{ctg} x}{x}\right)$. **2877.** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{2+\cos x}{x^3\sin x}-\frac{3}{x^4}\right)$.

## Intervalle de convergence

Trouver les intervalles de convergence des séries entières.

**2878.** $10x+100x^2+\ldots+10^n x^n+\ldots$

**2879.** $x-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots$

**2880.** $x+\frac{x^2}{20}+\ldots+\frac{x^n}{n\cdot 10^{n-1}}+\ldots$

**2881.** $1+x+\ldots+n!\,x^n+\ldots$

**2882.** $1+2x^2+\ldots+2^{n-1}x^{2(n-1)}+\ldots$

**2883.** $x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)\cdot(2n-1)!}+\ldots$

**2884.** $1+3x+\ldots+(n-1)\,3^{n-1}x^{n-1}+\ldots$

**2885.** $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{x^n}{n(n+1)}+\ldots$

**2886.** $x+\frac{(2x)^2}{2!}+\ldots+\frac{(nx)^n}{n!}+\ldots$ On rappelle que lorsqu'on étudie la convergence d'une série à l'extrémité droite d'un intervalle, on peut exprimer les factorielles des grands chiffres approximativement au moyen de la formule de Stirling:

$$n!\approx\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}.$$

**2887.** $x+4x^2+\ldots+(nx)^n+\ldots$

**2888.** $\frac{\ln 2}{2}x^2+\frac{\ln 3}{3}x^3+\ldots+\frac{\ln(n+1)}{n+1}x^{n+1}+\ldots$

2889. $2x+\left(\frac{9}{4}x\right)^2+\ldots+\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n x\right]^n+\ldots$

2890. Développer la fonction $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ en série de Taylor au voisinage du point $x=0$ moyennant la relation

$$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

et indiquer l'intervalle de convergence de la série obtenue.

2891. Développer la fonction $y=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ en série de Taylor au voisinage du point $x=0$ moyennant la relation

$$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\int_0^x \frac{dx}{1-x^2}$$

et indiquer l'intervalle de convergence de cette série.

2892. Développer la fonction $y=\ln\left[(1+x)^{1+x}\right]+\ln\left[(1-x)^{1-x}\right]$ en série de Taylor au voisinage du point $x=0$ et indiquer son intervalle de convergence.

2893. Développer la fonction $y=(1+x)e^{-x}-(1-x)e^{x}$ en série de Taylor au voisinage du point $x=0$ et indiquer son intervalle de convergence. Appliquer ce développement au calcul de la somme

$$\frac{1}{3!}+\frac{2}{5!}+\ldots+\frac{n}{(2n+1)!}+\ldots$$

## § 4. Quelques applications des séries de Taylor

### Calcul approché des fonctions

2894. Calculer approximativement la fonction $\sqrt[3]{e}$ en se limitant aux trois premiers termes du développement en série de Maclaurin de la fonction $f(x)=e^x$. Evaluer l'erreur.

2895. Calculer approximativement $\sin 18°$ en prenant les trois premiers termes du développement de la fonction $f(x)=\sin x$ en série de Maclaurin. Evaluer l'erreur commise.

2896. Calculer approximativement $\sqrt[3]{10}=2\sqrt[3]{1{,}25}$ en prenant les quatre premiers termes du développement de la fonction $f(x)=(1+x)^m$ en série de Maclaurin. Evaluer l'erreur commise.

Appliquer le développement des fonctions $e^x$, $\sin x$ et $\cos x$ en série de Maclaurin au calcul des expressions indiquées.

2897. $e^2$ à 0,001 près.

2898. $\sqrt{e}$ à 0,001 près.

2899. $\frac{1}{e}$ à 0,0001 près.

**2900.** $\frac{1}{4\sqrt[3]{e}}$ à 0,0001 près.

**2901.** $\sin 1°$ à 0,0001 près.

**2902.** $\cos 1°$ à 0,001 près.

**2903.** $\sin 10°$ à 0,00001 près.

**2904.** $\cos 10°$ à 0,0001 près.

Appliquer le développement de la fonction $(1 + x)^m$ en série de Maclaurin au calcul des racines indiquées avec une précision de 0,001.

**2905.** $\sqrt[3]{30}$. **2906.** $\sqrt[3]{70}$. **2907.** $\sqrt[3]{500}$. **2908.** $\sqrt[3]{1,015}$.

**2909.** $\sqrt[5]{250}$. **2910.** $\sqrt[3]{129}$. **2911.** $\sqrt[10]{1027}$.

Calculer les expressions indiquées en appliquant le développement de la fonction $\ln \frac{1+x}{1-x}$ en série de Maclaurin.

**2912.** $\ln 3$ avec une précision de 0,0001.

**2913.** $\lg e = \frac{1}{\ln 10}$ avec une précision de 0,000001.

**2914.** $\lg 5$ avec une précision de 0,0001.

## Résolution d'équations

**2915.** On considère l'équation $xy + e^x = y$. Développer la fonction $y$ en série de Taylor suivant les puissances de $x$ par la méthode des coefficients indéterminés. Résoudre le même problème en déterminant les coefficients de la série de Taylor par dérivation successive.

**2916.** On considère l'équation $y = \ln(1 + x) - xy$. Développer la fonction $y$ en série de Taylor suivant les puissances de $x$ par la méthode des coefficients indéterminés. Résoudre le même problème en déterminant les coefficients de la série de Taylor par dérivation successive.

Résoudre les équations par rapport à $y$ (i.e. expliciter $y$) à l'aide de la série de Taylor par la méthode des coefficients indéterminés et par dérivation successive.

**2917.** $y^3 + xy = 1$ (trouver les trois premiers termes du développement).

**2918.** $2 \sin x + \sin y = x - y$ (trouver les deux premiers termes du développement).

**2919.** $e^x - e^y = xy$ (trouver les trois premiers termes du développement).

## Intégration des fonctions

Exprimer les intégrales par des séries en développant les intégrandes en série; indiquer le domaine de convergence des séries obtenues.

2920. $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$. 2921. $\int \frac{\cos x}{x}\,dx$. 2922. $\int \frac{e^x}{x}\,dx$.

2923. $\int \frac{e^x}{x^2}\,dx$. 2924. $\int\limits_0^x e^{-x^2}\,dx$. 2925. $\int\limits_0^x \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$.

2926. $\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$. 2927. $\int\limits_0^x \sqrt{1+x^3}\,dx$. 2928. $\int\limits_0^x \frac{dx}{1-x^9}$.

2929. $\int\limits_0^x \frac{\sqrt[4]{1+x^4}-1}{x^2}\,dx$.

Calculer approximativement les intégrales définies en développant l'intégrande en série et en se limitant au nombre de termes indiqué entre parenthèses; évaluer l'erreur commise.

2930. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{x}\,dx$ (3 termes). 2931. $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}\,dx$ (3 termes).

2932. $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ (2 termes). 2933. $\int\limits_{0,1}^{1} \frac{e^x}{x}\,dx$ (6 termes).

2934. $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} x^3 \operatorname{arctg} x\,dx$ (2 termes).

Calculer les intégrales à 0,001 près.

2935. $\int\limits_{0,1}^{0,2} \frac{e^{-x}}{x^3}\,dx$. 2936. $\int\limits_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$.

2937. $\int\limits_0^{0,8} x^{10} \sin x\,dx$. 2938. $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}$.

2939. Montrer que dans l'intervalle $]-0,1\,;\,0,1[$ l'écart entre la fonction $\int\limits_0^x e^{-x^2}\,dx$ et $\operatorname{arctg} x - \frac{x^5}{10}$ est $\leqslant 10^{-7}$.

2940. Appliquer l'identité

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}$$

au calcul de $\pi$ avec 10 décimales vraies.

2941. Développer la fonction $y = e^{x^2} \int\limits_0^x e^{-x^2}\,dx$ en série de

Taylor de deux manières: par dérivation directe pour $x = 0$ et par multiplication terme à terme des séries.

**2942*.** Calculer l'intégrale $\int_0^1 x^x\,dx$.

**2943.** Calculer l'intégrale $\int_0^{0,5} e^{\sin x}\,dx$ à 0,0001 près.

**2944.** Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\cos x}\,dx$ à 0,001 près.

## Problèmes divers

**2945.** Trouver l'aire limitée par la courbe $y^2 = x^3 + 1$, l'axe des ordonnées et la droite $x = 1/2$ avec une précision de 0,001.

**2946*.** Trouver l'aire de l'ovale $x^4 + y^4 = 1$ à 0,01 près.

**2947.** Trouver la longueur de l'arc de la courbe $25y^2 = 4x^5$ de son sommet au point de rencontre avec la parabole $5y = x^2$ à 0,0001 près.

**2948.** Trouver la longueur d'un demi-arc de sinusoïde $y = \sin x$ avec une précision de 0,001.

**2949.** Trouver à 0,001 près le volume engendré par la révolution autour de l'axe des abscisses de la figure limitée par la courbe $y = \operatorname{arctg} x$, l'axe des abscisses et la droite $x = 1/2$.

**2950.** Trouver à 0,001 près le volume engendré par la révolution autour de l'axe des ordonnées de l'aire comprise entre les courbes $y^3 - x^3 = 1$, $4y + x^3 = 0$, la droite $y = 1/2$ et l'axe des ordonnées.

**2951.** Trouver à 0,001 près les coordonnées du centre de gravité de l'arc d'hyperbole $y = 1/x$ compris entre les points d'abscisses $x_1 = 1/4$ et $x_2 = 1/2$.

**2952.** Trouver à 0,01 près les coordonnées du centre de gravité du trapèze curviligne engendré par la courbe $y = \frac{1}{\ln x}$, les droites $x = 1,5$ et $x = 2$ et l'axe des abscisses.

# CHAPITRE X

# FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES. CALCUL DIFFÉRENTIEL

## § 1. Fonctions de plusieurs variables

**2953.** Exprimer le volume $z$ du cône en fonction de sa génératrice $x$ et de la hauteur $y$.

**2954.** Exprimer l'aire $S$ du triangle en fonction de ses côtés $x$, $y$, $z$.

**2955.** Dresser le tableau de valeurs de la fonction $z = 2x - 3y + 1$ en faisant varier les variables indépendantes de 0 à 5 par valeurs de 1.

**2956.** Dresser le tableau de valeurs de la fonction $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ en faisant varier les variables indépendantes de 0 à 1 par valeurs de 0,1. Calculer les valeurs de la fonction à 0,01 près.

**2957.** Calculer les valeurs prises par les fonctions:

1) $z = \left(\frac{\operatorname{arctg}(x+y)}{\operatorname{arctg}(x-y)}\right)^2$ pour $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, $y = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$;

2) $z = e^{\sin(x+y)}$ pour $x = y = \frac{\pi}{2}$;

3) $z = y^{x^2-1} + x^{y^2-1}$ pour $x = 2$, $y = 2$; $x = 1$, $y = 2$; $x = 2$, $y = 1$.

**2958.** On donne la fonction

$$F(x, y) = \frac{\varphi(x)\,\psi(y) - \psi(x)\,\varphi(y)}{\varphi(xy)\,\psi(xy)}.$$

Trouver $F(a, 1/a)$. En particulier, poser $\varphi(u) = u^3$, $\psi(u) = u^2$ et calculer $F(a, 1/a)$.

**2959.** On considère la fonction $F(x, y) = y^x - \frac{1}{2}x^y$. Si $x$ et $y$ varient à la même vitesse, quelle fonction, pour $x = 3$ et $y = 2$, croît plus rapidement: celle que l'on déduit de $F$ en fixant $y$ (seul $x$ varie), ou bien celle que l'on déduit de $F$ en fixant $x$ (seul $y$ varie)?

**2960.** On considère la fonction

$$\varphi(x, y, z) = y^2 - (y\cos z + z\cos y)\,x + x^{\frac{y+z}{y-z}}.$$

Les variables $y$ et $z$ prennent des valeurs fixes $y_0$ et $z_0$ telles que $y_0 = 3z_0$. Quelle est l'allure du graphe de la fonction $v = \varphi(x, y_0, z_0)$?

La fonction $\varphi(x, y, z)$ est-elle: 1) une fonction rationnelle de $y$? de $z$? 2) une fonction entière de $x$?

**2961*.** Une fonction $z = f(x, y)$ vérifiant identiquement la relation

$$f(mx, my) = m^k f(x, y), \text{ quel que soit } m,$$

est appelée fonction homogène d'ordre $k$. Montrer qu'une fonction homogène $z = f(x, y)$ d'ordre $k$ peut toujours être mise sous la forme $z = x^k F\left(\frac{y}{x}\right)$.

**2962.** Une fonction homogène d'un nombre quelconque de variables se définit exactement comme une fonction homogène de deux variables: en effet, une fonction $f(x, y, z)$ est homogène d'ordre $k$ si

$$f(mx, my, mz) = m^k f(x, y, z), \text{ quel que soit } m.$$

L'on a également la relation

$$f(x, y, z) = x^k F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$$

qu'on demande de démontrer.

**2963.** Montrer que la fonction $z = F(x, y) = xy$ vérifie l'équation fonctionnelle

$$F(ax + bu, cy + dv) = acF(x, y) + bcF(u, y) + adF(x, v) + \\ + bdF(u, v).$$

**2964.** Montrer que la fonction $z = F(x, y) = \ln x \ln y$ vérifie l'équation fonctionnelle

$$F(xy, uv) = F(x, u) + F(x, v) + F(y, u) + F(y, v)$$
$$(x, y, u, v \text{ sont positifs}).$$

**2965.** Expliciter $z$ dans l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. La fonction obtenue sera-t-elle univoque?

**2966.** On considère la fonction composée $z = u^v$, où $u = x + y$, $v = x - y$. Calculer cette fonction: 1) pour $x = 0$, $y = 1$; 2) $x = 1$, $y = 1$; 3) $x = 2$, $y = 3$; 4) $x = 0$, $y = 0$; 5) $x = -1$, $y = -1$.

**2967.** $z = \frac{u+v}{uv}$; $u = w^t$, $v = w^{-t}$; $w = \sqrt{x+y}$, $t = 2(x - y)$. Exprimer $z$ en fonction de $x$ et $y$. La fonction $z$ est-elle une fonction rationnelle de $u$ et $v$? de $w$ et $t$? de $x$ et $y$?

**2968.** On donne la fonction composée $z = u^w + w^{u+v}$, où $u = x + y$, $v = x - y$, $w = xy$. Exprimer $z$ en fonction de $x$ et $y$.

**2969.** $u = (\xi + \eta)^2 - \xi^3 - \eta^3$; $\xi = \frac{e^\omega + e^\varphi}{2}$, $\eta = \frac{e^\omega - e^\varphi}{2}$; $\omega = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $\varphi = 2\ln(x + y + z)$. Exprimer $u$ en fonction de $x$, $y$ et $z$. La fonction $u$ est-elle une fonction rationnelle entière de $\xi$ et $\eta$? de $\omega$ et $\varphi$? de $x$, $y$, $z$?

**2970.** Représenter la fonction composée

$$z=\left(\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}\right)^{xy}+x^2+y^2$$

sous forme d'une « chaîne » de relations entre les variables $x$ et $y$ et les variables auxiliaires $u$ et $v$.

**2971.** Etudier le graphe de la fonction $z=\frac{1}{2}(x^2-y^2)$ par la méthode des sections. Déterminer la nature des sections par les plans $x=\text{const}$; $y=\text{const}$; $z=\text{const}$.

**2972.** Etudier par la méthode des sections le graphe de la fonction $z=xy$. Déterminer la nature des sections par les plans $x=\text{const}$; $y=\text{const}$; $z=\text{const}$.

**2973.** Etudier par la méthode des sections le graphe de la fonction $z=y^2-x^3$.

**2974.** Etudier par la méthode des sections le graphe de la fonction

$$z^3=ax^2+by^2 \quad (a>0,\ b>0).$$

## § 2. Propriétés élémentaires des fonctions

### Domaine de définition

**2975.** Un domaine est limité par un parallélogramme de côtés $y=0$, $y=2$, $y=1/2x$, $y=1/2x-1$; la frontière est exclue. Se donner ce domaine par des inégalités.

**2976.** Se donner par des inégalités le domaine de définition limité par les paraboles $y=x^2$ et $x=y^2$ (frontières comprises).

**2977.** Se donner par des inégalités le domaine de définition ouvert constitué d'un triangle équilatéral dont un sommet est à l'origine des coordonnées, les côtés respectivement égaux à $a$ et tels que l'un deux est dirigé suivant l'axe positif $Ox$ (le triangle est contenu dans le premier quadrant).

**2978.** Se donner par des inégalités le domaine de définition limité par un cylindre circulaire infini de rayon $R$ (les frontières sont exclues) et un axe parallèle à $Oz$ et passant par le point $(a, b, c)$.

**2979.** Se donner par une inégalité le domaine de définition limité par la sphère de rayon $R$ centrée au point $(a, b, c)$ (frontière comprise).

**2980.** Les sommets d'un triangle rectangle sont contenus à l'intérieur d'un cercle de rayon $R$. L'aire $S$ de ce triangle est une fonction des côtés de l'angle droit $x$ et $y$: $S=\varphi(x, y)$. Trouver le domaine de définition de la fonction $S=\varphi(x, y)$.

**2981.** Dans une sphère de rayon $R$ on inscrit une pyramide de base rectangulaire dont le sommet se projette orthogonalement sur le point de concours des diagonales de la base. Le volume $V$ de la pyramide est fonction des côtés $x$ et $y$ de sa base. La fonction $V$ est-elle univoque? Ecrire son expression analytique et trouver son domaine de définition.

**2982.** Un tableau carré est partagé en quatre cases carrées; deux blanches et deux noires, comme l'indique la fig. 57. Le côté de chaque case est égale à l'unité. On considère un rectangle dont les côtés $x$ et $y$ sont parallèles aux bords du tableau et dont un sommet coïncide avec le coin gauche inférieur. L'aire de la partie noire du rectangle est une fonction de $x$ et $y$. Trouver son domaine de définition. Exprimer analytiquement cette fonction.

Trouver le domaine de définition des fonctions indiquées.

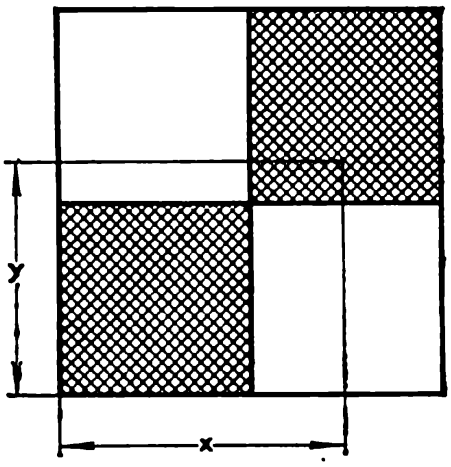

Fig. 57

**2983.** $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$.

**2984.** $z=\ln(y^2-4x+8)$.

**2985.** $z=\frac{1}{R^2-x^2-y^2}$. **2986.** $z=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}$.

**2987.** $z=\frac{1}{\sqrt{x+y}}+\frac{1}{\sqrt{x-y}}$. **2988.** $z=\arcsin\frac{y-1}{x}$.

**2989.** $z=\ln xy$. **2990.** $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$.

**2991.** $z=\arcsin\frac{x^2+y^2}{4}+\operatorname{arcsec}(x^2+y^2)$.

**2992.** $z=\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$. **2993.** $z=\sqrt{\frac{x^2+2x+y^2}{x^2-2x+y^2}}$.

**2994.** $z=xy\sqrt{\ln\frac{R^2}{x^2+y^2}}=\sqrt{x^2+y^2-R^2}$.

**2995.** $z=\operatorname{ctg}\pi(x+y)$. **2996.** $z=\sqrt{\sin\pi(x^2+y^2)}$.

**2997.** $z=\sqrt{x\sin y}$. **2998.** $z=\ln x-\ln\sin y$.

**2999.** $z=\ln[x\ln(y-x)]$. **3000.** $z=\arcsin[2y(1+x^2)-1]$.

**3001.** $u=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}}$.

**3002.** $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}$ $(R>r)$.

## Limite. Fonction continue

Trouver les limites des fonctions en supposant que les variables indépendantes tendent arbitrairement vers leurs valeurs limites.

**3003.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$. **3004.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$.

**3005.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$.

**3006.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)\,x^2y^2}$.

**3007.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4}$.

**3008.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+x^2y^2)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$.

**3009.** Montrer que la fonction $u=\dfrac{x+y}{x-y}$, lorsque $x\to 0$, $y\to 0$, peut tendre vers une limite quelconque (selon la manière dont $x$ et $y$ tendront vers 0). Citer des exemples de variation de $x$ et $y$ tels que a) $\lim u = 1$ ; b) $\lim u = 2$.

**3010.** Trouver les points de discontinuité de la fonction $z = \dfrac{2}{x^2+y^2}$. Etudier le comportement de cette fonction au voisinage du point de discontinuité.

**3011.** Trouver les points de discontinuité de la fonction $z=\dfrac{1}{\sin^2 \pi x+\sin^2 \pi y}$.

**3012.** Etudier la discontinuité de la fonction $z=\dfrac{1}{x-y}$.

**3013.** Etudier la discontinuité de la fonction $z=\dfrac{1}{\sin \pi x}+\dfrac{1}{\sin \pi y}$.

**3014.** Etudier la discontinuité de la fonction $z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$.

**3015*.** Etudier la continuité des fonctions pour $x=0$ et $y=0$:

1) $f(x, y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$; $f(0, 0)=0$. 2) $f(x, y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$; $f(0, 0)=0$.

3) $f(x, y)=\dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2}$; $f(0, 0)=0$. 4) $f(x, y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$; $f(0, 0)=0$.

5) $f(x, y)=\dfrac{x^4-y^4}{x^4+y^4}$; $f(0, 0)=0$. 6) $f(x, y)=\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$; $f(0, 0)=0$.

## Courbes et surfaces de niveau

**3016.** On considère la fonction $z=f(x, y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$. Construire les courbes de niveau de cette fonction pour $z = 1, 2, 3, 4$.

**3017.** La fonction $z = f(x, y)$ est définie comme suit: au point $P(x, y)$ elle est numériquement égale à l'angle sous lequel on voit de ce point un segment $AB$ situé dans le plan $Oxy$. Trouver les courbes de niveau de la fonction $f(x, y)$.

Tracer les courbes de niveau des fonctions indiquées en faisant varier $z$ de $-5$ à $+5$ par valeurs de 1.

**3018.** $z = xy$. **3019.** $z = x^2y + x$.

**3020.** $z = y(x^2 + 1)$. **3021.** $z = \dfrac{xy-1}{x^2}$.

3022. Construire les courbes de niveau de la fonction $z = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$ en faisant varier $z$ de $-1$ à $3/2$ par valeurs de $1/2$.

3023. Construire les courbes de niveau de la fonction implicite $z$ définie par la relation $\left(\frac{3}{2}\right)^z [(x-5)^2 + y^2] = \left(\frac{2}{3}\right)^z + [(x+5)^2 + y^2]$ en faisant varier $z$ de $-4$ à $4$ par valeurs de $1$.

3024. Construire les courbes de niveau de la fonction $z$ donnée implicitement par la relation $y^2 = 2^{-z}(x - z)$ en faisant varier $z$ de $-3$ à $3$ par valeurs de $1$.

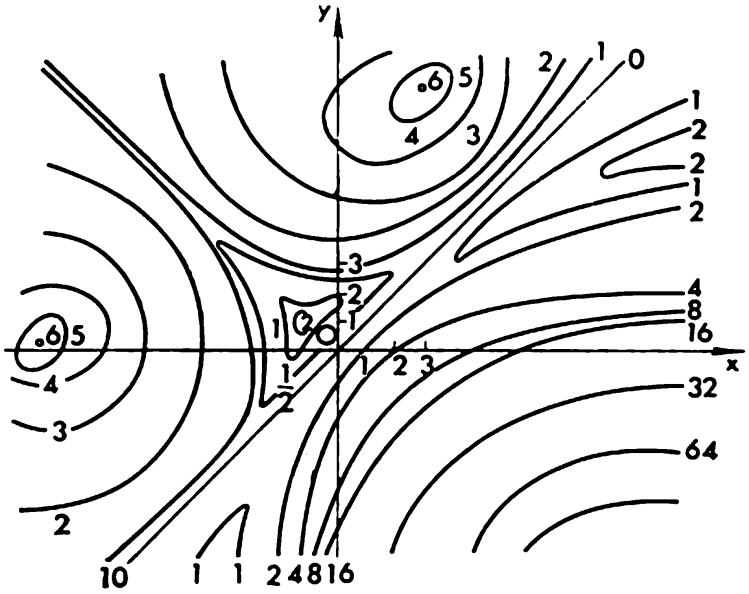


Fig. 58

3025. Trouver les courbes de niveau de la fonction $z$ définie implicitement par l'équation $z + x \ln z + y = 0$.

3026. On considère un point $A$ dans l'espace. La distance d'un point variable $M$ au point $A$ est fonction des coordonnées du point $M$. Trouver les surfaces de niveau de cette fonction correspondant aux distances 1, 2, 3, 4.

3027. La fonction $u = f(x, y, z)$ est donnée comme suit: au point $P(x, y, z)$ elle est égale à la somme des distances de ce point à deux points donnés: $A(x_1, y_1, z_1)$ et $B(x_2, y_2, z_2)$. Trouver les surfaces de niveau de la fonction $f(x, y, z)$.

3028. Trouver les surfaces de niveau de la fonction

$$u = \ln \frac{1 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{1 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

3029. Trouver les surfaces de niveau de la fonction $u = \frac{x^2 + y^2}{z}$.

3030. Trouver les surfaces de niveau de la fonction: 1) $u = 5^{2x+3y-z}$, 2) $u = \operatorname{tg}(x^2 + y^2 - 2z^2)$.

**3031.** Sur la fig. 58 sont représentées les courbes de niveau de la fonction $z = f(x, y)$. Tracer le graphe des fonctions:

1) $z = f(x, 0)$; 2) $z = f(x, 4)$; 3) $z = f(1, y)$;
4) $z = f(-5, y)$; 5) $z = f(x, 3x)$; 6) $z = f(x, x^2)$.

## § 3. Dérivées et différentielles des fonctions de plusieurs variables

### Dérivées partielles

**3032.** Le volume $v$ d'un gaz est fonction de la température et de la pression: $v = f(p, T)$. L'expression $\frac{v_2 - v_1}{v_1(T_2 - T_1)}$ est appelée coefficient moyen de dilatation du gaz pour une pression constante et une température variant de $T_1$ à $T_2$. Quelle est l'expression du coefficient de dilatation pour une pression constante et une température $T_0$ donnée?

**3033.** La température en un point donné $A$ d'une tige $Ox$ est une fonction de l'abscisse $x$ du point $A$ et du temps $t$: $\theta = f(x, t)$. Quelle est la signification physique des dérivées $\frac{\partial\theta}{\partial t}$ et $\frac{\partial\theta}{\partial x}$?

**3034.** L'aire $S$ du rectangle est égale au produit de la base $b$ par la hauteur $h$: $S = bh$. Trouver $\frac{\partial S}{\partial h}$, $\frac{\partial S}{\partial b}$ et interpréter géométriquement les résultats obtenus.

**3035.** On donne deux fonctions: $u = \sqrt{a^2 - x^2}$ ($a$ est constant) et $z = \sqrt{y^2 - x^2}$. Trouver $\frac{du}{dx}$ et $\frac{\partial z}{\partial x}$. Comparer les résultats obtenus.

Trouver les dérivées partielles des fonctions données par rapport à chaque variable indépendante ($x$, $y$, $z$, $u$, $v$, $t$, $\varphi$ et $\psi$ sont des variables):

**3036.** $z = x - y$. **3037.** $z = x^3y - y^3x$.

**3038.** $\theta = axe^{-t} + bt$ ($a$, $b$ — constantes).

**3039.** $z = \frac{u}{v} + \frac{v}{u}$. **3040.** $z = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$.

**3041.** $z = (5x^2y - y^3 + 7)^3$. **3042.** $z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}$.

**3043.** $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$. **3044.** $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.

**3045.** $z = \frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$. **3046.** $z = x^y$.

**3047.** $z = \ln(x^2 + y^2)$. **3048.** $z = \ln\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$.

**3049.** $z = \arcsin\frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. **3050.** $z = \ln\operatorname{tg}\frac{x}{y}$.

3051. $z=e^{-\frac{x}{y}}$.

3052. $z=\ln(x+\ln y)$.

3053. $u=\operatorname{arctg}\frac{v+w}{v-w}$.

3054. $z=\sin\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}$.

3055. $z=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{y}{x}}$.

3056. $z=(1+xy)^y$.

3057. $z=xy\ln(x+y)$.

3058. $z=x^{xy}$.

3059. $u=xyz$.

3060. $u=xy+yz+zx$.

3061. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

3062. $u=x^3+yz^2+3yx-x+z$.

3063. $w=xyz+yzv+zvx+vxy$.

3064. $u=e^{x(x^2+y^2+z^2)}$.

3065. $u=\sin(x^2+y^2+z^2)$.

3066. $u=\ln(x+y+z)$.

3067. $u=x^{\frac{y}{z}}$.

3068. $u=x^{yz}$.

3069. $f(x, y)=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$ au point (3, 4).

3070. $z=\ln\left(x+\frac{y}{2x}\right)$ au point (1, 2).

3071. $z=(2x+y)^{2x+y}$.

3072. $z=(1+\log_y x)^3$.

3073. $z=xye^{\sin\pi xy}$.

3074. $z=(x^2+y^2)\frac{1-\sqrt{x^2+y^2}}{1+\sqrt{x^2+y^2}}$.

3075. $z=\operatorname{arctg}\sqrt{x^y}$.

3076. $z=2\sqrt{\frac{1-\sqrt{xy}}{1+\sqrt{xy}}}$.

3077. $z=\ln[xy^2+yx^2+\sqrt{1+(xy^2+yx^2)^2}]$.

3078. $z=\sqrt{1-\left(\frac{x+y}{xy}\right)^2}+\arcsin\frac{x+y}{xy}$.

3079. $z=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{2}\frac{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-1}{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+1}-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

3080. $u=\frac{k}{(x^2+y^2+z^2)^2}$.

3081. $u=\operatorname{arctg}(x-y)^z$.

3082. $u=(\sin x)^{yz}$.

3083. $u=\ln\frac{1-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

3084. $w=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2(x^2y^2+z^2v^2-xyzv)+\ln\cos(x^2y^2+z^2v^2-xyzv)$.

3085. $u=\frac{\cos(\varphi-2\psi)}{\cos(\varphi+2\psi)}$. Trouver $\left(\frac{\partial u}{\partial\psi}\right)_{\substack{\varphi=\frac{\pi}{4}\\ \psi=\pi}}$.

3086. $u=\sqrt{az^3-bt^3}$. Trouver $\frac{\partial u}{\partial z}$ et $\frac{\partial u}{\partial t}$ pour $z=b$, $t=a$.

3087. $z=\frac{x\cos y-y\cos x}{1+\sin x+\sin y}$. Trouver $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ pour $x=y=0$.

3088. $u=\sqrt{\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z}$. Trouver $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{\substack{x=0\\y=0\\z=\frac{\pi}{4}}}$.

3089. $u=\ln(1+x+y^2+z^3)$. Trouver $u'_x+u'_y+u'_z$ pour $x=y=$ $=z=1$.

3090. $f(x, y)=x^3y-y^3x$. Trouver $\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}}\right)_{\substack{x=1\\y=2}}$.

3091. Trouver la pente de la tangente à la courbe $\begin{cases} z=\frac{x^2+y^2}{4} \\ y=4 \end{cases}$ au point (2, 4, 5).

3092. Trouver l'angle formé avec l'axe $Oy$ par la tangente à la courbe $\begin{cases} z=\sqrt{1+x^2+y^2} \\ x=1 \end{cases}$ au point $(1, 1, \sqrt{3})$.

3093. Trouver l'angle des courbes planes, intersection des surfaces $z=x^2+\frac{y^2}{6}$ et $z=\frac{x^2+y^2}{3}$ par le plan $y=2$.

## Différentielles. Calcul approché

Trouver les différentielles partielles des fonctions données par rapport à chaque variable indépendante.

3094. $z=xy^3-3x^2y^2+2y^4$. 3095. $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

3096. $z=\frac{xy}{x^2+y^2}$. 3097. $u=\ln(x^3+2y^3-z^3)$.

3098. $z=\sqrt[3]{x+y^2}$. Trouver $d_yz$ pour $x=2$, $y=5$, $\Delta y=0{,}01$.

3099. $z=\sqrt{\ln xy}$. Trouver $d_xz$ pour $x=1$, $y=1{,}2$, $\Delta x=0{,}016$.

3100. $u=p-\frac{qr}{p}+\sqrt{p+q+r}$. Trouver $d_pu$ pour $p=1$, $q=3$, $=5$, $\Delta p=0{,}01$.

Trouver les différentielles totales des fonctions.

3101. $z=x^2y^4-x^3y^3+x^4y^2$. 3102. $z=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$.

3103. $z=\frac{x+y}{x-y}$. 3104. $z=\arcsin\frac{x}{y}$.

3105. $z=\sin(xy)$. 3106. $z=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$.

3107. $z=\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$. 3108. $z=\operatorname{arctg}(xy)$. 3109. $u=xy^{yz}$.

**3110.** Trouver la différentielle totale de la fonction $z = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$ pour $x = 3$, $y = 4$, $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = 0{,}2$.

**3111.** Trouver la différentielle totale de la fonction $z = e^{xy}$ pour $x = 1$, $y = 1$, $\Delta x = 0{,}15$, $\Delta y = 0{,}1$.

**3112.** Trouver la différentielle totale de la fonction $z = \frac{xy}{x^2 - y^2}$ pour $x = 2$, $y = 1$, $\Delta x = 0{,}01$, $\Delta y = 0{,}03$.

**3113.** Trouver approximativement l'accroissement de la fonction $z = \frac{x + 3y}{y - 3x}$ lorsque $x$ varie de $x_1 = 2$ à $x_2 = 2{,}5$ et $y$ de $y_1 = 4$ à $y_2 = 3{,}5$.

**3114.** Trouver une valeur approchée de $\ln(\sqrt[3]{1{,}03} + \sqrt[4]{0{,}98} - 1)$.

**3115.** Trouver une valeur approchée de $1{,}04^{2{,}02}$.

**3116.** Trouver la longueur du segment de droite $x = 2$, $y = 3$ compris entre la surface $z = x^2 + y^2$ et le plan qui lui est tangent au point $(1, 1, 2)$.

**3117.** Un corps pèse 4,1 g à 0,1 g près dans l'air et 1,8 g à 0,2 g près dans l'eau. Trouver son poids spécifique et évaluer l'erreur de calcul commise.

**3118.** Le rayon de base d'un cône est égal à $10{,}2 \pm 0{,}1$ cm, sa génératrice à $44{,}6 \pm 0{,}1$ cm. Trouver le volume de ce cône et évaluer l'erreur commise.

**3119.** Pour calculer l'aire $S$ du triangle connaissant le côté $a$ et les angles $B$ et $C$ on applique la formule

$$S = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin B \sin C}{\sin (B + C)}.$$

Trouver l'erreur relative $\delta_S$ affectant le calcul de $S$ si les erreurs relatives des grandeurs données sont respectivement $\delta_a$, $\delta_B$, $\delta_C$.

**3120.** On considère un triangle dont un côté, long de 2,4 m, croît à la vitesse de 10 cm/s tandis qu'un autre côté, long de 1,5 m, décroît à la vitesse de 5 cm/s. Sachant que l'angle de ces côtés est de 60° et qu'il croît à raison de 2° par seconde comment et à quelle vitesse variera l'aire de ce triangle?

**3121.** Les rayons de base d'un cône tronqué sont respectivement $R = 30$ cm, $r = 20$ cm et la hauteur $h = 40$ cm. Trouver l'accroissement du volume du cône lorsque $R$ croît de 3 mm, $r$ de 4 mm et $h$ de 2 mm.

**3122.** Montrer que lorsqu'on calcule la période $T$ d'oscillations d'un pendule à l'aide de la formule

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

où $l$ est la longueur du pendule, $g$ l'accélération de la force de pesanteur, l'erreur relative commise est égale à la demi-somme des erreurs

relatives affectant les grandeurs $l$ et $g$ (les erreurs sont supposées relativement petites).

**3123.** Exprimer l'erreur commise en calculant le rayon $r$ de l'arc de cercle $AB$ (fig. 59) à l'aide de la corde $2s$ et de la flèche $p$, en

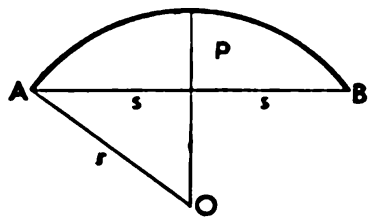


Fig. 59

fonction des erreurs $ds$ et $dp$. Evaluer $dr$ pour $2s = 19{,}45$ cm $\pm$ $\pm$ 0,5 mm, $p = 3{,}62$ cm $\pm$ 0,3 mm.

## § 4. Différentiation des fonctions

### Fonction composée

**3124.** $u = e^{x-2y}$, où $x = \sin t$, $y = t^3$, $\frac{du}{dt} = ?$

**3125.** $u = z^2 + y^2 + zy$, $z = \sin t$, $y = e^t$; $\frac{du}{dt} = ?$

**3126.** $z = \arcsin(x - y)$, $x = 3t$, $y = 4t^3$; $\frac{dz}{dt} = ?$

**3127.** $z = x^2y - y^2x$, où $x = u\cos v$, $y = u\sin v$; $\frac{\partial z}{\partial u} = ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} = ?$

**3128.** $z = x^2 \ln y$, $x = \frac{u}{v}$, $y = 3u - 2v$; $\frac{\partial z}{\partial u} = ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} = ?$

**3129.** $u = \ln(e^x + e^y)$; $\frac{\partial u}{\partial x} = ?$ Trouver $\frac{du}{dx}$, si $y = x^3$.

**3130.** $z = \operatorname{arctg}(xy)$; trouver $\frac{dz}{dx}$, si $y = e^x$.

**3131.** $u = \arcsin\frac{x}{z}$, où $z = \sqrt{x^2+1}$; $\frac{du}{dx} = ?$

**3132.** $z = \operatorname{tg}(3t + 2x^2 - y)$, $x = \frac{1}{t}$, $y = \sqrt{t}$, $\frac{dz}{dt} = ?$

**3133.** $u = \frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$, $y = a\sin x$, $z = \cos x$; $\frac{du}{dx} = ?$

**3134.** $z = \frac{xy\operatorname{arctg}(xy+x+y)}{x+y}$; $dz = ?$

**3135.** $z = (x^2+y^2)e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}$; $\frac{\partial z}{\partial x} = ?$ $\frac{\partial z}{\partial y} = ?$ $dz = ?$

**3136.** $z = f(x^2 - y^2, e^{xy})$; $\frac{\partial z}{\partial x} = ?$ $\frac{\partial z}{\partial y} = ?$

**3137.** Montrer que la fonction $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$, où $x = u + v$, $y = u - v$, vérifie la relation $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u - v}{v^2 + u^2}$.

**3138.** Montrer que la fonction $z = \varphi(x^2 + y^2)$, où $\varphi(u)$ est une fonction différentiable, vérifie la relation $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

**3139.** On donne $u = \sin x + F(\sin y - \sin x)$ ; montrer que $\frac{\partial u}{\partial y} \times \cos x + \frac{\partial u}{\partial x} \cos y = \cos x \cos y$ quelle que soit la fonction différentiable $F$.

**3140.** On donne $z = \frac{y}{f(x^2 - y^2)}$ ; montrer que $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$ quelle que soit la fonction différentiable $f$.

**3141.** Montrer que la fonction différentiable homogène de degré 0 $z = F\left(\frac{y}{x}\right)$ (cf. exercice 2961) vérifie la relation $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

**3142.** Montrer que la fonction homogène de degré $k$: $u = x^k E \times F\left(\frac{z}{x}; \frac{y}{x}\right)$, où $F$ est une fonction différentiable, vérifie la relation $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = ku$.

**3143.** Même problème pour la fonction $u = x^5 \sin \frac{z^2 + y^2}{x^2}$.

**3144.** On donne une fonction différentiable $f(x, y)$. Montrer que si l'on remplace les variables $x$ et $y$ par des fonctions de $X$ et $Y$ linéaires et homogènes, la fonction $F(X, Y)$ ainsi obtenue est liée avec la fonction donnée par la relation

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = X \frac{\partial F}{\partial X} + Y \frac{\partial F}{\partial Y}.$$

## Fonctions données implicitement et paramétriquement

Trouver la dérivée $\frac{dy}{dx}$ des fonctions implicites.

**3145.** $x^3 y - y^3 x = a^4$.

**3146.** $x^2 y^2 - x^4 - y^4 = a^4$.

**3147.** $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0$.

**3148.** $(x^2 + y^2)^2 - a^2 (x^2 - y^2) = 0$.

**3149.** $\sin(xy) - e^{xy} - x^2 y = 0$.

**3150.** $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

**3151.** $xy - \ln y = a$.

**3152.** $\operatorname{arctg} \frac{x + y}{a} - \frac{y}{a} = 0$.

**3153.** $yx^2 = e^y$. **3154.** $ye^x + e^y = 0$. **3155.** $y^x = x^y$.

**3156.** $F(x, y) = F(y, x)$. Montrer que la dérivée par rapport à $x$ peut être exprimée au moyen d'une fraction dont le numérateur se déduit du dénominateur par permutation des variables $y$ et $x$.

**3157.** Soit $x^2+y^2-4x-10y+4=0$; trouver $\frac{dy}{dx}$ pour $x=6$, $y=2$ et pour $x=6$ et $y=8$. Interpréter géométriquement les résultats obtenus.

**3158.** Soit $x^4y+xy^4-ax^2y^2=a^5$; trouver $\frac{dy}{dx}$ pour $x=y=a$.

**3159.** Montrer que $x^2y^2+x^2+y^2-1=0$ entraîne :

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}=0.$$

**3160.** Montrer que $a+b(x+y)+cxy=m(x-y)$ entraîne :

$$\frac{dx}{a+2bx+cx^2}=\frac{dy}{a+2by+cy^2}.$$

**3161.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ; $\frac{\partial z}{\partial x}=?$ $\frac{\partial z}{\partial y}=?$

**3162.** $x^2-2y^2+z^2-4x+2z-5=0$ ; $\frac{\partial z}{\partial x}=?$ $\frac{\partial z}{\partial y}=?$

**3163.** $z^3+3xyz=a^3$ ; $\frac{\partial z}{\partial x}=?$ $\frac{\partial z}{\partial y}=?$

**3164.** $e^z-xyz=0$ ; $\frac{\partial z}{\partial x}=?$ $\frac{\partial z}{\partial y}=?$

**3165.** Montrer que quelle que soit la fonction différentiable $\varphi$ la relation $\varphi(cx-az,\ cy-bz)=0$ entraîne :

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c.$$

**3166.** On a $F(x, y, z)=0$. Montrer que

$$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}=1\ ;\qquad \frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x}=-1.$$

**3167.** Trouver la différentielle totale de la fonction $z$ définie par l'équation $\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z=1$.

**3168.** Une fonction $z$ est donnée par les équations paramétriques $x=u+v$, $y=u-v$, $z=uv$. Exprimer $z$ en fonction de $x$ et $y$.

**3169.** On donne $x=u+v$, $y=u^2+v^2$, $z=u^3+v^3$. Exprimer $z$ en fonction de $x$ et $y$.

**3170.** On donne $x=u\cos v$, $y=u\sin v$; $z=kv$. Exprimer $z$ en fonction de $x$ et $y$.

Exprimer $dz$ en fonction de $x, y, z, dx$ et $dy$ des fonctions données par les équations paramétriques.

**3171.** $x=\frac{u^2+v^2}{2}$, $y=\frac{u^2-v^2}{2}$, $z=uv$.

3172. $x = \sqrt{a}(\sin u + \cos v)$, $y = \sqrt{a}(\cos u - \sin v)$, $z = 1 + \sin(u - v)$.

3173. $x = u + v$, $y = u - v$, $z = u^2v^2$.

3174. $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = u^2$.

3175. $x = v \cos u - u \cos u + \sin u$, $y = v \sin u - u \sin u - \cos u$, $z = (u - v)^2$.

3176. $x = e^u \cos v$, $y = e^u \sin v$, $z = uv$. Exprimer $dz$ en fonction de $u$, $v$, $dx$, $dy$.

3177. Les relations $u = f(x, y)$, $v = F(x, y)$, où $f$ et $F$ sont des fonctions différentiables de $x$ et $y$, définissent $x$ et $y$ comme des fonctions différentiables de $u$ et $v$. Montrer que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) = 1.$$

3178. Entre les fonctions $u$ et $v$ de $x$, $y$ et $z$ on a les relations $uv = 3x - 2y + z$, $v^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Montrer que

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

3179. Soient $y = f(x, t)$, $F(x, y, t) = 0$. Vérifier que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial t}}.$$

3180. Soient $f(x, y, z) = 0$, $F(x, y, z) = 0$. Vérifier que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

## § 5. Différentiation successive

3181. $y = x^3 + xy^2 - 5xy^3 + y^5$. Montrer que $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

3182. $z = x^y$. Montrer que $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

3183. $z = e^x(\cos y + x \sin y)$. Montrer que $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

3184. $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. Montrer que $\frac{\partial^3 z}{\partial y^2\,\partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}$.

Calculer $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ et $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ des fonctions données.

3185. $z = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + y^2)^3}$.

3186. $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$.

3187. $z = \operatorname{arctg}\frac{x + y}{1 - xy}$.

3188. $z = \sin^2(ax + by)$.

3189. $z = e^{xe^y}$. 3190. $z = \frac{x-y}{x+y}$.

3191. $z = y^{\ln x}$. 3192. $z = \arcsin(xy)$.

3193. $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2-2xz}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = ?$

3194. $z = e^{xy^2}$; $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} = ?$

3195. $z = \ln(x^2+y^2)$; $\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} = ?$ 3196. $z = \sin xy$; $\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} = ?$

3197. $w = e^{xyz}$; $\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = ?$ 3198. $v = x^m y^n z^p$; $\frac{\partial^6 v}{\partial x\,\partial y^3\,\partial z^2} = ?$

3199. $z = \ln(e^x + e^y)$; montrer que $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$ et que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 0.$$

3200. $u = e^x(x\cos y - y\sin y)$. Montrer que $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

3201. $u = \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$; montrer que $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

3202. $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; montrer que $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

3203. $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$; montrer que

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{2}{r}, \quad \frac{\partial^2(\ln r)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\ln r)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\ln r)}{\partial z^2} = \frac{1}{r^2}.$$

3204. Pour quelle valeur de la constante $a$ la fonction $v = x^3 + axy^2$ vérifie-t-elle l'égalité $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ ?

3205. $z = \frac{y}{y^2 - a^2x^2}$; montrer que $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

3206. $v = \frac{1}{x-y} + \frac{1}{y-z} + \frac{1}{z-x}$; montrer que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial x}\right) = 0.$$

3207. $z = f(x, y)$, $\xi = x+y$, $\eta = x-y$. Vérifier que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta}.$$

3208. $v = x\ln(x+r) - r$, où $r^2 = x^2+y^2$. Montrer que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{1}{x+r}.$$

3209. Trouver l'expression de la dérivée seconde de la fonction $y$ donnée implicitement par l'équation $f(x, y) = 0$.

3210. $y = \varphi(x-at) + \psi(x+at)$. Montrer que $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ quelles que soient les fonctions deux fois différentiables $\varphi$ et $\psi$.

**3211.** $u=\varphi(x)+\psi(y)+(x-y)\psi'(y)$. Vérifier que

$$(x-y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}$$

($\varphi$ et $\psi$ sont deux fois différentiables).

**3212.** $z=y\varphi(x^2-y^2)$. Vérifier que $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$ ($\varphi$ est une fonction différentiable).

**3213.** $r=x\varphi(x+y)+y\psi(x+y)$. Montrer que

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}=0$$

($\varphi$ et $\psi$ sont deux fois différentiables).

**3214.** $u=\frac{1}{y}[\varphi(ax+y)+\psi(ax-y)]$. Montrer que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{a^2}{y^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

**3215.** $u=\frac{1}{x}[\varphi(x-y)+\psi(x+y)]$. Montrer que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial u}{\partial x}\right)=x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

**3216.** $u=xe^y+ye^x$. Montrer que

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}=x\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}+y\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}.$$

**3217.** $u=e^{xyz}$. Montrer que

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+2x\frac{\partial u}{\partial x}+u.$$

**3218.** $u=\ln\frac{x^2-y^2}{xy}$. Montrer que

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}-\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}=\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}=2\left(\frac{1}{y^3}-\frac{1}{x^3}\right).$$

Trouver les différentielles secondes des fonctions données.

**3219.** $z=xy^2-x^2y$. **3220.** $z=\ln(x-y)$.

**3221.** $z=\frac{1}{2(x^2+y^2)}$. **3222.** $z=x\sin^2 y$.

**3223.** $z=e^{xy}$. **3224.** $u=xyz$.

**3225.** $z=\sin(2x+y)$. Calculer $d^3z$ aux points $(0,\pi)$ ; $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

**3226.** $u=\sin(x+y+z)$ ; $d^2u=?$

**3227.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ; $d^2z=?$

**3228.** $z^3-3xyz=a^3$ ; $d^2z=?$

**3229.** $3x^2y^2+2z^2xy-2zx^3+4zy^3-4=0$. Calculer $d^2z$ au point $(2, 1, 2)$.

## Changement de variables

**3230.** Transformer l'expression différentielle

$$x^4 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x^3 \frac{dy}{dx} + y$$

en posant $x = 1/t$.

**3231.** Transformer l'expression différentielle

$$x^2y'' - 4xy' + y$$

en posant $x = e^z$.

**3232.** Transformer l'expression différentielle

$$(1 - x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + ay$$

en posant $x = \sin t$.

**3233.** Transformer l'expression différentielle $\frac{y''}{y'^3} + y$ en supposant que $x$ est fonction de la variable indépendante $y$.

**3234.** Transformer l'expression $y'y''' - 3y''^2$ en prenant $y$ pour variable indépendante.

**3235.** Exprimer $yy'' - 2(y^2 + y'^2)$ en fonction de $v$ en supposant que $y = \frac{1}{v}$.

**3236.** Ecrire l'équation suivante en coordonnées polaires

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}.$$

Les formules de passage des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes sont $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$.

**3237.** Ecrire l'expression $k = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ en coordonnées polaires $\rho$, $\varphi$.

**3238.** On donne une fonction $z$ de $x$ et $y$. Dans l'expression $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y}$ procéder au changement de variables $x = u \cos v$; $y = u \sin v$.

**3239.** Ecrire l'opérateur de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ en coordonnées polaires.

**3240.** Ecrire l'expression $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + kz$ en coordonnées polaires en supposant que $z = \omega(\rho)$ dépend de $\rho$ et pas de $\varphi$.

**3241.** Dans l'expression $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, procéder au changement de variables suivant: $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{u-v}{2}$, $z = \frac{u^2 - v^2}{4} - w$.

# CHAPITRE XI

# APPLICATIONS DU CALCUL DIFFÉRENTIEL AUX FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

## § 1. Formule de Taylor.

## Extrémums des fonctions de plusieurs variables

### Formule de Taylor

**3242.** Soit $f(x, y) = x^3 + 2y^3 - xy$; développer la fonction $f(x + h, y + k)$ suivant les puissances de $h$ et $k$.

**3243.** Soit $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 4$; trouver l'accroissement de cette fonction lorsque les variables croissent de $x = 5$ et $y = 6$ à $x = 5 + h$ et $y = 6 + k$.

**3244.** Soit $f(x, y) = \frac{xy^3}{4} - yx^3 + \frac{x^2y^2}{2} - 2x + 3y - 4$; trouver l'accroissement de cette fonction lorsque les variables croissent de $x = 1$, $y = 2$ à $x = 1 + h$, $y = 2 + k$. Calculer $f(1{,}02)$ et $f(2{,}03)$ en se limitant aux termes d'ordre 2.

**3245.** Soit $f(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx$; développer $f(x + h, y + k, z + l)$ suivant les puissances de $h$, $k$, $l$.

**3246.** Développer la fonction $z = \sin x \sin y$ suivant les puissances de $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ et $\left(y - \frac{\pi}{4}\right)$. Trouver les termes du premier et du second ordre ainsi que $R_2$ (le terme résiduel du deuxième ordre).

**3247.** Développer la fonction $z = x^y$ suivant les puissances de $(x - 1)$ et $(y - 1)$ jusqu'au terme du troisième degré inclus. Appliquer ce résultat au calcul de $1{,}1^{1{,}02}$ sans recourir à une table.

**3248.** Soit $f(x, y) = e^x \sin y$. Développer $f(x + h, y + k)$ suivant les puissances de $h$ et $k$ en se limitant aux termes du troisième ordre. Appliquer ce résultat au calcul de $e^{0{,}1} \sin 0{,}49\pi$.

**3249.** Trouver quelques premiers termes du développement de la fonction $e^x \sin y$ en série de Taylor au voisinage du point $(0, 0)$.

**3250.** Trouver quelques premiers termes du développement de la fonction $e^x \ln(1 + y)$ en série de Taylor au voisinage du point $(0, 0)$.

Développer en série de Taylor pour $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$ les fonctions données.

**3251.** $z = \frac{1}{1 - x - y + xy}$.

**3252*.** $z = \operatorname{arctg} \frac{x - y}{1 + xy}$.

**3253.** $z = \ln(1 - x) \ln(1 - y)$.

**3254.** $z = \ln \frac{1 - x - y + xy}{1 - x - y}$.

**3255.** $z = \sin(x^2 + y^2)$.

3256. $z = e^x \cos y$.

3257. Trouver quelques premiers termes du développement suivant les puissances de $x - 1$, $y - 1$ de la fonction $z$ donnée implicitement par l'équation

$$z^3 + yz - xy^2 - x^3 = 0$$

et égale à 1 pour $x = 1$ et $y = 1$.

3258. Etablir la formule approchée

$$\frac{\cos x}{\cos y} \approx 1 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

pour les valeurs suffisamment grandes de $|x|$, $|y|$.

## Extrémums

Trouver les points stationnaires des fonctions.

3259. $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.

3260. $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$.

3261. $z = xy(a - x - y)$.

3262. $z = (2ax - x^2)(2by - y^2)$.

3263. $z = \sin x + \sin y + \cos(x + y)$ $\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4},\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

3264. $z = \frac{a + bx + cy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$. 3265. $z = y\sqrt{1 + x} + x\sqrt{1 + y}$.

3266. $u = 2x^2 + y^2 + 2z - xy - xz$.

3267. $u = 3 \ln x + 2 \ln y + 5 \ln z + \ln(22 - x - y - z)$.

3268. La fig. 60 représente les courbes de niveau de la fonction $z = f(x, y)$. Etudier cette fonction aux points $A$, $B$, $C$, $D$ et sur la courbe $EF$.

3269. Soit une fonction implicite $z$ définie par la relation: $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$. Trouver ses points stationnaires.

3270. Une fonction $z$ est définie implicitement par la relation $5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72 = 0$. Trouver ses points stationnaires.

3271. Trouver les points d'extrémum de la fonction $z = 2xy - 3x^2 - 2z^2 + 10$.

3272. Trouver les points d'extrémum de la fonction $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$.

3273. Trouver les points d'extrémum de la fonction $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$.

3274. Montrer que la fonction $z = x^2 + xy + y^2 + \frac{a^3}{x} + \frac{a^2}{y}$ présente un minimum au point $x = y = \frac{a}{\sqrt[3]{3}}$.

**3275.** Vérifier que pour $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$ et pour $x = -\sqrt{2}$, $y = -\sqrt{2}$ la fonction $z = x^4 + y^4 - 2x^2 - 4xy - 2y^2$ présente un minimum.

**3276.** Vérifier que la fonction $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$ présente un minimum pour $x = 5$, $y = 6$.

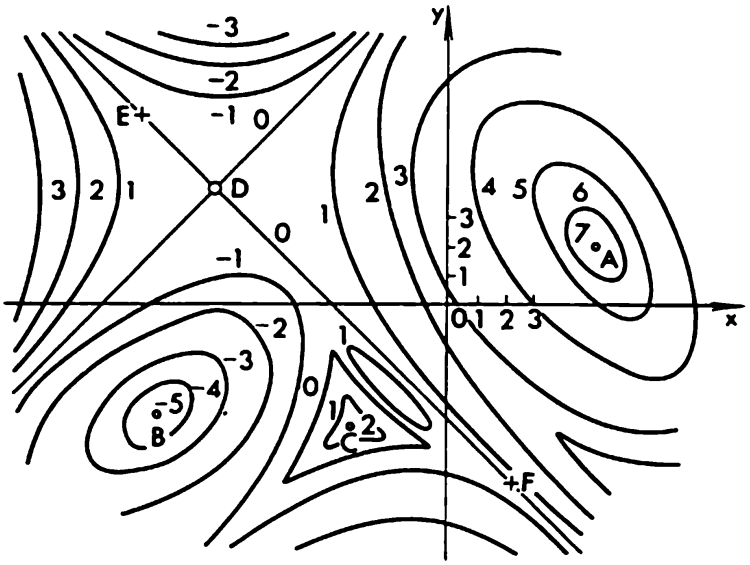


Fig. 60

**3277.** Trouver les points stationnaires de la fonction $z = x^3y^2(12 - x - y)$ tels que $x > 0$, $y > 0$ et déterminer leur nature.

**3278.** Trouver les points stationnaires de la fonction $z = x^3 + y^3 - 3xy$ et déterminer leur nature.

## Maximums et minimums

**3279.** Trouver le maximum et le minimum de la fonction $z = x^2 - y^2$ dans le cercle $x^2 + y^2 \leqslant 4$.

**3280.** Trouver le maximum et le minimum de la fonction $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ dans le rectangle compris entre les droites

$$x = 0,\ y = 0,\ x = 1,\ y = 2.$$

**3281.** Trouver le maximum de la fonction $z = x^2y(4 - x - y)$ dans le triangle limité par les droites $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

**3282.** Trouver le maximum et le minimum de la fonction

$$z = e^{-x^2-y^2}(2x^2 + 3y^2)$$

dans le cercle $x^2 + y^2 \leqslant 4$.

**3283.** Trouver le maximum et le minimum de la fonction $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ dans le rectangle $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$; $0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$.

3284. Décomposer un nombre positif $a$ en trois termes positifs tels que leur produit soit maximal.

3285. Décomposer un nombre positif $a$ en un produit de quatre termes positifs tels que leur somme soit minimale.

3286. Dans le plan $Oxy$, trouver un point dont la somme des carrés des distances aux droites $x = 0$, $y = 0$, $x + 2y - 16 = 0$ soit minimale.

3287. Par le point $(a, b, c)$ tracer un plan tel que le volume du tétraèdre découpé sur les axes de coordonnées soit minimal.

3288. On donne $n$ points: $A_1(x_1, y_1, z_1), \ldots, A_n(x_n, y_n, z_n)$. Dans le plan $Oxy$ trouver un point dont la somme des carrés des distances à tous ces points soit minimale.

3289. On donne trois points $A$ (0, 0, 12), $B$ (0, 0, 4) et $C$ (8, 0, 8). Dans le plan $Oxy$ trouver un point $D$ tel que la sphère passant par $A$, $B$, $C$ et $D$ possède un rayon minimal.

3290. Inscrire un parallélépipède rectangle de volume maximal dans une sphère donnée de diamètre $2R$.

## Extrémums liés

Trouver les extrémums des fonctions.

3291. $z = x^m + y^m$ $(m > 1)$ pour $x + y = 2$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$.

3292. $z = xy$ pour $x^2 + y^2 = 2a^2$.

3293. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ pour $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$.

3294. $z = a\cos^2 x + b\cos^2 y$ pour $y - x = \frac{\pi}{4}$.

3295. $u = x + y + z$ pour $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

3296. $u = xyz$ pour $\begin{cases} 1)\ x + y + z = 5, \\ 2)\ xy + xz + yz = 8. \end{cases}$

3297*. Etablir la relation

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} \geqslant \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^2.$$

3298. Soit $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 18y$ telle que $3x^2y - y^3 - 6x = 0$. Montrer que la fonction $f(x, y)$ atteint un extrémum aux points $x = y = \pm\sqrt{3}$.

3299. Trouver le minimum de la fonction $u = ax^2 + by^2 + cz^2$, où $a$, $b$, $c$ sont des constantes positives et $x$, $y$ et $z$ tels que $x + y + z = 1$.

3300. Trouver le maximum et le minimum de la fonction $u = y^2 + 4z^2 - 4yz - 2xz - 2xy$ sous réserve que $2x^2 + 3y^2 + 6z^2 = 1$.

3301. Dans le plan $3x - 2z = 0$ trouver le point dont la somme des carrés des distances aux points $A$ (1, 1, 1) et $B$ (2, 3, 4) est minimale.

**3302.** Dans le plan $x + y - 2z = 0$ trouver le point dont la somme des carrés des distances aux plans $x + 3z = 6$ et $y + 3z = 2$ soit minimale.

**3303.** On donne les points $A$ (4, 0, 4), $B$ (4, 4, 4) et $C$ (4, 4, 0). Sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ trouver un point $S$ tel que le volume de la pyramide $SABC$ soit: a) maximal, b) minimal. Vérifier géométriquement par un moyen élémentaire.

**3304.** Trouver le parallélépipède rectangle de volume donné $V$ qui possède la plus petite surface.

**3305.** Trouver le parallélépipède rectangle de surface donnée $S$ qui possède le plus grand volume.

**3306.** Trouver le volume du plus grand parallélépipède rectangle inscriptible dans un ellipsoïde de demi-axes $a$, $b$ et $c$.

**3307.** Une tente a la forme d'un cylindre coiffé d'un cône. Etablir entre les dimensions linéaires de cette tente les relations qui nécessitent le moins de tissu à sa confection sachant que son volume est donné.

**3308.** La section d'un canal a la forme d'un trapèze isocèle de surface donnée. Comment choisir ses côtés pour que la surface mouillée soit minimale (fig. 61)?

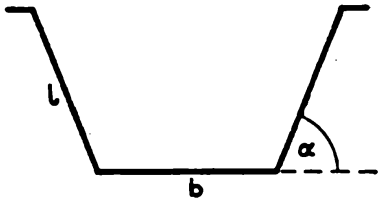

Fig. 61

**3309.** Parmi les parallélépipèdes rectangles de diagonale donnée trouver celui dont le volume est maximal.

**3310.** On désire construire une caisse ouverte (sans couvercle) ayant la forme d'un parallélépipède rectangle. Trouver les dimensions extérieures qui nécessitent le moins de matériel pour un volume $V$ et une épaisseur des parois $\alpha$ donnés.

**3311.** Trouver le plus grand volume d'un parallélépipède dont la somme des arêtes est $12a$.

**3312.** Inscrire une ellipse donnée dans un triangle tel que sa base soit parallèle au grand axe et son aire soit minimale.

**3313.** Sur l'ellipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ trouver le point le plus proche et le point le plus éloigné de la droite $3x + y - 9 = 0$.

**3314.** Sur la parabole $x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0$ trouver le point le plus proche de la droite $3x - 6y + 4 = 0$.

**3315.** Sur la parabole $2x^2 - 4xy + 2y^2 - x - y = 0$ trouver le point le plus proche de la droite $9x - 7y + 16 = 0$.

**3316.** Trouver la distance maximale des points de la surface

$$2x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xz = 6$$

au plan $z = 0$.

**3317.** Trouver les côtés d'un triangle rectangle dont le périmètre soit minimal pour une surface $S$ donnée.

**3318.** Dans un cône elliptique droit dont les demi-axes de la base sont égaux à $a$ et $b$ et la hauteur à $h$ est inscrit un prisme de base rectangulaire de telle sorte que les côtés de la base sont parallè-

les aux axes et l'intersection des diagonales de la base se trouve au centre de l'ellipse. Quels doivent être les côtés de la base et la hauteur de ce prisme pour que son volume soit maximal? Calculer ce volume.

**3319.** Trouver une pyramide triangulaire régulière de volume donné dont la somme des arêtes soit minimale.

**3320.** Sur une ellipse on donne deux points; trouver un troisième point tel que le triangle de sommets les points indiqués possède une surface maximale.

**3321.** Soit l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Tracer la normale la plus éloignée de l'origine des coordonnées.

**3322.** Sur l'ellipsoïde de révolution $\frac{x^2}{96}+y^2+z^2=1$ trouver le point le plus proche et le point le plus éloigné du plan $3x+4y+12z=288$.

**3323.** On donne les courbes planes $f(x, y) = 0$ et $\varphi(x, y) = 0$. Montrer que l'extrémum de la distance entre les points $(\alpha, \beta)$ et $(\xi, \eta)$ contenus respectivement sur ces lignes existe si sont réalisées les conditions suivantes:

$$\frac{\alpha-\xi}{\beta-\eta}=\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\substack{x=\alpha\\ y=\beta}}}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\substack{x=\alpha\\ y=\beta}}}=\frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{\substack{x=\xi\\ y=\eta}}}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{\substack{x=\xi\\ y=\eta}}}.$$

Appliquer ce résultat pour trouver la plus courte distance de l'ellipse $x^2 + 2xy + 5y^2 - 16y = 0$ à la droite $x + y - 8 = 0$.

## § 2. Courbes planes

### Tangentes et normales

Ecrire les équations de la tangente et la normale aux courbes aux points indiqués.

**3324.** $x^3y + y^3x = 3 - x^2y^2$ au point $(1, 1)$.

**3325.** $a^2(x^4 + y^4) - x^3y^3 = 9a^6$ au point $(a, 2a)$.

**3326.** $\cos xy = x + 2y$ au point $(1, 0)$.

**3327.** $2x^3 - x^2y + 3x^2 + 4xy - 5x - 3y + 6 = 0$ à son point d'intersection avec l'axe $Oy$.

### Points singuliers

Trouver les points singuliers des courbes.

**3328.** $y^2 = x^2(x - 1)$.

**3329.** $a^2x^2 = (x^2 + y^2)y^2$.

**3330.** $y^2 = ax^2 + bx^5$.

**3331.** $y^2 = x(x - a)^2$.

**3332.** $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

**3333.** $x^4+y^4-8x^2-10y^2+16=0$.

**3334.** $x^4 + 12x^3 - 6y^3 + 36x^2 + 27y^2 - 81 = 0$.

3335. $x^3 + y^3 + 3axy = 0$. 3336. $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$.
3337. $y = x \ln x$. 3338. $y^2 = \sin^3 x$. 3339. $y^2 = (x - a)^3$.
3340. $x^5 = (y - x^2)^2$.

## Enveloppes

3341. Trouver l'enveloppe de la famille de droites $y = ax + f(a)$. En particulier poser $f(a) = \cos a$.

3342. Trouver l'enveloppe de la famille de droites $y = 2mx + m^4$.

3343. Par un point $A(a, 0)$ on trace un faisceau de droites. Trouver l'enveloppe de la famille de normales aux droites de ce faisceau en leurs points d'intersection avec l'axe $Oy$.

3344. Trouver l'enveloppe de la famille de paraboles $y^2 = a(x - a)$.

3345. Trouver l'enveloppe de la famille de paraboles $ax^2 + a^2y = 1$.

3346. Trouver l'enveloppe de la famille de paraboles $y = a^2(x - a)^2$.

3347. Trouver l'enveloppe de la famille de paraboles semi-cubiques $(y - a)^2 = (x - a)^3$.

3348. Trouver l'enveloppe de la famille de courbes $x^2 + ay^2 = a^3$.

3349. Trouver l'enveloppe de la famille d'ellipses $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ sous réserve que la somme des demi-axes de chaque ellipse soit égale à $d$.

3350. Les rayons d'un cercle se projettent sur deux diamètres perpendiculaires, puis sur les projections qui sont prises comme demi-axes on construit des ellipses. Trouver l'enveloppe de la famille d'ellipses obtenue.

3351. Trouver l'enveloppe de la famille de cercles centrés sur la parabole $y = bx^2$ et passant par son sommet.

3352. Une droite se déplace de telle manière que la somme des segments qu'elle découpe sur les axes de coordonnées reste constante et égale à $a$. Trouver l'enveloppe de la famille de droites obtenues.

3353. Trouver l'enveloppe d'un diamètre d'un cercle de rayon $R$ roulant sans glisser sur une droite donnée.

3354. On considère une famille de cercles dont les diamètres sont les cordes d'un cercle de rayon $R$ parallèles à une direction donnée. Trouver l'enveloppe de cette famille de cercles.

3355. Une droite se déplace de manière que le produit des segments qu'elle découpe sur les axes de coordonnées reste égal à une constante $a$. Trouver l'enveloppe de cette droite.

3356. Montrer que toute courbe est enveloppe d'une famille de ses tangentes.

3357. Montrer que la développée d'une courbe est l'enveloppe d'une famille de ses normales. Montrer que la développée de la parabole $y^2 = 2px$ est le lieu géométrique des centres de courbure et l'enveloppe de la famille de normales. Comparer les résultats.

3358. Montrer le théorème: si une courbe $(A)$ est l'enveloppe de la famille de droites $x \cos t + y \sin t - f(t) = 0$, alors la développée de la courbe $(A)$ est l'enveloppe de la famille de droites $-x \sin t + y \cos t - f'(t) = 0$.

3359. Le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ d'un point arbitraire $M$ de l'hyperbole équilatère $xy = 1$ est projeté sur les asymptotes de cette hyperbole. Trouver l'enveloppe des ellipses admettant pour demi-axes es projections de $\overrightarrow{OM}$.

## § 3. Fonction vectorielle d'un argument scalaire. Courbes gauches. Surfaces

### Fonction vectorielle d'un argument scalaire

3360. Etablir les formules de différentiation

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \boldsymbol{v}\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}, \quad \frac{d}{dt}(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \times \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} \times \boldsymbol{v},$$

où $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont des fonctions vectorielles de l'argument scalaire $t$.

3361. Soit $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$. Trouver les dérivées

a) $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}^2)$; b) $\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)$; c) $\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)$; d) $\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right)$.

3362. Montrer que les vecteurs $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}, \frac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3}, \ldots, \frac{d^n\boldsymbol{r}}{dt^n}$ et $\boldsymbol{r}(t)$ sont colinéaires si $\boldsymbol{r}(t)$ et $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ le sont quel que soit $t$.

3363. Montrer que si la fonction $\boldsymbol{r}(t)$ est constante en module, i.e. $|\boldsymbol{r}| = \text{const}$, quel que soit $t$, alors $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \perp \boldsymbol{r}$. (Interpréter géométriquement.) Traiter la réciproque.

3364. On donne $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} \cos \omega t + \boldsymbol{b} \sin \omega t$, où $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont des vecteurs constants. Montrer que

$$1)\ \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \omega \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \text{ et } 2)\ \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} + \omega^2 \boldsymbol{r} = 0.$$

3365. Montrer que si $\boldsymbol{e}$ est le vecteur unitaire de la direction de $\boldsymbol{E}$, alors $\boldsymbol{e} \times d\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{E} \times d\boldsymbol{E}}{E^2}$.

3366. Montrer que si $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}e^{\omega t} + \boldsymbol{b}e^{-\omega t}$, où $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont des vecteurs constants, alors $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} - \omega^2 \boldsymbol{r} = 0$.

3367. Soit $\boldsymbol{u} = \alpha(x, y, z, t)\,\boldsymbol{i} + \beta(x, y, z, t)\,\boldsymbol{j} + \gamma(x, y, z, t)\,\boldsymbol{k}$, où $x$, $y$ et $z$ sont fonctions de $t$. Montrer que

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

3368. Soit $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u)$, $u = \varphi(x)$. Exprimer les dérivées

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dx}, \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dx^2} \text{ et } \frac{d^3\boldsymbol{r}}{dx^3} \text{ en fonction de } \frac{d\boldsymbol{r}}{du}, \frac{d^2\boldsymbol{r}}{du^2}, \frac{d^3\boldsymbol{r}}{du^3}.$$

3369. Montrer que si la fonction vectorielle $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ est telle que $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \alpha \cdot \boldsymbol{r}$, où $\alpha = \text{const}$, alors l'hodographe de la fonction $\boldsymbol{r}(t)$ est un rayon issu du pôle.

3370. Soit une fonction $\boldsymbol{r}(t)$ définie, continue, dérivable dans l'intervalle $]t_1, t_2[$ et telle que $\boldsymbol{r}(t_1) = \boldsymbol{r}(t_2)$. Appliquer le théorème de Rolle à la fonction $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r}$, où $\boldsymbol{a}$ est un vecteur constant quelconque. Interpréter géométriquement.

3371. Soit le rayon vecteur $\boldsymbol{r}\{a \sin t, -a \cos t, bt^2\}$ d'un point mobile dans l'espace ($t$ est le temps, $a$ et $b$ des constantes). Trouver l'hodographe de la vitesse et de l'accélération.

3372. Trouver la trajectoire du mouvement d'un point dont le rayon vecteur vérifie la condition $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}$, où $\boldsymbol{a}$ est un vecteur constant.

3373. Un point matériel est animé d'un mouvement défini par la loi $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}_0 t + 1/2 \boldsymbol{g} t^2$ ($\boldsymbol{r}$ est le rayon vecteur de ce point à l'instant $t$, $\boldsymbol{v}_0$ et $\boldsymbol{g}$ des vecteurs donnés). Montrer que : 1) l'énergie cinétique du point matériel est une fonction du second degré en $t$; 2) $\boldsymbol{v}_0$ est la vitesse initiale (i.e. la valeur du vecteur vitesse à la date $t = 0$) ; 3) l'accélération du mouvement est constante et égale à $\boldsymbol{g}$; 4) la trajectoire du mouvement est une parabole (si seulement les vecteurs $\boldsymbol{v}_0$ et $\boldsymbol{g}$ ne sont pas colinéaires) dont l'axe est parallèle au vecteur $\boldsymbol{g}$.

3374. Un point matériel est animé d'un mouvement d'équation

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} \cos t + \boldsymbol{b} \sin t + \boldsymbol{c},$$

où les vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont perpendiculaires. Trouver la trajectoire du mouvement. A quelles dates la vitesse du mouvement sera-t-elle maximale? A quelles dates l'accélération sera-t-elle maximale?

3375. Les formules de passage des coordonnées cartésiennes aux sphériques s'écrivent $x = \rho \sin \theta \cos \varphi$, $y = \rho \sin \theta \sin \varphi$, $z = \rho \cos \theta$, où $\rho$ est la distance du point donné au pôle, $\theta$ la latitude, $\varphi$ l'azimut ou la longitude. Trouver les composantes de la vitesse d'un point matériel sur les directions des vecteurs orthonormés $\boldsymbol{e}_\rho$, $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_\varphi$.

## Courbes gauches

Ecrire l'équation de la tangente et de la normale aux courbes données aux points indiqués.

3376. $\boldsymbol{r}\left(\frac{t^4}{4}, \frac{t^3}{3}, \frac{t^2}{2}\right)$ en un point quelconque.

3377. La courbe $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$, $z = \frac{k}{2\pi}\varphi$ au point $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{k}{8}\right)$. Montrer qu'en tous les points de cette courbe la tangente fait le même angle avec l'axe $Oz$.

3378. $x = at$, $y = \frac{1}{2}at^2$, $z = \frac{1}{3}at^3$ au point $(6a, 18a, 72a)$.

3379. $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 4\sin\frac{t}{2}$ au point $(\pi/2 - 1, 1, 2\sqrt{2})$.

3380. $y^2 + z^2 = 25$, $x^2 + y^2 = 10$ au point $(1, 3, 4)$.

3381. $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 47$, $x^2 + 2y^2 = z$ au point $(-2, 1, 6)$.

3382. $x^2 + y^2 = z^2$, $x = y$ au point $(x_0, y_0, z_0)$.

3383. $x^3 + z^3 = a^3$, $y^3 + z^3 = b^3$ en un point quelconque.

3384. Sur la courbe $r\{\cos t, \sin t, e^t\}$ trouver le point en lequel la tangente est parallèle au plan $\sqrt{3}\,x + y - 4 = 0$.

Ecrire les équations du plan osculateur, de la normale principale et de la binormale aux courbes données aux points indiqués.

3385. $y^2 = x$, $x^2 = z$ au point $(1, 1, 1)$.

3386. $x^2 = 2az$, $y^2 = 2bz$ en un point quelconque.

3387. $r\{e^t, e^{-t}, t\sqrt{2}\}$ au point $(e, e^{-1}, \sqrt{2})$.

3388. Montrer que les tangentes, les normales principales et les binormales à la courbe $r\{e^t\cos t, e^t\sin t, e^t\}$ font des angles constants avec l'axe $Oz$.

Ecrire les équations de la tangente, du plan normal, de la binormale, du plan osculateur, de la normale principale et du plan rectifiant aux courbes données aux points indiqués.

3389. $x = t^2$, $y = 1 - t$, $z = t^3$ au point $(1, 0, 1)$.

3390. $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $x^2 + y^2 = 2$ au point $(1, 1, 1)$.

3391. $r\{\sin t, \cos t, \operatorname{tg} t\}$ au point $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$.

3392. $r\{t^3 - t^2 - 5, 3t^2 + 1, 2t^3 - 16\}$ au point correspondant à la valeur $t = 2$ du paramètre.

3393. Montrer que la courbe $r\{2t + 3, 3t - 1, t^2\}$ admet en tous ses points le même plan osculateur. Interpréter géométriquement.

3394. Montrer que la courbe

$$r\{a_1t^2 + b_1t + c_1,\ a_2t^2 + b_2t + c_2,\ a_3t^2 + b_3t + c_3\}$$

est plane et écrire l'équation du plan qui la contient.

3395. Trouver le rayon de torsion de la courbe $r\{\cos t, \sin t, \operatorname{ch} t\}$.

3396. Trouver le rayon de courbure de la courbe $r\{\ln\cos t, \ln\sin t, \sqrt{2t}\}$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$. Montrer que la torsion est égale à la courbure en tout point de cette courbe.

3397. Montrer que le rapport de la courbure à la torsion est constant en tout point de la courbe $r\{e^t\cos t, e^t\sin t, e^t\}$ (voir exercice 3388).

3398. Comment s'exprime la courbure de la courbe gauche définie par les équations $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$?

3399. Exprimer les vecteurs $\tau_1$, $\nu_1$, $\beta_1$ en fonction des dérivées du rayon vecteur $r = r(t)$.

3400. Exprimer chaque vecteur $\tau_1$, $\nu_1$, $\beta_1$ en fonction de deux autres.

3401. Trouver un vecteur $\omega(s)$ (vecteur de Darboux) vérifiant les conditions

$$\frac{d\tau_1}{ds} = \omega \times \tau_1; \quad \frac{d\nu_1}{ds} = \omega \times \nu_1; \quad \frac{d\beta_1}{ds} = \omega \times \beta_1.$$

## Longueur d'un arc de courbe gauche

Trouver la longueur de l'arc des courbes.

3402. $r\ \{2t, \ln t, t^2\}$ de $t = 1$ à $t = 10$.

3403. $r\ \{a\cos t, a\sin t, a\ln\cos t\}$ du point $(a, 0, 0)$ au point $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2}, -\frac{a}{2}\ln 2\right)$.

3404. $r\ \{e^t\cos t, e^t\sin t, e^t\}$ du point $(1, 0, 1)$ au point correspondant à la valeur $t = 2$ du paramètre.

3405. $x^2 = 3y$, $2xy = 9z$ du point $(0, 0, 0)$ au point $(3, 3, 2)$.

3406. $z^2 = 2ax$, $9y^2 = 16xz$ du point $(0, 0, 0)$ au point $(2a, 8a/3, 2a)$.

3407. $4ax = (y + z)^2$, $4x^2 + 3y^2 = 3z^2$ de l'origine des coordonnées au point $(x, y, z)$.

3408. $y = \sqrt{2ax - x^2}$, $z = a\ln\frac{2a}{2a - x}$ de l'origine des coordonnées au point $(x, y, z)$.

3409. $y = a\arcsin\frac{x}{a}$, $z = \frac{1}{4}a\ln\frac{a+x}{a-x}$ de l'origine des coordonnées au point $\left(\frac{a}{2}, \frac{a\pi}{6}, \frac{a}{4}\ln 3\right)$.

## Surfaces

Trouver les équations des plans tangents et des normales aux surfaces données aux points indiqués.

3410. $z = 2x^2 - 4y^2$ au point $(2, 1, 4)$.

3411. $z = xy$ au point $(1, 1, 1)$.

3412. $z = \frac{x^3 - 3axy + y^3}{a^2}$ au point $(a, a, -a)$.

3413. $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$ au point $(3, 4, -7)$.

3414. $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ au point $\left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$.

3415. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ au point $\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}, \frac{b\sqrt{3}}{3}, \frac{c\sqrt{3}}{3}\right)$.

3416. $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ au point $(1, 2, -1)$.

3417. $3x^4 - 4y^3z + 4z^2xy - 4z^3x + 1 = 0$ au point (1, 1, 1).

3418. $(z^2 - x^2)\,xyz - y^5 = 5$ au point (1, 1, 2).

3419. $4 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x + y + z$ au point (2, 3, 6).

3420. Montrer que l'équation du plan tangent à l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ en l'un quelconque de ses points $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ a pour équation

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} + \frac{z_0z}{c^2} = 1.$$

3421. Mener à l'ellipsoïde $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ un plan tangent parallèle au plan $x - y + 2z = 0$.

3422. Mener à l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ un plan tangent interceptant des segments égaux sur les axes de coordonnées.

3423. Montrer que les surfaces $x + 2y - \ln z + 4 = 0$ et $x^2 - xy - 8x + z + 5 = 0$ sont tangentes (i.e. possèdent un plan tangent commun) au point (2, —3, 1).

3424. Montrer que tous les plans tangents à la surface $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$ se coupent en un point.

3425. Ecrire l'équation du plan tangent et de la normale à la sphère $\boldsymbol{r}\,\{u \cos v,\ u \sin v,\ \sqrt{a^2 - u^2}\}$ au point $\boldsymbol{r}_0\,\{x_0, y_0, z_0\}$.

3426. Ecrire l'équation du plan tangent et de la normale au paraboloïde hyperbolique $\boldsymbol{r}\,\{a\,(u + v),\ b\,(u - v),\ uv\}$ en un point quelconque $\{x_0, y_0, z_0\}$.

3427. Montrer que les surfaces $x^2 + y^2 + z^2 = ax$ et $x^2 + y^2 + z^2 = by$ sont orthogonales.

3428. Montrer que tout plan tangent à la surface $xyz = a^3$ forme avec les plans de coordonnées un tétraèdre de volume constant qu'on évaluera.

3429. Montrer que les plans tangents à la surface $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ interceptent sur les axes de coordonnées des segments dont la somme est égale à $a$.

3430. Ecrire l'équation du plan tangent à la surface $z = xy$ et orthogonal à la droite $\frac{x+2}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-1}$.

3431. Etant donnée une normale à la surface $x^2 + y^2 + z^2 = y$ montrer que le segment compris entre le point de contact et le plan $xOy$ est égal à la distance de l'origine des coordonnées à la projection de cette normale sur le plan $xOy$.

3432. Montrer que la normale à l'ellipsoïde de révolution $\frac{x^2+z^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ en l'un quelconque de ses points $P\,(x, y, z)$ fait des angles égaux avec les droites $PA$ et $PB$, où $A\,(0, -4, 0)$ et $B\,(0, 4, 0)$.

3433. Montrer que les normales à la surface de révolution

$$z = f\,(\sqrt{x^2 + y^2})$$

coupent l'axe de rotation.

**3434.** Mener à la surface $x^2 - y^2 - 3z = 0$ le plan tangent qui passe par le point $A$ (0, 0, —1) et qui est parallèle à la droite $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$.

**3435.** Sur la surface $x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z = 12$ trouver les points en lesquels les plans tangents sont parallèles aux plans de coordonnées.

**3436.** Ecrire l'équation du plan tangent à la surface $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 + v^3$ en un point arbitraire. Exprimer les coefficients de cette équation en fonction:

a) des paramètres $u_0$ et $v_0$,

b) des coordonnées $x_0$, $y_0$, $z_0$ du point de contact.

**3437.** Trouver le lieu géométrique des pieds des perpendiculaires abaissées de l'origine des coordonnées sur les plans tangents au paraboloïde de révolution $2pz = x^2 + y^2$.

**3438.** Quel est le lieu géométrique des pieds des perpendiculaires abaissées de l'origine des coordonnées sur les plans tangents à la surface $xyz = a^3$.

## § 4. Champ scalaire. Gradient. Dérivée suivant une direction

### Gradient

**3439.** 1) Trouver les projections du gradient de $\psi(x, y) = x^2 - 2xy + 3y - 1$ au point (1, 2).

2) Trouver les projections du gradient de $u = 5x^2y - 3xy^3 + y^4$ en un point arbitraire.

**3440.** On donne 1) $z = x^2 + y^2$. Trouver grad $z$ au point (3, 2).

2) $z = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$. Trouver grad $z$ au point (2,1).

3) $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$. Trouver grad $z$ au point $(x_0, y_0)$.

**3441.** 1) Trouver la plus grande pente de la surface $z = \ln(x^2 + 4y^2)$ au point (6, 4, ln 100).

2) Trouver la pente maximale de la surface $z = x^y$ au point (2, 2, 4).

**3442.** Dans quelle direction la variation de la fonction $\varphi(x, y, z) = x \sin z - y \cos z$ est-elle maximale à l'origine des coordonnées?

**3443.** 1) On donne la fonction $z = \arcsin \frac{x}{x+y}$. Trouver l'angle entre les gradients de cette fonction aux points (1, 1) et (3, 4).

2) On donne les fonctions $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $z = x - 3y + \sqrt{3xy}$. Trouver l'angle des gradients de ces fonctions au point (3, 4).

**3444.** 1) Trouver le point en lequel le gradient de la fonction $z = \ln(x + 1/y)$ est égal à $i = 16/9j$.

2) Trouver les points en lesquels le module du gradient de la fonction $z = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$ est égal à 2.

**3445.** Etablir les relations suivantes ($\varphi$ et $\psi$ sont des fonctions différentiables, $c$ une constante):

$$\operatorname{grad}(\varphi+\psi)=\operatorname{grad}\varphi+\operatorname{grad}\psi;\quad \operatorname{grad}(c+\varphi)=\operatorname{grad}\varphi;$$

$$\operatorname{grad}(c\varphi)=c\operatorname{grad}\varphi;\quad \operatorname{grad}(\varphi\psi)=\varphi\operatorname{grad}\psi+\psi\operatorname{grad}\varphi;$$

$$\operatorname{grad}(\varphi^n)=n\varphi^{n-1}\operatorname{grad}\varphi;\quad \operatorname{grad}[\varphi(\psi)]=\varphi'(\psi)\operatorname{grad}\psi.$$

**3446.** $z=\varphi(u, v)$, $u=\psi(x, y)$, $v=\zeta(x, y)$. Montrer que

$$\operatorname{grad} z=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\operatorname{grad} u+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\operatorname{grad} v.$$

**3447.** 1) $u(x, y, z)=x^2y^2z^2$. Trouver la projection de grad $u$ au point $(x_0, y_0, z_0)$. 2) $u(x, y, z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Trouver grad $u$.

**3448.** Montrer que la fonction $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ vérifie la relation $u=2\ln 2-\ln(\operatorname{grad} u)^2$.

**3449.** Montrer que si $x$, $y$, $z$ sont des fonctions de $t$, on a

$$\frac{d}{dt}f(x, y, z)=\operatorname{grad} f\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt},$$

où $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$.

**3450.** Appliquer la relation démontrée précédemment au calcul du gradient des fonctions:

1) $f=\boldsymbol{r}^2$; 2) $f=|\boldsymbol{r}|$; 3) $f=F(\boldsymbol{r}^2)$; 4) $f=(\boldsymbol{a}\boldsymbol{r})(\boldsymbol{b}\boldsymbol{r})$; 5) $f=(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{r})$; où $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont des vecteurs constants.

## Dérivée suivant une direction

**3451.** 1) Trouver la dérivée de la fonction $z=x^3-3x^2y+3xy^2+1$ au point $M(3, 1)$ dans la direction du point $(6, 5)$.

2) Trouver la dérivée de la fonction $z=\operatorname{arctg} xy$ au point $(1, 1)$ dans la direction de la bissectrice du premier quadrant.

3) Trouver la dérivée de la fonction $z=x^2y^2-xy^3-3y-1$ au point $(2, 1)$ dans la direction de l'origine des coordonnées.

4) Trouver la dérivée de la fonction $z=\ln(e^x+e^y)$ à l'origine des coordonnées dans la direction qui fait un angle $\alpha$ avec l'axe des abscisses.

**3452.** Trouver la dérivée de la fonction $z=\ln(x+y)$ au point $(1, 2)$ de la parabole $y^2=4x$ suivant la direction de cette parabole.

**3453.** Trouver la dérivée de la fonction $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ au point $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ situé sur le cercle $x^2+y^2-2x=0$ suivant la direction de ce cercle.

**3454.** Montrer que la dérivée de la fonction $z=\frac{y^2}{x}$ en un point quelconque de l'ellipse $2x^2+y^2=1$ suivant la direction de la normale à l'ellipse est nulle.

**3455.** 1) Trouver la dérivée de la fonction $u=xy^2+z^3-xyz$ au point $M(1, 1, 2)$ dans la direction formant avec les axes de coordonnées respectivement les angles 60°, 45°, 60°.

2) Trouver la dérivée de la fonction $w = xyz$ au point $A$ (5, 1, 2) dans la direction du point $B$ (9, 4, 14).

**3456.** Trouver la dérivée de la fonction $u = x^2y^2z^2$ au point $A$ (1, —1, 3) dans la direction du point $B$ (0, 1, 1).

**3457.** Montrer que la dérivée de la fonction $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ en un point quelconque $M$ $(x, y, z)$ dans la direction de l'origine des coordonnées est égale à $-\frac{2u}{r}$, où $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

**3458.** Montrer que la dérivée de la fonction $u = f(x, y, z)$ dans la direction de son gradient est égale au module de ce gradient.

**3459.** Trouver la dérivée de la fonction

$$u = \frac{1}{r}, \quad \text{où} \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

dans la direction de son gradient.

# CHAPITRE XII

# INTÉGRALES MULTIPLES ET INTÉGRATION MULTIPLE

## § 1. Intégrales doubles et triples

**3460.** Une lame mince (dont on négligera l'épaisseur) est contenue dans le plan $xOy$ où elle occupe un domaine $D$. La densité de la lame est une fonction du point $\gamma = \gamma(P) = \gamma(x, y)$. Trouver la masse de la lame.

**3461.** Sur la lame du problème 3460 est distribuée une charge électrique de densité surfacique $\sigma = \sigma(P) = \sigma(x, y)$. Trouver l'expression de la charge totale de la lame.

**3462.** La lame du problème 3460 tourne autour de l'axe $Ox$ à la vitesse angulaire $\omega$. Trouver l'expression de son énergie cinétique.

**3463.** La chaleur spécifique de la lame de l'exercice 3460 varie en vertu de la loi $c = c(P) = c(x, y)$. Trouver la quantité de chaleur reçue par la lame lorsque sa température passe de $t_1$ à $t_2$.

**3464.** Un corps occupe un domaine $\Omega$ dans l'espace. Sa densité est une fonction du point $\gamma = \gamma(P) = \gamma(x, y, z)$. Trouver la masse de ce corps.

**3465.** Dans le corps du problème 3464 une charge électrique est non uniformément distribuée. La densité de la charge est une fonction du point $\delta = \delta(x, y, z)$. Trouver la charge totale du corps.

---

Evaluer les intégrales.

**3466.** $\iint\limits_D (x+y+10)\,d\sigma$, $D$ étant le cercle $x^2+y^2 \leqslant 4$.

**3467.** $\iint\limits_D (x^2+4y^2+9)\,d\sigma$, $D$ étant le cercle $x^2+y^2 \leqslant 4$.

**3468.** $\iint\limits_D (x+y+1)\,d\sigma$, $D$ étant le rectangle $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.

**3469.** $\iint\limits_D (x+xy-x^2-y^2)\,d\sigma$, $D$ étant le rectangle $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.

3470. $\iint\limits_D xy(x+y)\,d\sigma$, $D$ étant le carré $0\leqslant x\leqslant 2$, $0\leqslant y\leqslant 2$.

3471. $\iint\limits_D (x+1)^y\,d\sigma$, $D$ étant le carré $0\leqslant x\leqslant 2$, $0\leqslant y\leqslant 2$.

3472. $\iint\limits_D (x^2+y^2-2\sqrt{x^2+y^2}+2)\,d\sigma$, $D$ étant le carré $0\leqslant x\leqslant 2$, $0\leqslant y\leqslant 2$.

3473. $\iint\limits_D (x^2+y^2-4x-4y+10)\,d\sigma$, $D$ étant le domaine limité par l'ellipse $x^2+4y^2-2x-16y+13=0$ (frontière comprise).

3474. $\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2+z^2)\,dv$, $\Omega$ étant la boule $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$.

3475. $\iiint\limits_\Omega (x+y+z)\,dv$, $\Omega$ étant le cube $x\geqslant 1$, $y\geqslant 1$, $z\geqslant 1$, $x\leqslant 3$, $y\leqslant 3$, $z\leqslant 3$.

3476. $\iiint\limits_\Omega (x+y-z+10)\,dv$, $\Omega$ étant la boule $x^2+y^2+z^2\leqslant 3$.

## § 2. Intégration multiple

### Intégrale double. Domaine rectangulaire

Calculer les intégrales doubles étendues aux domaines rectangulaires $D$ définis par les conditions indiquées entre parenthèses.

3477. $\iint\limits_D xy\,dx\,dy$ $\quad(0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant y\leqslant 2)$.

3478. $\iint\limits_D e^{x+y}\,dx\,dy$ $\quad(0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant y\leqslant 1)$.

3479. $\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2}\,dx\,dy$ $\quad(0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant y\leqslant 1)$.

3480. $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{(x+y+1)^2}$ $\quad(0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant y\leqslant 1)$.

3481. $\iint\limits_D \frac{y\,dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ $\quad(0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant y\leqslant 1)$.

3482. $\iint\limits_D x\sin(x+y)\,dx\,dy$ $\quad\left(0\leqslant x\leqslant \pi,\quad 0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

3483. $\iint\limits_D x^2ye^{xy}\,dx\,dy$ $\quad(0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant y\leqslant 2)$.

3484. $\iint\limits_D x^2y\cos(xy^2)\,dx\,dy$ $\quad\left(0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant y\leqslant 2\right)$.

## Intégrale double. Domaine quelconque

Trouver les limites de l'intégrale double $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$ étendue aux domaines d'intégration $D$ indiqués (finis).

**3485.** Le parallélogramme de côtés

$x = 3,\ x = 5,\quad 3x - 2y + 4 = 0,\quad 3x - 2y + 1 = 0.$

**3486.** Le triangle de côtés $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 2.$

**3487.** $x^2 + y^2 \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0.$

**3488.** $x + y \leqslant 1,\ x - y \leqslant 1,\ x \geqslant 0.$

**3489.** $y \geqslant x^2,\ y \leqslant 4 - x^2.$

**3490.** $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leqslant 1.$ **3491.** $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 \leqslant 4.$

**3492.** Le domaine $D$ limité par les paraboles $y = x^2$ et $y = \sqrt{x}.$

**3493.** Le triangle de côtés $y = x,\ y = 2x$ et $x + y = 6.$

**3494.** Le parallélogramme de côtés $y = x,\ y = x + 3,\ y = -2x + 1,\ y = -2x + 5.$

**3495.** $y - 2x \leqslant 0,\ 2y - x \geqslant 0,\ xy \leqslant 2.$

**3496.** $y^2 \leqslant 8x,\ y \leqslant 2x,\ y + 4x - 24 \leqslant 0.$

**3497.** Le domaine $D$ compris entre l'hyperbole $y^2 - x^2 = 1$ et la circonférence $x^2 + y^2 = 9$ (il s'agit du domaine qui comprend l'origine des coordonnées).

Intervertir l'ordre d'intégration

**3498.** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx.$ **3499.** $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy.$

**3500.** $\int\limits_0^r dx \int\limits_x^{\sqrt{2rx-x^2}} f(x, y)\,dy.$ **3501.** $\int\limits_{-2}^2 dx \int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}} f(x, y)\,dy.$

**3502.** $\int\limits_2^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x, y)\,dy.$ **3503.** $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{2x}^{6-x} f(x, y)\,dy.$

**3504.** Intervertir l'ordre d'intégration et écrire les expressions données sous forme d'une intégrale double:

1) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x, y)\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x, y)\,dy;$

2) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x, y)\,dy + \int\limits_1^3 dx \int\limits_0^{\frac{3-x}{2}} f(x, y)\,dy;$

3) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^{2/3}} f(x, y)\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x, y)\,dy.$

**3505.** Décomposer l'intégrale double $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$, où $D$ est le domaine des fig. 62, 63, 64, 65, en une somme d'intégrales doubles (le nombre de termes doit être minimal). Les figures 64 et 65 sont constituées de droites et d'arcs de cercle.

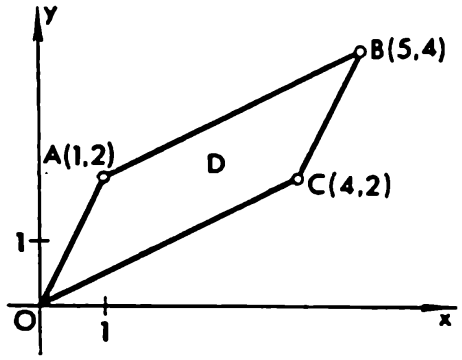


Fig. 62

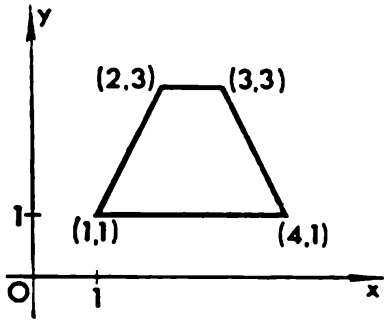


Fig. 63

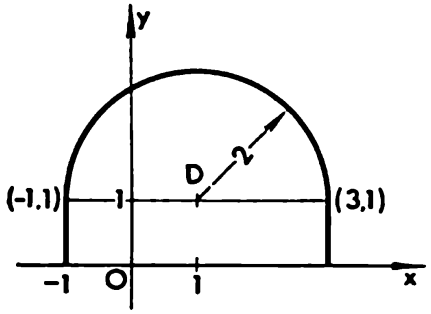


Fig. 64

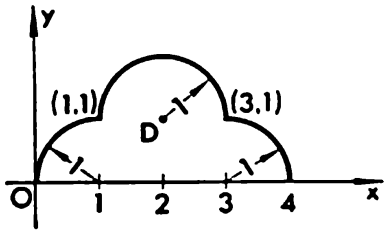


Fig. 65

Calculer les intégrales indiquées.

**3506.** 1) $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} dy$; 2) $\int\limits_2^4 dx \int\limits_x^{2x} \frac{y}{x}\,dy$; 3) $\int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\ln y} e^x\,dx$.

**3507.** $\iint\limits_D x^3y^2\,dx\,dy$, $D$ est le cercle $x^2+y^2 \leqslant R^2$.

**3508.** $\iint\limits_D (x^2+y)\,dx\,dy$, $D$ étant le domaine limité par les paraboles $y=x^2$ et $y^2=x$.

**3509.** $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy$, où $D$ est le domaine limité par les droites $x=2$, $y=x$ et l'hyperbole $xy=1$.

**3510.** $\iint\limits_D \cos(x+y)\,dx\,dy$, où $D$ est le domaine limité par les droites $x=0$, $y=\pi$ et $y=x$.

**3511.** $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy$, $D$ étant le quart de cercle $x^2+y^2 \leqslant 1$ contenu dans le premier quadrant.

**3512.** $\iint\limits_D x^2y^2\sqrt{1-x^3-y^3}\,dx\,dy$, $D$ est compris entre la courbe $x^3+y^3=1$ et les axes de coordonnées.

**3513.** Trouver la valeur moyenne de la fonction $z = 12 - 2x - 3y$ dans le domaine limité par les droites $12 - 2x - 3y = 0$, $x = 0$, $y = 0$.

**3514.** Trouver la valeur moyenne de la fonction $z = 2x + y$ dans le triangle limité par les axes de coordonnées et la droite $x + y = 3$.

**3515.** Trouver la valeur moyenne de la fonction $z = x + 6y$ dans le triangle limité par les droites $y = x$, $y = 5x$ et $x = 1$.

**3516.** Trouver la valeur moyenne de la fonction $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ dans le cercle $x^2+y^2 \leqslant R^2$.

## Intégrale triple

Calculer les intégrales.

**3517.** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^3 dx.$

**3518.** $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^b dy \int\limits_0^c (x+y+z)\,dz.$

**3519.** $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^y xyz\,dz.$

**3520.** $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{xy} x^3y^3z\,dz.$

**3521.** $\int\limits_0^{e-1} dx \int\limits_0^{e-x-1} dy \int\limits_e^{x+y+e} \frac{\ln(z-x-y)}{(x-e)(x+y-e)}\,dz.$

**3522.** $\iiint\limits_\Omega \frac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z+1)^3}$, $\Omega$ étant le domaine limité par les plans $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

**3523.** $\iiint\limits_\Omega xy\,dx\,dy\,dz$, où $\Omega$ est le domaine limité par le paraboloïde hyperbolique $z = xy$ et les plans $x + y = 1$ et $z = 0$ $(z \geqslant 0)$.

**3524.** $\iiint\limits_\Omega y\cos(z+x)\,dx\,dy\,dz$, où $\Omega$ est le domaine limité par le cylindre $y = \sqrt{x}$ et les plans $y = 0$, $z = 0$ et $x + z = \pi/2$.

## § 3. Intégrales en coordonnées polaires, cylindriques et sphériques

### Intégrale double

Passer aux coordonnées polaires $\rho$ et $\varphi$ ($x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$) dans l'intégrale double $\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy$ et changer les limites d'intégration.

**3525.** Le domaine $D$ est le cercle 1) $x^2 + y^2 \leqslant R^2$; 2) $x^2 + y^2 \leqslant ax$; 3) $x^2 + y^2 \leqslant by$.

**3526.** Le domaine $D$ est limité par les circonférences $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 8x$ et les droites $y = x$ et $y = 2x$.

**3527.** Le domaine $D$ est l'intersection des cercles $x^2 + y^2 \leqslant ax$ et $x^2 + y^2 \leqslant by$.

**3528.** Le domaine $D$ est limité par les droites

$$y = x,\ y = 0 \text{ et } x = 1.$$

**3529.** Le domaine $D$ est le plus petit segment intercepté par la droite $x + y = 2$ sur le cercle $x^2 + y^2 \leqslant 4$.

**3530.** Le domaine $D$ est la partie intérieure de la boucle de droite de la lemniscate de Bernoulli.

**3531.** $D$ est défini par les inégalités $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $(x^2 + y^2)^3 \leqslant 4a^2x^2y^2$.

Passer aux coordonnées polaires dans les intégrales doubles

**3532.** $\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x, y)\, dy.$ **3533.** $\int\limits_{\frac{R}{2}}^{2R} dy \int\limits_0^{\sqrt{2Ry-y^2}} f(x, y)\, dx.$

**3534.** $\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x^2+y^2)\, dy.$

**3535.** $\int\limits_0^{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}} dx \int\limits_0^{Rx} f\left(\frac{x}{y}\right) dy + \int\limits_{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}}^{R} dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f\left(\frac{y}{x}\right) dy.$

Calculer les intégrales doubles en passant aux coordonnées polaires.

**3536.** $\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1 + x^2 + y^2)\, dy.$

**3537.** $\iint\limits_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\, dx\, dy$, où $D$ est défini par les inégalités $x^2+y^2 \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

3538. $\iint\limits_D (h-2x-3y)\,dx\,dy$, où $D$ est le cercle $x^2+y^2\leqslant R^2$.

3539. $\iint\limits_D \sqrt{(R^2-x^2-y^2)}\,dx\,dy$, où $D$ est le cercle $x^2+y^2\leqslant Rx$.

3540. $\iint\limits_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dx\,dy$, où $D$ est la région de l'anneau

$$x^2+y^2\geqslant 1,\quad x^2+y^2\leqslant 9,\quad y\geqslant\frac{x}{\sqrt{3}},\quad y\leqslant x\sqrt{3}.$$

---

3541. Montrer par des raisonnements géométriques que si l'on transforme les coordonnées cartésiennes au moyen des formules $x = a\rho\cos\varphi$, $y = b\rho\sin\varphi$ ($a$ et $b$ sont des constantes), l'élément d'aire s'écrira :

$$d\sigma = ab\,\rho\,d\rho\,d\varphi.$$

Transformer les intégrales doubles en se servant du résultat de l'exercice précédent et en choisissant convenablement $a$ et $b$.

3542. $\iint\limits_D f(x,\ y),\ dx\,dy$, où $D$ est limité par l'ellipse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.

3543. $\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy$, où $D$ est limité par la courbe $\left(x^2+\frac{y^2}{3}\right)^2=x^2y$.

3544. $\iint\limits_D f\left(\sqrt{4-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right)dx\,dy$, où $D$ est la partie de la couronne elliptique limitée par les ellipses $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{4b^2}=1$ et contenue dans le premier quadrant.

3545. Calculer l'intégrale $\iint\limits_D xy\,dx\,dy$, où $D$ est la partie d'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ contenue dans le premier quadrant.

3546. Calculer l'intégrale $\iint\limits_D \sqrt{xy}\,dx\,dy$, où $D$ est le domaine limité par la partie de courbe $\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}\right)^4=\frac{xy}{\sqrt{6}}$ contenue dans le premier quadrant.

## Intégrale triple

Ecrire l'intégrale triple $\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ en coordonnées cylindriques $\rho$, $\varphi$, $z$ ($x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$) ou en coordonnées sphériques $\rho$, $\theta$, $\varphi$ ($x = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$) et changer les limites d'intégration.

**3547.** Le domaine $\Omega$ se trouve dans le premier octant et est limité par le cylindre $x^2 + y^2 = R^2$ et les plans $z = 0$, $z = 1$, $y = x$ et $y = x\sqrt{3}$.

**3548.** Le domaine $\Omega$ est limité par le cylindre $x^2 + y^2 = 2x$, le plan $z = 0$ et le paraboloïde $z = x^2 + y^2$.

**3549.** $\Omega$ est la partie de la boule $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ située dans le premier octant.

**3550.** $\Omega$ est la région de la boule $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ située à l'intérieur du cylindre $(x^2 + y^2)^2 = R^2(x^2 - y^2)$ $(x \geqslant 0)$.

**3551.** $\Omega$ est l'intersection des boules

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 + (z - R)^2 \leqslant R^2.$$

Calculer les intégrales en passant aux coordonnées cylindriques ou sphériques.

**3552.** $\displaystyle\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^a dz.$

**3553.** $\displaystyle\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\, dz.$

**3554.** $\displaystyle\int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\, dz.$

**3555.** $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dz.$

**3556.** $\iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz$, où le domaine $\Omega$ est défini par les inégalités $z \geqslant 0$, $r^2 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$.

**3557.** $\iiint\limits_{\Omega} \dfrac{dx\, dy\, dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$, où $\Omega$ est la boule $x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$.

**3558.** $\iiint\limits_{\Omega} \dfrac{dx\, dy\, dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$, où $\Omega$ est le cylindre $x^2+y^2 \leqslant 1$, $-1 \leqslant z \leqslant 1$.

## § 4. Application des intégrales doubles et triples

### Volume d'un corps. I

Trouver par une double intégration les volumes des corps limités par les surfaces données (tous les paramètres sont supposés positifs).

**3559.** Les plans de coordonnées, les plans $x = 4$ et $y = 4$ et le paraboloïde de révolution $z = x^2 + y^2 + 1$.

**3560.** Les plans de coordonnées, les plans $x = a$, $y = b$ et le paraboloïde elliptique $z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$.

**3561.** Le plan $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ et les plans de coordonnées (pyramide).

**3562.** Les plans $y = 0$, $z = 0$, $3x + y = 6$, $3x + 2y = 12$ et $x + y + z = 6$.

**3563.** Le paraboloïde de révolution $z = x^2 + y^2$, les plans de coordonnées et le plan $x + y = 1$.

**3564.** Le paraboloïde de révolution $z = x^2 + y^2$, les plans $z = 0$, $y = 1$, $y = 2x$ et $y = 6 - x$.

**3565.** Les cylindres $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ et les plans $z = 0$ et $x + z = 6$.

**3566.** Les plans de coordonnées, le plan $2x + 3y - 12 = 0$ et le cylindre $z = y^2/2$.

**3567.** Le cylindre $z = 9 - y^2$, les plans de coordonnées et le plan $3x + 4y = 12$ $(y \geqslant 0)$.

**3568.** Le cylindre $z = 4 - x^2$, les plans de coordonnées et le plan $2x + y = 4$ $(x \geqslant 0)$.

**3569.** Le cylindre $2y^2 = x$, les plans $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1$ et $z = 0$.

**3570.** Un cylindre circulaire droit de rayon $r$ ayant pour axe de symétrie l'axe des ordonnées, les plans de coordonnées et le plan $\frac{x}{r} + \frac{y}{a} = 1$.

**3571.** Le cylindre elliptique $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, les plans $z = 12 - 3x - 4y$ et $z = 1$.

**3572.** Les cylindres $x^2 + y^2 = R^2$ et $x^2 + z^2 = R^2$.

**3573.** Les cylindres $z = 4 - y^2$, $y = \frac{x^2}{2}$ et le plan $z = 0$.

**3574.** Les cylindres $x^2 + y^2 = R^2$, $z = \frac{x^2}{a^2}$ et le plan $z = 0$ $(x \geqslant 0)$.

**3575.** Le paraboloïde hyperbolique $z = x^2 - y^2$ et les plans $z = 0$, $x = 3$.

**3576.** Le paraboloïde hyperbolique $z = xy$, le cylindre $y = \sqrt{x}$ et les plans $x + y = 2$, $y = 0$ et $z = 0$.

**3577.** Le paraboloïde $z = x^2 + y^2$, le cylindre $y = x^2$ et les plans $y = 1$ et $z = 0$.

**3578.** Le cylindre elliptique $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ et les plans $y=\frac{b}{a}x$, $y=0$ et $z=0$ $(x\geqslant 0)$.

**3579.** Le paraboloïde $z=\frac{a^2-x^2-4y^2}{a}$ et le plan $z=0$.

**3580.** Les cylindres $y=e^x$, $x=e^{-x}$, $z=e^2-y^2$ et le plan $z=0$.

**3581.** Les cylindres $y=\ln x$ et $y=\ln^2 x$ et les plans $z=0$ et $y+z=1$.

**3582*.** Les cylindres $z=\ln x$ et $z=\ln y$ et les plans $z=0$ et $x+y=2e$ $(x\geqslant 1)$.

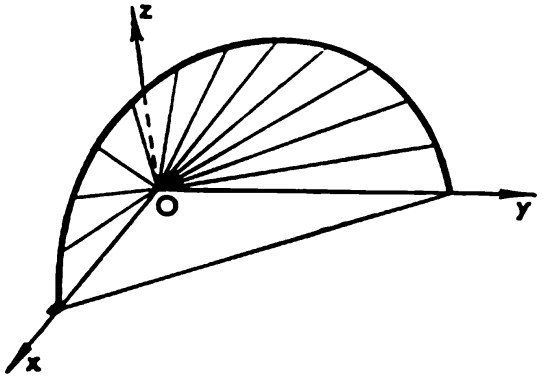


Fig. 66

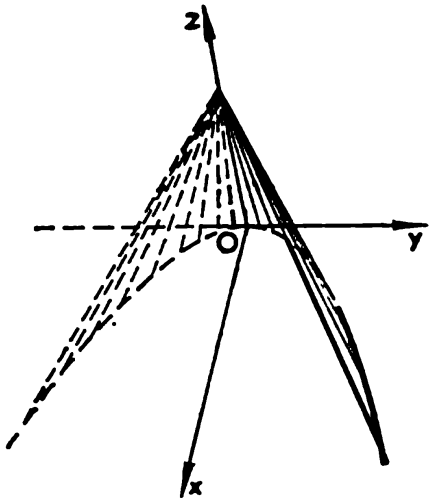


Fig. 67

**3583.** Les cylindres $y=x+\sin x$, $y=x-\sin x$ et $z=\frac{(x+y)^2}{4}$ (cylindre parabolique dont les génératrices sont parallèles à la droite $x-y=0$, $z=0$) et le plan $z=0$ $(0\leqslant x\leqslant\pi$, $y\geqslant 0)$.

**3584.** La surface conique $z^2=xy$ (fig. 66), le cylindre $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ et le plan $z=0$.

**3585.** La surface conique $4y^2=x(2-z)$ (cône parabolique, fig. 67) et les plans $z=0$ et $x+z=2$.

**3586.** La surface $z=\cos x\cdot\cos y$ et les plans $x=0$, $y=0$, $z=0$ et $x+y=\pi/2$.

**3587.** Le cylindre $x^2+y^2=4$, les plans $z=0$, $z=x+y+10$.

**3588.** Le cylindre $x^2+y^2=2x$, les plans $2x-z=0$ et $4x-z=0$.

**3589.** Le cylindre $x^2+y^2=R^2$, le paraboloïde $Rz=2R^2+x^2+y^2$ et le plan $z=0$.

**3590.** Le cylindre $x^2+y^2=2ax$, le paraboloïde $z=\frac{x^2+y^2}{a}$ et le plan $z=0$.

**3591.** La sphère $x^2+y^2+z^2=a^2$ et le cylindre $x^2+y^2=ax$ (fenêtre de Viviani).

**3592.** Le paraboloïde hyperbolique $z = \frac{xy}{a}$, le cylindre $x^2 + y^2 = ax$ et le plan $z = 0$ ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$).

**3593.** Les cylindres $x^2 + y^2 = x$ et $x^2 + y^2 = 2x$, le paraboloïde $z = x^2 + y^2$ et les plans $x + y = 0$, $x - y = 0$ et $z = 0$.

**3594.** Les cylindres $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 2y$ et les plans $z = x + 2y$ et $z = 0$.

**3595.** La surface conique $z^2 = xy$ et le cylindre $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$ ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$).

**3596.** L'hélicoïde (« escalier en colimaçon ») $z = h \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, le cylindre $x^2 + y^2 = R^2$ et les plans $x = 0$ et $z = 0$ ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$).

## Aire d'une figure plane

Trouver par une double intégration l'aire des domaines indiqués.

**3597.** Le domaine limité par les droites $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.

**3598.** Le domaine limité par les droites $y = x$, $y = 5x$ et $x = 1$.

**3599.** Le domaine limité par l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

**3600.** Le domaine compris entre la parabole $y^2 = \frac{b^2}{a} x$ et la droite $y = \frac{b}{a} x$.

**3601.** Le domaine limité par les paraboles $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ et la droite $x = 4$.

**3602*.** Le domaine limité par la courbe $(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3$.

**3603.** Le domaine limité par la courbe $(x^2 + y^2)^3 = x^4 + y^4$.

**3604.** Le domaine limité par la courbe $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 (x^2 - y^2)$ (lemniscate de Bernoulli).

**3605.** Le domaine limité par la courbe $x^3 + y^3 = 2xy$ contenue dans le premier quadrant (boucle).

**3606.** Le domaine limité par la courbe $(x + y)^3 = xy$ contenue dans le premier quadrant (boucle).

**3607.** Le domaine limité par la courbe $(x + y)^5 = x^2y^2$ contenue dans le premier quadrant (boucle).

**3608*.** Le domaine limité par la courbe

1) $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{xy}{c^2}$; 2) $\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{25}$

## Volume d'un corps. II

Calculer par une triple intégration les volumes des corps limités par les surfaces données (les paramètres sont supposés positifs).

**3609.** Les cylindres $z = 4 - y^2$ et $z = y^2 + 2$ et les plans $x = -1$ et $x = 2$.

**3610.** Les paraboloïdes $z = x^2 + y^2$ et $z = x^2 + 2y^2$ et les plans $y = x$, $y = 2x$ et $x = 1$.

**3611.** Les paraboloïdes $z = x^2 + y^2$ et $z = 2x^2 + 2y^2$, le cylindre $y = x^2$ et le plan $y = x$.

**3612.** Les cylindres $z = \ln(x + 2)$ et $z = \ln(6 - x)$ et les plans $x = 0$, $x + y = 2$ et $x - y = 2$.

**3613*.** Le paraboloïde $(x - 1)^2 + y^2 = z$ et le plan $2x + z = 2$.

**3614*.** Le paraboloïde $z = x^2 + y^2$ et le plan $z = x + y$.

**3615*.** La sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ et le paraboloïde $x^2 + y^2 = 3z$.

**3616.** La sphère $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ et le paraboloïde $x^2 + y^2 = R(R - 2z)$ $(z \geqslant 0)$.

**3617.** Le paraboloïde $z = x^2 + y^2$ et le cône $z^2 = xy$.

**3618.** La sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4Rz - 3R^2$ et le cône $z^2 = 4(x^2 + y^2)$ (on prendra la partie de la sphère contenue à l'intérieur du cône).

**3619*.** $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3x$.

**3620.** $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = axyz$.

**3621.** $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^2z^4$.

**3622.** $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = \frac{a^6z^2}{x^2+y^2}$.

**3623.** $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^2(x^2 + y^2)^2$.

**3624.** $(x^2 + y^2)^2 + z^4 = a^3z$.

**3625.** $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z^2 = x^2 + y^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$.

## Aire d'une surface

**3626.** Calculer l'aire de la portion du plan $6x + 3y + 2z = 12$ contenue dans le premier octant.

**3627.** Calculer l'aire de la portion de surface $z^2 = 2xy$ située au-dessus du rectangle contenu dans le plan $z = 0$ et limité par les droites $x = 0$; $y = 0$, $x = 3$, $y = 6$.

**3628.** Calculer l'aire de la portion de cône $z^2 = x^2 + y^2$ découpée par le plan $z = \sqrt{2}\left(\frac{x^2}{2} + 1\right)$ au-dessus du plan $Oxy$.

Trouver l'aire des portions de surfaces indiquées.

**3629.** La portion de cône $z^2 = x^2 + y^2$ interceptée par le cylindre $z^2 = 2py$.

**3630.** La portion de cône $y^2 + z^2 = x^2$ contenue à l'intérieur du cylindre $x^2 + y^2 = R^2$.

**3631.** La portion de cône $y^2 + z^2 = x^2$ interceptée par le cylindre $x^2 - y^2 = a^2$ et les plans $y = b$ et $y = -b$.

**3632.** La portion de cylindre $z^2 = 4x$ interceptée par le cylindre $y^2 = 4x$ et le plan $x = 1$.

**3633.** La portion de cylindre $z = xy$ interceptée par le cylindre $x^2 + y^2 = R^2$.

**3634.** La portion de paraboloïde $2z = x^2 + y^2$ interceptée par le cylindre $x^2 + y^2 = 1$.

**3635.** La portion de sphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ interceptée par le cylindre $x^2 + y^2 = R^2$ $(R \leqslant a)$.

3636. La portion de sphère $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ interceptée par le cylindre $x^2 + y^2 = Rx$.

3637. La portion de sphère $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ interceptée par la surface $(x + y^2)^2 = R^2 (x^2 - y^2)$.

3638. La portion de surface $z = \frac{x+y}{x^2+y^2}$ interceptée par les surfaces $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$ et contenue dans le premier octant.

3639. La portion de surface $(x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 + z^2 = a^2$ contenue dans le premier octant ($\alpha < \pi/2$).

3640*. Calculer l'aire de la portion du globe (on suppose que la Terre est sphérique et de rayon $R \approx 6\,400$ km) comprise entre les méridiens $\varphi = 30°$, $\varphi = 60°$ et les parallèles $\theta = 45°$ et $\theta = 60°$.

3641. Calculer la surface totale du corps limité par la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ et le paraboloïde $x^2 + y^2 = 2az$ ($z \geqslant 0$).

3642. Les axes de deux cylindres égaux de rayon $R$ se coupent à angle droit. Trouver l'aire de l'un des cylindres interceptée par l'autre.

## Moments et centre d'inertie

Trouver par une intégration double le moment statique des figures homogènes planes (densité $\gamma = 1$).

3643. Un rectangle de côtés $a$ et $b$ par rapport à un côté $a$.

3644. Un demi-cercle par rapport au diamètre.

3645. Un cercle par rapport à une tangente.

3646. Un hexagone régulier par rapport à un côté.

3647. Montrer que le moment statique d'un triangle de base $a$ par rapport à cette base dépend uniquement de la hauteur de ce triangle.

---

Trouver par une intégration double les centres de gravité des surfaces planes homogènes.

3648. L'aire de la demi-ellipse située au-dessus du grand axe.

3649. L'aire comprise entre la sinusoïde $y = \sin x$, l'axe $Ox$ et la droite $x = \frac{\pi}{4}$.

3650. Un secteur circulaire d'angle au centre $\alpha$ (le rayon est $R$).

3651. Un segment de cercle d'angle au centre $\alpha$ et de rayon $R$.

3652. L'aire limitée par la courbe fermée $y^2 = x^2 - x^4$ ($x \geqslant 0$).

Trouver les moments d'inertie des surfaces planes homogènes (la densité $\gamma = 1$).

3653. Un cercle de rayon $R$ par rapport à une tangente.

3654. Un carré de côté $a$ par rapport à un sommet.

3655. Une ellipse par rapport au centre.

3656. Un rectangle de côtés $a$ et $b$ par rapport au point de concours des diagonales.

3657. Un triangle isocèle de base $a$ et de hauteur $h$ par rapport au sommet.

3658. Un cercle de rayon $R$ par rapport à un point de la circonférence.

**3659.** Un segment de parabole de corde perpendiculaire à l'axe par rapport au sommet de la parabole (longueur de la corde $a$, de la « flèche » $h$).

**3660.** Montrer que le moment d'inertie d'une couronne circulaire par rapport au centre est le double du moment d'inertie par rapport à un axe quelconque passant par le centre de la couronne et situé dans le même plan qu'elle.

**3661.** Montrer que la somme des moments d'inertie d'une figure plane $F$ par rapport à tout couple d'axes perpendiculaires situés dans le plan de $F$ et passant par un point fixe $O$ est constante.

**3662*.** Montrer que le moment d'inertie d'une figure plane par rapport à un axe quelconque $(a)$ est égal à $Md^2 + I_c$, où $M$ est la masse distribuée sur la figure, $d$, la distance de l'axe $(a)$ au centre de gravité de la figure, $I_c$, le moment d'inertie par rapport à un axe parallèle à $(a)$ et passant par le centre de gravité de la figure (théorème de Steiner).

---

Trouver les moments statiques des volumes homogènes (la densité $\gamma = 1$).

**3663.** Un parallélépipède rectangle d'arêtes $a$, $b$ et $c$ par rapport à ses faces.

**3664.** Un cône circulaire droit (de rayon de base $R$ et de hauteur $H$) par rapport au plan passant par le sommet et parallèle à la base.

**3665.** Le volume limité par l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ et le plan $Oxy$ par rapport à ce plan.

---

Trouver les centres de gravité des volumes homogènes limités par les surfaces indiquées.

**3666.** Les plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 2$, $y = 4$ et $x + y + z = 8$ (parallélépipède tronqué).

**3667.** L'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ et le trièdre trirectangle $Ox$, $Oy$, $Oz$.

**3668.** Le cylindre $z = \frac{y^2}{2}$ et les plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ et $2x + 3y - 12 = 0$.

**3669.** Les cylindres $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ et les plans $z = 0$ et $x + z = 6$.

**3670.** Le paraboloïde $z = \frac{x^2+y^2}{2a}$ et la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ $(z \geqslant 0)$.

**3671.** La sphère $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ et le cône $z \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{x^2 + y^2}$ (secteur sphérique).

**3672.** $(x^2 + y^2 + r^2)^2 = a^3 z$.

---

Trouver les centres de gravité des surfaces homogènes.

**3673.** La portion de sphère comprise dans le premier octant.

**3674.** La portion de paraboloïde $x^2 + y^2 = 2z$ interceptée par le plan $z = 1$.

---

Trouver les moments d'inertie des volumes homogènes de masse $M$.

**3675.** Le parallélépipède rectangle d'arêtes $a$, $b$ et $c$ par rapport à chacune d'elles et par rapport au centre de gravité.

**3676.** Une boule par rapport à une tangente.

**3677.** L'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ par rapport à chacun de ses axes.

**3678.** Un cylindre circulaire droit (de rayon de base $R$ et de hauteur $H$) par rapport à un diamètre de la base et un diamètre de sa section médiane.

**3679.** Une sphère creuse de rayon extérieur $R$ et de rayon intérieur $r$ par rapport à un diamètre.

**3680.** Un paraboloïde de révolution (de rayon de base $R$ et de hauteur $H$) par rapport à un axe passant par son centre de gravité et perpendiculaire à l'axe de rotation (moment équatorial).

---

Calculer les moments d'inertie des portions de surfaces homogènes indiquées (la masse de chaque portion est égale à $M$).

**3681.** La surface latérale d'un cylindre (de rayon de base $R$ et de hauteur $H$) par rapport à un axe passant par son centre de gravité et perpendiculaire à l'axe du cylindre.

**3682.** La portion de paraboloïde $x^2 + y^2 = 2cz$ interceptée par le plan $z = c$ par rapport à l'axe $Oz$.

**3683.** La surface latérale d'un cône tronqué (de rayons de base $R$ et $r$ et de hauteur $H$) par rapport à son axe.

## Problèmes divers

**3684.** Trouver la masse d'une lame carrée de côté $2a$ sachant que sa densité est proportionnelle au carré de la distance au point de concours des diagonales et est égale à l'unité aux sommets.

**3685.** On considère une couronne plane de rayon $R$ et $r$ ($R > r$). Trouver sa masse sachant que sa densité est inversement proportionnelle à la distance au centre du cercle et que la densité du cercle intérieur est égale à l'unité.

**3686.** Trouver la masse de l'aire limitée par une ellipse de demi-axes $a$ et $b$ sachant que la densité est proportionnelle à la distance au grand axe et qu'elle est égale à $\gamma$ à la distance unité de cet axe.

**3687.** On considère le volume limité par deux sphères concentriques de rayons $R$ et $r$ ($R > r$). Trouver la masse de ce volume sachant que la densité est inversement proportionnelle à la distance au centre et qu'elle est égale à $\gamma$ à la distance unité du centre.

**3688.** Trouver la masse du volume limité par un cylindre droit circulaire de rayon $R$ et de hauteur $H$ sachant qu'en tout point la densité est numériquement égale au carré de la distance de ce point au centre de la base du cylindre.

**3689*.** Trouver la masse du volume limité par un cône circulaire de hauteur $h$ dont l'axe fait un angle $\alpha$ avec la génératrice sachant que la densité est proportionnelle à la $n$-ème puissance de la distance au plan parallèle à la base et passant par le sommet, et qu'elle est égale à $\gamma$ à la distance unité ($n > 0$).

**3690.** Trouver la masse d'une boule de rayon $R$ sachant que la densité est proportionnelle au cube de la distance au centre et qu'elle est égale à $\gamma$ à la distance unité.

**3691.** Trouver la masse du volume limité par le paraboloïde $x^2 + y^2 = 2az$ et la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ ($z > 0$) sachant qu'en chaque point la densité est égale à la somme des carrés des coordonnées.

**3692*.** Trouver le centre de gravité de la boule $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant \leqslant 2Rz$ sachant qu'en tout point la densité est numériquement égale au carré de la distance de ce point à l'origine des coordonnées.

**3693*.** Trouver le moment statique de l'intersection des boules $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ et $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2Rz$ par rapport au plan $Oxy$ sachant que la densité en un point quelconque est numériquement égale à la distance de ce point au plan $xOy$.

**3694*.** Montrer que le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe quelconque est égal à $Md^2 + I_c$, où $M$ est la masse du corps, $d$, la distance de l'axe au centre de gravité du corps, $I_c$, le moment d'inertie par rapport à un axe parallèle à l'axe précédent et passant par le centre de gravité (théorème de Steiner; comparer avec l'exercice 3662).

---

Appliquer le principe de la gravitation universelle de Newton (voir indication relative au problème 2670) à la résolution des exercices ci-dessous.

**3695.** On considère une boule homogène de rayon $R$ et de densité $\gamma$. Trouver la force qu'elle exerce sur un point matériel de masse $m$ situé à une distance $a$ ($a > R$) de son centre. Vérifier que la force d'interaction est la même que si toute la masse de la sphère était concentrée en son centre.

**3696*.** Montrer que la force d'interaction entre deux boules homogènes est la même que si les masses de ces sphères étaient concentrées en leurs centres.

**3697.** On considère une boule $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ non homogène dont la densité varie suivant la loi $\gamma = \lambda z^2$. Trouver la force avec laquelle elle attire un point matériel de masse $m$ situé sur l'axe $z$ à une distance $2R$ du centre.

**3698.** On considère un volume homogène compris entre deux sphères concentriques (couche sphérique). Montrer que cette couche exerce une force d'attraction nulle sur tout point intérieur au volume.

On appelle centre de pression le point d'application de la résultante de toutes les forces de pression exercées sur une figure plane donnée (toutes les forces de pression sont perpendiculaires à la surface de la figure). Pour calculer les coordonnées du centre de pression on se sert du fait que le moment statique de la résultante (i.e. pression exercée sur toute la surface) par rapport à un axe quelconque est égal à la somme des moments statiques des composantes par rapport au même axe. Appliquer ce résultat à la résolution des exercices ci-dessous.

**3699.** Trouver le centre de pression d'un rectangle de côtés $a$ et $b$ ($a > b$) plongé verticalement dans un fluide de telle sorte que sa longueur soit parallèle à la surface libre du fluide.

Montrer que la position du centre de pression par rapport au rectangle ne varie pas si le plan du rectangle fait un angle $\alpha$ ($\alpha \neq 0$) avec la surface du fluide. Comment varient les résultats précédents si la longueur $a$ est située à une profondeur $h$ (tout en restant parallèle à la surface)?

**3700.** Un triangle de hauteur $h$ est situé dans un plan faisant un angle $\alpha$ avec la surface libre d'un fluide. A quelle profondeur se trouve le centre de pression de ce triangle si:

a) la base du triangle est confondue avec la surface libre du fluide?

b) le sommet du triangle est sur la surface libre du fluide et la base parallèle à cette surface?

**3701.** Trouver le centre de pression de l'aire limitée par une ellipse de demi-axes $a$ et $b$ sachant que le grand axe est perpendiculaire à la surface libre du fluide et l'extrémité supérieure de cet axe située à une distance $h$ de la surface.

**3702*.** Montrer que la pression d'un fluide sur une aire plane horizontale immergée arbitrairement dans ce fluide est égale au poids de la colonne cylindrique de fluide située au-dessus de cette aire.

## § 5. Intégrales impropres. Intégrales dépendant d'un paramètre

### Intégrales impropres doubles et triples

Calculer les intégrales impropres ou établir leur divergence.

**3703.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx\,dy}{1+x^2+y^2}$.

**3704.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

**3705.** $\displaystyle\int_{0}\int_{0} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2+a^2)^2}$.

**3706.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|-|y|}\,dx\,dy$.

**3707.** $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} (x+y)\,e^{-(x+y)}\,dx\,dy$.

**3708.** $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} xye^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$.

3709*. $\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty e^{-(x^2+2xy\cos\alpha+y^2)}\,dx\,dy.$

3710*. $\int\limits_0^\infty dx \int\limits_x^\infty e^{-y^2}\,dy.$ 3711*. $\int\limits_0^\infty dx \int\limits_{2x}^\infty xe^{-y}\,\frac{\sin y}{y^2}\,dy.$

Dans les exercices ci-après, indiquer parmi les intégrales impropres étendues à un cercle de rayon $R$ centré à l'origine des coordonnées celles qui sont convergentes.

3712. $\iint\limits_D \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy.$ 3713. $\iint\limits_D \frac{e^{-x^2-y^2}}{x^2+y^2}\,dx\,dy.$

3714. $\iint\limits_D \frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\,dx\,dy.$ 3715. $\iint\limits_D \frac{\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dx\,dy.$

3716. Existe-t-il un nombre $m$ tel que l'intégrale impropre $\iint \frac{dx\,dy}{\sqrt{(x^2+y^2)^m}}$ étendue au plan tout entier soit convergente?

Calculer les intégrales impropres.

3717. $\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{(1+x+y+z)^7}}$. 3718. $\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \frac{xy\,dx\,dy\,dz}{(1+x^2+y^2+z^2)^3}$.

3719*. $\int\limits_{-\infty}^\infty \int\limits_{-\infty}^\infty \int\limits_{-\infty}^\infty e^{-x^2-y^2-z^2}\,dx\,dy\,dz.$

Etudier la convergence des intégrales impropres sur la boule $\Omega$ de rayon $R$ centrée à l'origine des coordonnées.

3720. $\iiint\limits_\Omega \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}\ln\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}}$.

3721. $\iiint\limits_\Omega \frac{\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz.$

3722. $\iiint\limits_\Omega \frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^3}\,dx\,dy\,dz.$

3723. Calculer l'intégrale $\iiint\limits_\Omega \ln(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$, où le domaine $\Omega$ est une boule de rayon $R$ centrée à l'origine des coordonnées.

3724*. Trouver le volume limité par la surface $z = (x^2+y^2) \times \times e^{-(x^2+y^2)}$ et le plan $z = 0$.

3725. Trouver le volume limité par la surface $z = x^2y^2e^{-(x^2+y^2)}$ et le plan $z = 0$.

3726. Trouver le volume limité par le plan $z = 0$ et la portion de surface $z = xe^{-(x^2+y^2)}$ située au-dessus de ce plan.

3727. On donne un volume homogène limité par un cylindre circulaire droit (rayon de base $R$, hauteur $H$, densité $\gamma$). Trouver la force exercée sur une masse ponctuelle $m$ placée au centre de la base du cylindre.

3728. On considère un volume homogène limité par un cône circulaire droit (rayon de base $R$, hauteur $H$, densité $\gamma$). Trouver la force avec laquelle ce volume attire une masse ponctuelle $m$ placée au sommet du cône.

3729. On donne une boule plane non homogène de rayon $R$ dont la densité $\gamma$ est telle que $\gamma = a - br$ ($r$ est la distance au centre, $a > 0$, $b > 0$).

a) Trouver les constantes $a$ et $b$ sachant que la densité moyenne de la boule est égale à $\gamma_{moy}$ et la densité surfacique à $\gamma_0$.

b) Trouver la force d'attraction exercée par la boule sur une masse ponctuelle $m$ placée sur la surface.

## Intégrales dépendant d'un paramètre. Règle de Leibniz

3730. Trouver le domaine de définition de la fonction $f(x) = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{x^2+z^2}}$.

3731. Trouver la courbure de la ligne $y = \int_\pi^{2\pi} \frac{\sin \alpha x}{\alpha} d\alpha$ au point d'abscisse $x = 1$.

3732. Utiliser l'égalité $\int_0^b \frac{dx}{1+ax} = \frac{1}{a} \ln(1 + ab)$ et établir en dérivant par rapport au paramètre la formule suivante:

$$\int_0^b \frac{x\,dx}{(1+ax)^2} = \frac{1}{a^2} \ln(1+ab) - \frac{b}{a(1+ab)}.$$

3733. Appliquer l'égalité $\int_0^b \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$ au calcul de l'intégrale $\int_0^b \frac{dx}{(x^2+a^2)^3}$.

3734. Appliquer l'égalité $\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2a}$ au calcul de l'intégrale $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ ($n$ est un entier positif).

3735. Calculer l'intégrale $\int_0^\infty e^{-ax}x^{n-1}\,dx$ ($n$ est un entier positif) pour $a>0$ après avoir calculé préalablement $\int_0^\infty e^{-ax}\,dx$.

3736*. Appliquer l'égalité (voir exercice 2318)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}=\frac{\pi}{2|ab|}$$

au calcul de

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)^2}.$$

Calculer les intégrales en dérivant par rapport au paramètre.

3737. $\int_0^\infty \frac{1-e^{-ax}}{xe^x}\,dx \quad (a>-1)$.

3738. $\int_0^\infty \frac{1-e^{-ax^2}}{xe^{x^2}}\,dx \quad (a>-1)$.

3739. $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} ax}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

3740. $\int_0^1 \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad (a^2<1)$.

3741. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax}{x(1+x^2)}\,dx$.

3742. $\int_0^1 \frac{\ln(1-a^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad (a^2<1)$.

3743. $\int_0^\pi \frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}\,dx \quad (a^2<1)$.

3744. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1+a\sin x}{1-a\sin x}\right)\frac{dx}{\sin x} \quad (a^2<1)$.

3745. $\int_0^\infty \frac{1-e^{-ax^2}}{x^2}\,dx$ $(a>0)$, sachant que $\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ $(a>0)$ (cf. exercice 2439).

3746*. $\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}\,dx \quad (a>0,\ b>0)$.

3747*. $\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin bx-\sin cx}{x}dx \quad (a>0)$.

3748. $\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\cos bx-\cos cx}{x}dx \quad (a>0)$.

3749*. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)\,dx$.

3750. Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}dx$, trouver $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\operatorname{tg}x}dx$.

3751. Appliquer l'égalité $\int_0^1 x^n\,dx=\frac{1}{n+1}$ au calcul de l'intégrale

$$\int_0^1\frac{x^\beta-x^\alpha}{\ln x}dx \quad (\alpha>-1,\ \beta>-1).$$

3752. Appliquer l'égalité $2a\int_0^\infty e^{-a^2x^2}dx=\sqrt{\pi}$ (cf. exercice 2439) au calcul de l'intégrale $\int_0^\infty\left(e^{-\frac{a^2}{x^2}}-e^{-\frac{b^2}{x^2}}\right)dx$.

3753. De la relation $\int_0^\infty e^{-z^2}dz=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (intégrale de Poisson) déduire l'égalité $\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-z^2x}dz\ (x>0)$ et s'en servir pour le calcul des intégrales (intégrales de diffraction ou de Fresnel):

a) $\int_0^\infty\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{x}}$; b) $\int_0^\infty\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{x}}$.

## II Problèmes divers

3754. Soit une fonction $f(x)$ continue pour $x\geqslant 0$ et tendant vers une limite finie $f(\infty)$, lorsque $x\to\infty$. Montrer que si $a>0$ et $b>0$, alors $\int_0^\infty\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=[f(\infty)-f(0)]\ln\frac{a}{b}$.

Calculer les intégrales indiquées en utilisant le résultat de l'exercice 3754.

3755. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x}\,dx$. 3756. $\int_0^\infty \frac{e^{-ax^n} - e^{-bx^n}}{x}\,dx$ $(n>0)$.

3757*. Soit une fonction $f(x)$ continue pour $x \geqslant 0$ et telle que $\int_A^\infty \frac{b(x)}{x}\,dx$ converge quel que soit $A>0$.

Montrer que si $a>0$ et $b>0$, alors $\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = f(0) \times \times \ln \frac{b}{a}$. (Cf. exercice 3754.)

Calculer les intégrales indiquées en utilisant le résultat de l'exercice 3757 $(a>0,\ b>0)$.

3758. $\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx$. 3759. $\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\,dx$.

3760. $\int_0^\infty \frac{\sin ax \cdot \sin bx}{x}\,dx$. 3761. $\int_0^\infty \frac{b \sin ax - a \sin bx}{x^2}\,dx$,

3762*. $\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^2}\,dx$.

3763*. La fonction de Laplace $\Phi(x)$ est définie comme suit: $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ (cette fonction joue un rôle important dans la théorie des probabilités). Montrer les relations

1) $\int_0^x \Phi(az)\,dz = \frac{e^{-a^2x^2} - 1}{a\sqrt{\pi}} + x\Phi(ax)$;

2) $\int_0^\infty [1 - \Phi(x)]\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

3764*. Les fonctions si $(x)$ et ci $(x)$ se définissent comme suit: $\operatorname{si}(x) = -\int_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$ (sinus intégral) et $\operatorname{ci}(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt$ (cosinus intégral). Montrer que

$$\int_0^\infty \sin x \operatorname{si}(x)\,dx = \int_0^\infty \cos x \operatorname{ci}(x)\,dx = -\frac{\pi}{4}.$$

**3765*.** La fonction $J_0(x)$ définie par l'égalité

$$J_0(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\sin\theta)\,d\theta$$

est appelée fonction de Bessel d'ordre zéro. Montrer que

1) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax}J_0(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\quad(a>0)$;

2) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin ax}{x}J_0(x)\,dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\text{ pour } a\geqslant 1;\\ \arcsin a\text{ pour } |a|\leqslant 1;\\ -\frac{\pi}{2}\text{ pour } a\leqslant -1.\end{cases}$

**3766.** Montrer que la fonction $y=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{e^{-xz}}{1+z^2}dz$ est solution de l'équation différentielle $y''+y=1/x$.

**3767*.** Montrer que la fonction $y=\displaystyle\int_{-1}^{1}(z^2-1)^{n-1}e^{xz}\,dz$ est solution de l'équation différentielle $xy''+2ny'-xy=0$.

**3768*.** Montrer que la fonction $y=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{e^{-xz}}{(1+z^2)^{n+1}}dz$ est solution de l'équation différentielle $xy''-2ny'+xy=1$.

**3769*.** Montrer que la fonction de Bessel d'ordre zéro $J_0(x)=$ $=\displaystyle\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\sin\theta)\,d\theta$ est solution de l'équation différentielle $J_0''(x)+\dfrac{J_0'(x)}{x}+J_0(x)=0$.

# CHAPITRE XIII

# INTÉGRALES CURVILIGNES ET INTÉGRALES DE SURFACE

## § 1. Intégrales curvilignes le long d'un arc de courbe

### Calcul d'intégrales

Calculer les intégrales curvilignes.

**3770.** $\int\limits_L \frac{ds}{x-y}$, où $L$ est le segment de droite $y = \frac{1}{2}x - 2$ compris entre les points $A$ (0, —2) et $B$ (4, 0).

**3771.** $\int\limits_L xy\,ds$, où $L$ est le périmètre du rectangle de sommets $A$ (0, 0) ; $B$ (4, 0), $C$ (4,2) et $D$ (0, 2).

**3772.** $\int\limits_L y\,ds$, où $L$ est l'arc de parabole $y^2 = 2px$ intercepté par la parabole $x^2 = 2py$.

**3773.** $\int\limits_L (x^2 + y^2)^n\,ds$, où $L$ est la circonférence

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t.$$

**3774.** $\int\limits_L xy\,ds$, où $L$ est le quart d'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ contenu dans le premier quadrant.

**3775.** $\int\limits_L \sqrt{2y}\,ds$, où $L$ est la première arche de cycloïde

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

**3776.** Etablir une formule de calcul de l'intégrale $\int\limits_L F(x, y)\,ds$ en coordonnées polaires sachant que la courbe $L$ est définie par l'équation $\rho = \rho(\varphi)$ $(\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2)$.

**3777*.** Calculer $\int\limits_L (x - y)\,ds$, où $L$ est la circonférence $x^2 + y^2 = ax$.

**3778.** Calculer $\int\limits_L x\sqrt{x^2 - y^2}\,ds$, où $L$ est une courbe définie par l'équation $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ $(x \geqslant 0)$ (une demi-lemniscate).

3779. Calculer $\int\limits_L \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\, ds$, où $L$ est la portion de spirale d'Archimède $\rho = 2\varphi$ contenue à l'intérieur d'un cercle de rayon $R$ centré à l'origine des coordonnées (au pôle).

3780. Calculer l'intégrale $\int\limits_L \frac{z^2 ds}{x^2+y^2}$, où $L$ est la première spire de la spirale $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = at$.

3781. Calculer $\int\limits_L xyz\, ds$, où $L$ est le quart de circonférence $x^2 + y^2 + z^2 = R$, $x^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$ contenu dans le premier octant.

3782. Calculer $\int\limits_L (2z - \sqrt{x^2 + y^2})\, ds$, où $L$ est la première spire de la spirale conique

$$x - t \cos t, \quad y = t \sin t, \quad z = t.$$

3783. Calculer $\int\limits_L (x + y)\, ds$, où $L$ est le quart de circonférence $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $y = x$, contenu dans le premier octant.

## Applications des intégrales

3784. Trouver la masse de la portion de courbe $y = \ln x$ comprise entre les points d'abscisses $x_1$ et $x_2$ sachant que la densité est égale en chaque point au carré de l'abscisse du point considéré.

3785. Trouver la masse de la portion de chaînette $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ comprise entre les points d'abscisses $x_1 = 0$ et $x_2 = a$ sachant que la densité est en chaque point inversement proportionnelle à l'ordonnée du point considéré et qu'elle est égale à $\delta$ au point $(0, a)$.

3786. Trouver la masse du quart d'ellipse $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ situé dans le premier quadrant sachant que la densité est en chaque point égale à l'ordonnée du point considéré.

3787. Trouver la masse de la première spire de la spirale $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$ sachant que la densité est égale en chaque point au carré du rayon polaire de ce point.

3788. Trouver la masse de l'arc de courbe $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$ compris entre le point correspondant à $t = 0$ et un point arbitraire sachant que la densité est inversement proportionnelle au carré du rayon polaire et égale à l'unité au point $(1, 0, 1)$.

3789. Trouver les coordonnées du centre de gravité de la première demi-spire de la spirale $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$ sachant que la densité est constante.

3790. Trouver le moment statique de la première spire de la spirale conique $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = t$ par rapport au plan $Oxy$ sachant que la densité est proportionnelle au carré de la distance de ce plan, soit $\rho = kz^2$.

**3791.** Trouver le moment d'inertie de la première spire de la spirale $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = \frac{h}{2\pi} t$ par rapport aux axes de coordonnées.

---

Calculer l'aire des portions de surfaces cylindriques comprises entre le plan $Oxy$ et les surfaces indiquées.

**3792.** $x^2 + y^2 = R^2$, $z = R + \frac{x^2}{R}$.

**3793.** $y^2 = 2px$, $z = \sqrt{2px - 4x^2}$.

**3794.** $y^2 = \frac{4}{9}(x-1)^3$, $z = 2 - \sqrt{x}$.

**3795.** $x^2 + y^2 = R^2$, $2Rz = xy$.

**3796.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = kx$ et $z = 0$ $(z \geqslant 0)$ (fer à cheval cylindrique).

**3797.** $y = \sqrt{2px}$, $z = y$ et $x = \frac{8}{9} p$.

**3798.** Calculer l'aire de la surface découpée sur un cylindre circulaire de rayon $R$ par le même cylindre sachant que les axes de symétrie de ces cylindres se coupent à angle droit (cf. solution de l'exercice 3642).

**3799.** Trouver l'aire de la portion de cylindre $x^2 + y^2 = Rx$ intérieure à la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

---

En vertu de la loi de Bio-Savart un élément de courant exerce sur une masse magnétique $m$ une force numériquement égale à $\frac{mI \sin\alpha ds}{r^2}$, où $I$ est l'intensité du courant, $ds$, l'élément de longueur du fil, $r$, la distance de l'élément de courant à la masse magnétique, $\alpha$ l'angle que fait la direction de la droite joignant la masse magnétique et l'élément de courant avec la direction de l'élément de courant. Cette force est perpendiculaire au plan défini par l'élément de courant et le point d'application de la masse magnétique et dirigée d'après la règle du bonhomme d'Ampère. Se servir de cette loi dans les exercices ci-après.

**3800.** Trouver la force exercée par un courant $I$ rectiligne infini sur une masse magnétique ponctuelle $m$ placée à une distance $a$ du courant.

**3801.** Un courant $I$ traverse un circuit de forme carrée de côté $a$. Trouver la force qu'il exerce sur une masse magnétique ponctuelle $m$ placée au centre du carré.

**3802.** Montrer qu'un courant $I$ passant dans un arc de courbe d'équation $\rho = \rho(\varphi)$ en coordonnées polaires exerce sur une masse magnétique ponctuelle placée au pôle une force numériquement égale à

$$f = mI \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\rho}.$$

**3803.** Trouver la force exercée par un courant $I$ elliptique fermé sur une masse magnétique ponctuelle $m$ placée au foyer de l'ellipse.

**3804.** Trouver la force exercée par un courant $I$ parabolique infini sur une masse magnétique ponctuelle $m$ placée au foyer de la parabole. La distance du sommet au foyer est égale à $p/2$.

**3805.** Trouver la force exercée par un courant circulaire de rayon $R$ sur une masse magnétique ponctuelle $m$ placée en un point $P$ situé à une distance $h$ à la verticale du centre du cercle.

Pour quelle valeur de $R$ cette force sera-t-elle maximale? ($h$ est donné.)

## § 2. Intégrales curvilignes en coordonnées

### Calcul des intégrales

Calculer les intégrales curvilignes.

**3806.** $\int\limits_L x\,dy$, $L$ étant le périmètre du triangle formé par les axes de coordonnées et la droite $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1$, le sens d'intégration étant le sens positif, i.e. le sens contraire aux aiguilles d'une montre.

**3807.** $\int\limits_L x\,dy$, $L$ étant le segment de droite $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ intercepté par les axes de coordonnées.

**3808.** $\int\limits_L (x^2 - y^2)\,dx$, $L$ étant l'arc de parabole $y = x^2$ compris entre les points $(0, 0)$ et $(2, 4)$.

**3809.** $\int\limits_L (x^2 + y^2)\,dy$, $L$ étant le périmètre du rectangle $A\ (0, 0)$, $B\ (2, 0)$, $C\ (4, 4)$ et $D\ (0, 4)$. Les sommets sont indiqués dans le sens du parcours.

**3810.** $\int\limits_{(0,\,0)}^{(\pi,\,2\pi)} -x \cos y\,dx + y \sin x\,dy$ le long du segment de droite reliant les points $(0, 0)$ et $(\pi, 2\pi)$.

**3811.** $\int\limits_{(0,\,0)}^{(1,\,1)} xy\,dx + (y - x)\,dy$ le long de la courbe 1) $y = x$, 2) $y = x^2$, 3) $y^2 = x$, $y = x^3$.

**3812.** $\int\limits_{(0,\,0)}^{(1,\,1)} 2xy\,dx + x^2\,dy$ le long de la courbe 1) $y = x$, 2) $y = x^2$, 3) $y = x^3$, 4) $y^2 = x$.

**3813.** $\int\limits_L y\,dx + x\,dy$, $L$ étant le quart de circonférence $x = R \cos t$, $y = R \sin t$ compris entre $t_1 = 0$ et $t_2 = \pi/2$.

3814. $\int\limits_L y dx - x\,dy$, $L$ étant l'ellipse $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ parcourue dans le sens positif.

3815. $\int\limits_L \frac{y^2dx - x^2dy}{x^2+y^2}$, $L$ étant la demi-circonférence $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ comprise entre $t_1 = 0$ et $t_2 = \pi$.

3816. $\int\limits_L (2a - y)\,dx - (a - y)\,dy$, $L$ étant la première arche de cycloïde $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ (à partir de l'origine des coordonnées).

3817. $\int\limits_L \frac{x^2dy - y^2dx}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}}$, $L$ étant le quart d'astroïde $x = R\cos^3 t$, $y = R\sin^3 t$ compris entre les points $(R, 0)$ et $(0, R)$.

3818. $\int\limits_L x\,dx + y\,dy + (x + y - 1)\,dz$, $L$ étant le segment de droite compris entre les points $(1, 1, 1)$ et $(2, 3, 4)$.

3819. $\int\limits_L yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz$, $L$ étant l'arc d'hélice $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = \frac{at}{2\pi}$ compris entre les points d'intersection de l'hélice avec le plan $z = 0$ et le plan $z = a$.

3820. $\int\limits_{(1,1,1)}^{(4,4,4)} \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-x-y+2z}}$ le long de la droite passant les points $(1, 1, 1)$ et $(4, 4, 4)$.

3821. $\int\limits_L y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz$, où $L$ est l'intersection de la sphère, $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ et du cylindre $x^2 + y^2 = Rx$ $(R > 0$, $z \geqslant 0)$ l'intégration s'effectuant dans le sens positif pour un observateur placé à l'origine des coordonnées.

## Formule de Green

Transformer les intégrales curvilignes sur un contour fermé $L$, dans le sens positif, en intégrales doubles sur le domaine limité par ce contour.

3822. $\int\limits_L (1 - x^2)\,y\,dx + x(1 + y^2)\,dy$.

3823. $\int\limits_L (e^{xy} + 2x\cos y)\,dx + (e^{xy} - x^2\sin y)\,dy$.

3824. Calculer de deux manières l'intégrale de l'exercice 3822 en prenant pour contour $L$ la circonférence $x^2 + y^2 = R^2$:
1) directement, 2) avec la formule de Green.

3825. Calculer $\int\limits_L (xy + x + y)\,dx + (xy + x - y)\,dy$, où $L$ est : 1) l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ; 2) la circonférence $x^2 + y^2 = ax$. L'intégration s'effectue dans le sens positif. Utiliser deux méthodes : 1) calcul direct, 2) formule de Green.

3826. Montrer que l'intégrale

$$\int\limits_L (yx^2 + e^y)\,dx + (xy^3 + xe^y - 2y)\,dy$$

est nulle si $L$ est une courbe fermée symétrique par rapport à l'origine des coordonnées.

3827. Appliquer la formule de Green au calcul de la différence des intégrales

$$I_1 = \int\limits_{AmB} (x + y)^2\,dx - (x - y)^2\,dy$$

et

$$I_2 = \int\limits_{AnB} (x + y)^2\,dx - (x - y)^2\,dy,$$

où $AmB$ est le segment de droite joignant les points $A$ (0, 0) et $B$ (1, 1), et $AnB$ l'arc de parabole $y = x^2$.

3828. Montrer que l'intégrale

$$\int\limits_L \{x \cos (N, x) + y \sin (N, x)\}\,ds,$$

où $(N, x)$ l'angle de la normale extérieure à la courbe et l'axe $Ox$, prise le long du contour fermé $L$ dans le sens positif est égale au double de l'aire limitée par le contour $L$.

3829. Montrer que l'intégrale $\int\limits_L (2xy - y)\,dx + x^2\,dy$, où $L$ est un contour fermé, est égale à l'aire limitée par ce contour.

3830. Montrer que l'intégrale $\int\limits_L \varphi(y)\,dx + [x\varphi'(y) + x^3]\,dy$ est égale au triple du moment d'inertie de l'aire plane homogène limitée par le contour $L$ par rapport à l'axe des ordonnées.

## Indépendance de l'intégrale par rapport au chemin d'intégration. Recherche d'une primitive.

Vérifier que les intégrales prises le long des contours fermés sont nulles quelle que soit la forme de l'intégrande.

3831. $\int\limits_L \varphi(x)\,dx + \psi(y)\,dy$. 3832. $\int\limits_L f(xy)\,(y\,dx + x\,dy)$.

3833. $\int\limits_L f\left(\frac{y}{x}\right)\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}$.

3834. $\int\limits_L [f(x+y)+f(x-y)]\,dx+[f(x+y)-f(x-y)]\,dy$.

3835. $\int\limits_L f(x^2+y^2+z^2)(x\,dx+y\,dy+z\,dz)$.

3836*. Montrer que l'intégrale $\int\limits_L \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$ prise dans le sens positif le long de tout contour fermé contenant l'origine des coordonnées est égale à $2\pi$.

3837. Calculer $\int\limits_L \frac{x\,dy-p\,dx}{x^2+4y^2}$ le long de la circonférence $x^2+y^2=1$ dans le sens positif.

Calculer les intégrales curvilignes des différentielles totales.

3838. $\int\limits_{(-1,2)}^{(2,3)} y\,dx+x\,dy$. 3839. $\int\limits_{(0,0)}^{(2,1)} 2xy\,dx+x^2\,dy$.

3840. $\int\limits_{(3,4)}^{(5,12)} \frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}$ (l'origine des coordonnées ne se trouve pas sur le contour d'intégration).

3841. $\int\limits_{(P_1)}^{(P_2)} \frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, où les points $P_1$ et $P_2$ sont situés sur des circonférences concentriques centrées à l'origine des coordonnées et de rayons respectifs $R_1$ et $R_2$ (l'origine des coordonnées n'est pas située sur le contour d'intégration).

3842. $\int\limits_{(1,-1,2)}^{(2,1,3)} x\,dx-y^2\,dy+z\,dz$. 3843. $\int\limits_{(1,2,3)}^{(3,2,1)} yz\,dx+zx\,dy+xy\,dz$.

3844. $\int\limits_{(7,2,3)}^{(5,3,1)} \frac{zx\,dy+xy\,dz-yz\,dx}{(x-yz)^2}$ $\left(\text{le contour d'intégration ne coupe pas la surface } z=\frac{x}{y}\right)$.

Retrouver les fonctions à partir des différentielles totales.

3845. $du=x^2\,dx+y^2\,dy$.

3846. $du=4(x^2-y^2)(x\,dx-y\,dy)$.

3847. $du=\frac{(x+2y)\,dx+y\,dy}{(x+y)^2}$.

3848. $du=\frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}dx-\left(\frac{x^2+\sqrt{x^2+y^2}}{y^2\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy$.

3849. $du=\left[\frac{x-2y}{(y-x)^2}+x\right]dx+\left[\frac{y}{(y-x)^2}-y^2\right]dy$.

3850. $du=(2x\cos y-y^2\sin x)\,dx+(2y\cos x-x^2\sin y)\,dy$.

3851. $du = \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}dx + \left(\frac{e^y}{1+x^2} + 1\right)dy.$

3852. $du = \frac{(3y-x)\,dx + (y-3x)\,dy}{(x+y)^3}.$

3853. Trouver $n$ tel que l'expression $\frac{(x-y)\,dx + (x+y)\,dy}{(x^2+y^2)^n}$ soit une différentielle totale. Trouver la fonction correspondante.

3854. Trouver $a$ et $b$ tels que l'expression $\frac{(y^2+2xy+ax^2)\,dx - (x^2+2xy+by^2)\,dy}{(x^2+y^2)^2}$ soit une différentielle totale. Trouver la fonction correspondante.

Retrouver les fonctions à partir des différentielles totales.

3855. $du = \frac{dx+dy+dz}{x+y+z}.$ 3856. $du = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$

3857. $du = \frac{yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz}{1+x^2y^2z^2}.$

3858. $du = \frac{2(zx\,dy + xy\,dz - yz\,dx)}{(x-yz)^2}.$

3859. $du = \frac{dx-3dy}{z} + \frac{3y-x+z^3}{z^2}dz.$

3860. $du = e^{\frac{y}{z}}dx + \left(\frac{e^{\frac{y}{z}}(x+1)}{z} + ze^{yz}\right)dy +$

$+ \left(-\frac{e^{\frac{y}{z}}(x+1)y}{z^2} + ye^{yz} + e^{-z}\right)dz.$

## Applications des intégrales

Calculer par une intégrale curviligne l'aire limitée par les courbes fermées.

3861. L'ellipse $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

3862. L'astroïde $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

3863. La cardioïde $x = 2a\cos t - a\cos 2t$, $y = 2a\sin t - a\sin 2t$.

3864*. La boucle du folium de Descartes $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

3865. Une boucle de la courbe $(x+y)^3 = xy$.

3866. Une boucle de la courbe $(x+y)^4 = x^2y$.

3867*. La lemniscate de Bernoulli $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$.

3868. Une boucle de la courbe $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{12} = xy$.

## Travail

3869. Une force constante $F$ orientée dans le sens de l'axe $Ox$ s'exerce sur chaque point matériel d'un plan. Trouver le travail effectué par cette force lorsque le point se déplace sur l'arc de circonférence $x^2 + y^2 = R^2$ compris dans le premier quadrant.

**3870.** Sur chaque point matériel d'un plan agit une force $F$ dont les projections sur les axes des coordonnées sont respectivement $X = xy$, $Y = x + y$. Calculer le travail effectué par la force $F$ lorsque le point se déplace de l'origine des coordonnées au point (1, 1) : 1) sur la droite $y = x$ ; 2) sur la parabole $y = x^2$ ; 3) sur une ligne polygonale composée de deux segments parallèles aux axes de coordonnées (on traitera les deux cas).

**3871.** En chaque point $M$ de l'ellipse $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ est appliquée une force $F$ numériquement égale à la distance du point $M$ au centre de l'ellipse et dirigée vers le centre de l'ellipse. a) Calculer le travail effectué par la force $F$ lorsque le point se déplace sur l'arc d'ellipse contenu dans le premier quadrant. b) Trouver le travail effectué lorsque le point parcourt l'ellipse tout entière.

**3872.** Les projections d'une force sur les axes de coordonnées sont données par les formules $X = 2xy$ et $Y = x^2$. Montrer que le travail effectué par cette force lorsque le point se déplace dépend de la position initiale et de la position finale et non pas du chemin parcouru. Trouver le travail fourni lorsque le point courant se rend du point (1, 0) au point (0, 3).

**3873.** On considère une force de grandeur inversement proportionnelle à la distance de son point d'application au plan $xOy$ et orientée vers l'origine des coordonnées. Calculer le travail effectué lorsque le point se déplace sous l'action de cette force du point $M$ $(a, b, c)$ au point $N$ $(2a, 2b, 2c)$ sur la droite $x = at$, $y = bt$, $z = ct$.

**3874.** On considère une force de grandeur inversement proportionnelle à la distance de son point d'application à l'axe $Oz$, perpendiculaire à cet axe et orientée vers lui. Trouver le travail effectué par cette force lorsque le point se déplace du point $M$ (1, 1, 0) au point $N$ (0, 1, 1) sur la circonférence $x = \cos t$, $y = 1$, $z = \sin t$.

**3875.** Montrer que le travail effectué par la force d'attraction de deux masses ponctuelles lorsque l'une d'elles se déplace ne dépend pas de la forme du chemin. La grandeur de la force d'attraction $F$ est définie par la loi de Newton $F = \frac{km_1m_2}{r^2}$, où $r$ est la distance entre les points, $m_1$ et $m_2$ les masses concentrées en ces points, $k$ la constante de gravitation.

## § 3. Intégrales de surface

### Intégrales étendues à l'aire d'une surface

Calculer les intégrales.

**3876.** $\iint\limits_S \left(z + 2x + \frac{4}{3}y\right) dq$, $S$ étant la portion de plan $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ contenue dans le premier octant.

3877. $\iint\limits_S xyz\,dq$, $S$ étant la portion de plan $x + y + z = 1$ contenue dans le premier octant.

3878. $\iint\limits_S x\,dq$, $S$ étant la portion de sphère $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ contenue dans le premier octant.

3879. $\iint\limits_S y\,dq$, $S$ étant la demi-sphère $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

3880. $\iint\limits_S \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dq$, $S$ étant la demi-sphère $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

3881. $\iint\limits_S x^2y^2\,dq$, $S$ étant la demi-sphère $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

3882. $\iint\limits_S \frac{dq}{r^2}$, $S$ étant le cylindre $x^2 + y^2 = R^2$ limité par les plans $z = 0$ et $z = H$ et $r$ la distance du point courant de la surface à l'origine des coordonnées.

3883. $\iint\limits_S \frac{dq}{r^n}$, $S$ étant la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, et $r$ la distance du point courant de la sphère à un point fixe $P\,(0, 0, c)$ $(c > R)$.

3884. $\iint\limits_S \frac{dq}{r}$, où $S$ est la surface du paraboloïde hyperbolique $z = xy$ intercepté par le cylindre $x^2 + y^2 = R^2$ et $r$ la distance du point courant de cette surface à l'axe $Oz$.

3885*. Trouver la masse de la sphère sachant que la densité surfacique est en chaque point égale à la distance de ce point à un diamètre fixe de la sphère.

3886. Trouver la masse de la sphère sachant que la densité surfacique en chaque point est égale au carré de la distance de ce point à un diamètre fixe.

## Intégrales de surface en coordonnées

Calculer les intégrales de surface.

3887. $\iint\limits_S x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy$, $S$ étant le côté positif du cube constitué par les plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$.

3888. $\iint\limits_S x^2y^2z\,dx\,dy$, $S$ étant le côté de l'hémisphère inférieur $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

**3889.** $\iint\limits_S z\,dx\,dy$, à l'extérieur de l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

**3890.** $\iint\limits_S z^2\,dx\,dy$ à l'extérieur de l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

**3891.** $\iint\limits_S xz\,dx\,dy+xy\,dy\,dz+yz\,dx\,dz$ à l'extérieur de la pyramide engendrée par les plans $x=0$, $y=0$, $z=0$ et $x+y+z=1$.

**3892.** $\iint\limits_S yz\,dx\,dy+xz\,dy\,dz+xy\,dx\,dz$ à l'extérieur de la surface $S$ contenue dans le premier octant et constituée par le cylindre $x^2+y^2=R^2$ et les plans $x=0$, $y=0$, $z=0$ et $z=H$.

**3893.** $\iint\limits_S y^2z\,dx\,dy+xz\,dy\,dz+x^2y\,dx\,dz$ à l'extérieur de la surface $S$ contenue dans le premier octant et constituée par le paraboloïde de révolution $z=x^2+y^2$, le cylindre $x^2+y^2=1$ et les plans de coordonnées (fig. 68).

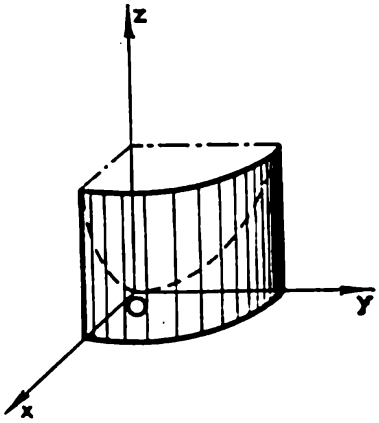

Fig. 68

## Formule de Stokes

**3894.** On considère l'intégrale $\int\limits_L (y^2+z^2)\,dx+(x^2+z^2)\,dy+(x^2+y^2)\,dz$ le long d'un contour fermé. Transformer cette intégrale en intégrale de surface tendue sur ce contour à l'aide de la formule de Stokes.

**3895.** Calculer l'intégrale $\int\limits_L x^2y^3\,dx+dy+z\,dz$, où le contour $L$ est la circonférence $x^2+y^2=R^2$, $z=0$: a) directement, b) à l'aide de la formule de Stokes en prenant pour surface l'hémisphère $z=+\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. L'intégration le long de la circonférence dans le plan $xOy$ s'effectue dans le sens positif.

## Formule d'Ostrogradski

**3896.** On considère l'intégrale $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz+y^2\,dx\,dz+z^2\,dx\,dy$. A l'aide de la formule d'Ostrogradski transformer cette intégrale double sur la surface fermée $S$ en une intégrale triple sur le volume limité par $S$. L'intégration s'effectue sur le côté extérieur de la surface $S$.

**3897.** Appliquer la formule d'Ostrogradski pour transformer l'intégrale double

$$\iint_S \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\{\cos(N, x) + \cos(N, y) + \cos(N, z)\}\,d\sigma,$$

où $N$ est la normale extérieure à la surface fermée $S$, en une intégrale triple sur le volume limité par $S$.

**3898.** Calculer l'intégrale de l'exercice 3897 dans le cas où $S$ est une sphère de rayon $R$ centrée à l'origine des coordonnées.

**3899.** Calculer l'intégrale

$$\iint_S [x^3 + \cos(N, x) + y^2 \cos(N, y) + z^3 \cos(N, z)]\,d\sigma,$$

où $S$ est une sphère de rayon $R$ centrée à l'origine des coordonnées et $N$ la normale extérieure.

**3900.** Calculer les intégrales des exercices 3891-3893 en utilisant la formule d'Ostrogradski.

# CHAPITRE XIV

# ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

## § 1. Equations du premier ordre

### Equations à variables séparables

Trouver les solutions générales des équations différentielles.

**3901.** $(xy^2 + x)\,dx + (y - x^2y)\,dy = 0$.

**3902.** $xyy' = 1 - x^2$.

**3903.** $yy' = \frac{1-2x}{y}$.

**3904.** $y' \operatorname{tg} x - y = a$. **3905.** $xy' + y = y^2$.

**3906.** $y' + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$.

**3907.** $\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$.

**3908.** $e^{-s}\left(1 + \frac{ds}{dt}\right) = 1$. **3909.** $y' = 10^{x+y}$.

**3910.** $y' + \sin\frac{x+y}{2} = \sin\frac{x-y}{2}$.

**3911.** En ballistique entre la vitesse $v$ d'un obus et le chemin parcouru dans l'âme de la pièce on a la relation suivante: $v = \frac{al^n}{b+l^n}$, où $v = \frac{dl}{dt}$ et $n < 1$. Exprimer le temps $t$ en fonction du chemin $l$ parcouru dans l'âme par l'obus.

**3912.** Si $x$ est la quantité d'acide iodhydrique $HJ$ décomposé à l'instant $t$, la vitesse de décomposition $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ est définie par l'équation différentielle $\left(\frac{dx}{dt}\right) = k_1\left(\frac{1-x}{v}\right)^2 - k_2\left(\frac{x}{v}\right)^2$, où $k_1$, $k_2$ et $v$ sont des constantes. Intégrer cette équation.

Trouver les solutions particulières des équations différentielles données satisfaisant les conditions initiales mentionnées.

**3913.** $y' \sin x = y \ln y$; $y\,|_{x=\frac{\pi}{2}} = e$.

**3914.** $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$; $y\,|_{x=0} = 1$.

**3915.** $\sin y \cos x\,dy = \cos y \sin x\,dx$; $y\,|_{x=0} = \frac{\pi}{4}$.

**3916.** $y - xy' = b\,(1 + x^2y')$; $y\,|_{x=1} = 1$.

**3917.** Trouver une courbe passant par le point (2, 3) et telle que les axes de coordonnées interceptent sur toute tangente un segment admettant le point de contact pour milieu.

**3918.** Trouver une courbe passant par le point (2, 0) et telle que le segment de tangente compris entre le point de contact et l'axe des ordonnées soit d'une longueur constante égale à 2.

**3919.** Trouver les courbes dans lesquelles le segment de tangente compris entre le point de contact et l'axe des abscisses est coupé en son milieu par l'axe des ordonnées.

**3920.** Trouver les courbes dans lesquelles la sous-tangente est proportionnelle à l'abscisse du point de contact (le coefficient de proportionnalité est égal à $k$).

**3921.** Trouver une courbe passant par le point $(a, 1)$ et dont la sous-tangente est constante et égale à $a$.

**3922.** Trouver une courbe telle que la normale soit d'une longueur constante $a$..

**3923.** Trouver une courbe telle que la somme de la tangente et de la sous-tangente en un point quelconque soit proportionnelle au produit des coordonnées du point de contact (le coefficient de proportionnalité est égal à $k$).

**3924.** Trouver une courbe $y = f(x)$ ($f(x) \geqslant 0$, $f(0) = 0$) limitant un trapèze curviligne de base $[0, x]$ et d'aire proportionnelle à la $(n + 1)$-ème puissance de $f(x)$ sachant que $f(1) = 1$.

**3925.** Un point matériel de masse 1 g est animé d'un mouvement rectiligne sous l'action d'une force directement proportionnelle au temps et inversement proportionnelle à la vitesse du point. A la date $t = 10$ s la vitesse est 0,5 m/s et la force égale à $-4 \cdot 10^{-5}$ N. Sachant que le mouvement commence à la date $t = 0$ trouver la vitesse du point à l'instant $t = 1$ mn.

**3926.** Un point matériel est animé d'un mouvement rectiligne tel que son énergie cinétique à l'instant $t$ est directement proportionnelle à la vitesse moyenne du mouvement dans l'intervalle de temps $(0, t)$. Sachant que $s = 0$ lorsque $t = 0$ montrer que ce mouvement est uniforme.

**3927.** Un canot à moteur se déplace en eau calme à la vitesse $v = 10$ km/h. On met les pleins gaz, puis on coupe le moteur. La vitesse tombe alors à $v_1 = 6$ km/h au bout de 20 $s$. La résistance de l'eau est proportionnelle à la vitesse du canot. Trouver la vitesse du canot 2 mn après l'arrêt du moteur ; trouver la distance parcourue par le canot une minute après l'arrêt du moteur.

**3928.** Au fond d'un récipient cylindrique de section transversale $S$ et d'axe vertical on pratique un orifice circulaire d'aire $q$ que l'on ferme avec un diaphragme (à la manière d'un objectif photographique). Le récipient est rempli d'un liquide jusqu'à une hauteur $h$. A l'instant $t = 0$ le diaphragme commence à s'ouvrir. Sachant que l'aire de l'orifice est proportionnelle au temps et que l'ouverture est totale à l'instant $T$ trouver la hauteur $H$ du liquide correspondante. (Voir ex. 2701-2706.)

**3929.** La vitesse de refroidissement d'un corps est proportionnelle à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu ambiant. Dans les exercices 2710 et 2711 nous avons admis que le coefficient de proportionnalité était constant. Dans certains calculs on suppose qu'il dépend linéairement du temps: $k = k_0 (1 + \alpha t)$. Etablir une relation entre la température $\theta$ du corps et le temps $t$ sachant que $\theta = \theta_0$ lorsque $t = 0$ (la température du milieu ambiant est $\theta_1$).

**3930*.** La vitesse de croissance de la surface de la feuille du victoria regia qui a la forme d'un cercle, est proportionnelle à la circonférence de la feuille et à la quantité de lumière solaire reçue, qui, elle, est proportionnelle à l'aire de la feuille et au cosinus de l'angle fait par les rayons lumineux avec la verticale. Exprimer l'aire $S$ de la feuille en fonction de $t$, sachant qu'à 6 h du matin l'aire est égale à 1600 cm² et à 6 h du soir à 2500 cm². (On suppose que les observations ont lieu un jour d'équinoxe, c'est-à-dire que l'angle entre la direction des rayons solaires et la verticale peut être supposé égal à 90° à 6 h du matin et du soir et à 0° à midi.)

Dans les exercices 3931-3933 intégrer les équations données en les ramenant à des équations à variables séparables par changement de la fonction inconnue.

**3931.** $y' = \cos(x - y)$ (poser $u = x - y$).

**3932.** $y' = 3x - 2y + 5$. **3933.** $y'\sqrt{1 + x + y} = x + y - 1$.

## Equations homogènes

Trouver les solutions générales des équations.

**3934.** $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$.

**3935.** $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

**3936.** $x\,dy - y\,dx = y\,dy$.

**3937.** $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$.

**3938.** $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.

**3939.** $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

**3940.** $y^2 + x^2 y' = xyy'$.

**3941.** $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$.

**3942.** $xy' = y \ln \frac{y}{x}$.

**3943.** $(3y^2 + 3xy + x^2)\,dx = (x^2 + 2xy)\,dy$.

**3944.** $y' = \frac{y}{x} + \frac{\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}{\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)}$.

Trouver les solutions particulières des équations différentielles satisfaisant les conditions initiales données.

**3945.** $(xy' - y) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = x$; $y|_{x=1} = 0$.

**3946.** $(y^2 - 3x^2)\,dy + 2xy\,dx = 0$; $y|_{x=0} = 1$.

3947. $y' = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2}$; $y|_{x=1} = -1$.

3948. $y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\frac{dy}{dx} - y = 0$; $y|_{x=0} = \sqrt{5}$.

3949. Réduire l'équation $y' = \frac{y}{x} + \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ à une quadrature. Trouver une fonction $\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ telle que la solution générale de cette équation soit $y = \frac{x}{\ln|Cx|}$.

3950. Trouver une courbe telle que le carré du segment intercepté sur l'axe des $y$ par une tangente soit égal au produit des coordonnées du point de contact.

3951. Trouver une courbe telle que l'ordonnée initiale de toute tangente soit égale à la sous-normale correspondante.

3952. Trouver une courbe telle que le rayon polaire de l'un quelconque de ses points $M$ soit égal à la distance du point où la tangente en $M$ coupe l'axe $Oy$ à l'origine des coordonnées.

3953*. Le miroir d'un projecteur a la forme d'une surface de révolution qui a la propriété de réfléchir parallèlement les rayons lumineux d'une source ponctuelle placée en son centre. Quelle est la nature de cette surface de révolution?

## Equations linéaires

Trouver les solutions générales des équations.

3954. $y' + 2y = 4x$. 3955. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

3956. $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$.

3957. $(1 + x^2)\,y' - 2xy = (1 + x^2)^2$.

3958. $y' + y = \cos x$. 3959. $y' + ay = e^{mx}$.

3960. $2y\,dx + (y^2 - 6x)\,dy = 0$.

3961. $y' = \frac{1}{2x - y^2}$. 3962. $y' = \frac{y}{2y\ln y + y - x}$.

3963. $x\,(y' - y) = (1 + x^2)\,e^x$.

3964. $y' + y\Phi'(x) - \Phi(x)\,\Phi'(x) = 0$, où $\Phi(x)$ est une fonction donnée.

Trouver les solutions particulières satisfaisant aux conditions initiales données.

3965. $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \sec x$; $y|_{x=0} = 0$.

3966. $xy' + y - e^x = 0$; $y|_{x=a} = b$.

3967. $xy' - \frac{y}{x+1} = x$; $y|_{x=1} = 0$.

3968. $t\,(1 + t^2)\,dx = (x + xt^2 - t^2)\,dt$; $x|_{t=1} = -\frac{\pi}{4}$.

3969. Soient $y_1$ et $y_2$ deux solutions distinctes de l'équation

$$y' + P(x)\cdot y = Q(x).$$

a) Montrer que $y = y_1 + C(y_2 - y_1)$ est la solution générale de cette équation ($C$ est constante).

b) Etablir entre les constantes $\alpha$ et $\beta$ une relation telle que la combinaison linéaire $\alpha y_1 + \beta y_2$ en soit la solution.

c) Montrer que si $y_3$ est une troisième solution particulière distincte de $y_1$ et $y_2$, alors le rapport $\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}$ est constant.

**3970.** Démontrer l'identité (cf. exercice 2345): $\int_0^x e^{zx-z^2}\,dz = e^{\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{4}}\,dz$, en composant une équation différentielle pour la fonction $I(x) = \int_0^x e^{xz-z^2} dz$ et en la résolvant.

**3971.** Trouver une courbe telle que l'ordonnée à l'origine de toute tangente soit de deux unités inférieure à l'abscisse du point de contact.

**3972*.** Trouver une courbe telle que l'aire du rectangle construit sur l'abscisse d'un point quelconque et l'ordonnée à l'origine de la tangente en ce point soit une constante ($= a^2$).

**3973*.** Trouver une courbe telle que l'aire du triangle formé par l'axe des abscisses, une tangente et le rayon vecteur du point de contact soit constante ($= a^2$).

**3974.** Un point de masse $m$ est animé d'un mouvement rectiligne sous l'action d'une force proportionnelle au temps (le coefficient de proportionnalité est $k_1$) écoulé depuis que la vitesse était nulle. Exprimer la vitesse en fonction du temps sachant que la résistance du milieu est proportionnelle à la vitesse (le coefficient de proportionnalité est $k$).

**3975.** Un point de masse $m$ est animé d'un mouvement rectiligne sous l'action d'une force proportionnelle au cube du temps écoulé depuis que sa vitesse était $v_0$ (le coefficient de proportionnalité est $k$). Exprimer la vitesse en fonction du temps sachant que la résistance du milieu est proportionnelle au produit de la vitesse par le temps (le coefficient de proportionnalité est $k_1$).

**3976.** La température initiale $\theta_0$ °C d'un corps est égale à celle du milieu ambiant. Le corps est chauffé par un appareil (la vitesse d'échauffement est une fonction donnée du temps: $c\varphi(t)$, où $c$ est la chaleur spécifique du corps). Sachant que la vitesse de refroidissement du corps est proportionnelle à la différence entre la température du corps et celle du milieu ambiant, on demande d'exprimer la température de ce corps en fonction du temps. On suppose que l'expérience commence à l'instant $t = 0$.

Dans les exercices 3977 et 3978, on utilisera le fait que si un courant alternatif $I = I(t)$ traverse un conducteur d'inductance $L$ et de résistance $R$ la chute de tension est égale à $L\frac{dI}{dt} + RI$.

3977. Entre les bornes d'une bobine la différence de potentiel tombe uniformément de $E_0 = 2$ V à $E_1 = 1$ V en 10 s. Calculer l'intensité du courant à la fin de la dixième seconde sachant qu'à l'instant $t = 0$ elle était égale à $16\frac{2}{3}$ a. La résistance de la bobine est 0,12 ohm, l'inductance 0,1 H.

3978. Calculer l'intensité du courant dans une bobine à l'instant $t$ sachant que sa résistance est $R$, son inductance $L$, l'intensité initiale $I_0 = 0$ et que la force électromotrice varie suivant la loi $E = E_0 \sin \omega t$.

## Problèmes divers
## (Equations aux variables séparables. Equations homogènes. Equations linéaires)

Trouver les solutions générales des équations.

3979. $y' = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2}$. 3980. $x^2 dy + (3-2xy)\, dx = 0$.

3981. $x(x^2+1)\, y' + y = x(1+x^2)^2$.

3982. $y' = \frac{y+1}{x}$. 3983. $y' = \frac{1+y^2}{xy(1+x^2)}$.

3984. $(8y+10x)\, dx + (5y+7x)\, dy = 0$.

3985. $x^3y' = y(y^2+x^2)$. 3986. $\frac{xy'-y}{x} = \operatorname{tg}\frac{y}{x}$.

3987. $\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right) dx + x\cos\frac{y}{x}\, dy = 0$.

3988. $y' = e^{2x} - e^x y$. 3989. $\frac{dx}{x^2-xy+y^2} = \frac{dy}{2y^2-xy}$.

3990. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\cos y + \sin 2y}$.

3991. $(x - 2xy - y^2)\, dy + y^2\, dx = 0$.

3992. $y' + y\cos x = \sin x \cos x$.

3993. $(x+1)\, y' - ny = e^x (x+1)^{n+1}$.

3994. $y\, dx = (y^3 - x)\, dy$.

3995. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (x+y)\frac{dy}{dx} + xy = 0$.

3996*. $yy' \sin x = \cos x (\sin x - y^2)$. 3997. $y' = (x+y)^2$.

3998. Vérifier que les courbes intégrales de l'équation $(1-x^2)\, y' + xy = ax$ sont des ellipses et des hyperboles centrées au point $(0, a)$, d'axes parallèles aux axes de coordonnées et telles que chacune d'elles possède un axe constant de longueur 2.

Trouver les solutions particulières des équations satisfaisant aux conditions initiales indiquées.

3999. $\frac{y-xy'}{x+yy'} = 2$; $y|_{x=1} = 1$.

4000. $y' - \frac{y}{1-x^2} = 1 + x$; $y|_{x=0} = 1$.

4001. $(1+e^x)\, yy' = e^y$; $y|_{x=0} = 0$.

4002. $y' = 3x^2y + x^5 + x^2$; $y|_{x=0} = 1$.

**4003.** Montrer que seules les droites $y = kx$ et les hyperboles $xy = m$ sont telles que la longueur du rayon polaire de l'un quelconque de leurs points soit égale à la tangente en ce point.

**4004.** Trouver les courbes telles que la normale en un point quelconque soit proportionnelle au carré de l'ordonnée de ce point. Le coefficient de proportionnalité est égal à $k$.

**4005.** Trouver les courbes telles que toute tangente coupe l'axe des ordonnées en un point équidistant du point de contact et de l'origine des coordonnées.

**4006.** Ecrire l'équation de la courbe qui coupe l'axe des abscisses au point $x = 1$ et qui est telle que la sous-normale est égale en chaque point à la moyenne arithmétique des coordonnées de ce point.

**4007.** Trouver les courbes telles que l'aire du trapèze limité par les axes de coordonnées, l'ordonnée d'un point arbitraire et la tangente en ce point soit numériquement égale à la moitié du carré de l'abscisse de ce point.

**4008.** Trouver les courbes telles que l'aire qu'elles limitent avec l'axe des abscisses et deux ordonnées, dont l'une est fixe et l'autre variable, soit numériquement égale au rapport du cube de l'ordonnée variable à l'abscisse variable.

**4009.** Trouver une courbe telle que l'aire comprise entre l'axe des abscisses, deux ordonnées et l'arc $MM'$ de cette courbe soit proportionnelle à l'arc $MM'$ indépendamment du choix des points $M$ et $M'$.

**4010.** Trouver les courbes telles que l'abscisse du centre de gravité du trapèze curviligne qu'elles interceptent avec les axes de coordonnées et la droite $x = a$ soit égale à $\frac{3}{4}a$, quel que soit $a$.

**4011*.** Trouver les courbes dont toutes les tangentes concourent en un point donné $(x_0, y_0)$.

**4012.** Trouver la courbe qui passe par l'origine des coordonnées et dont toutes les normales se coupent en un point donné $(x_0, y_0)$.

**4013.** Trouver une courbe telle que la pente de toute tangente soit le double de l'angle que fait le rayon polaire du point de contact avec l'axe des $x$.

**4014.** Un corps de masse $m = 1$ est sollicité par une force proportionnelle au temps (le coefficient de proportionnalité est égal à $k_1$). Ce corps subit également la réaction du milieu qui est proportionnelle à sa vitesse (le coefficient de proportionnalité est $k_2$). Ecrire l'équation du mouvement de ce corps (i.e. exprimer l'espace en fonction du temps).

**4015.** Une particule chute dans un milieu dont la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse de cette particule. Montrer que l'équation du mouvement s'écrit $\frac{dv}{dt} = g - kv^2$, où $k$ est une constante, $g$ l'accélération de la force de pesanteur. Intégrer cette équation et montrer que $v$ tend vers $\sqrt{\frac{g}{k}}$ lorsque $t \to \infty$.

**4016.** Un disque animé d'un mouvement de rotation dans un liquide est freiné par une force de frottement qui est proportionnelle à la vitesse angulaire.

1) Le disque qui commence à tourner à une vitesse angulaire de 3 tours par seconde voit sa vitesse tomber à 2 tours par seconde au bout d'une minute. Quelle sera sa vitesse angulaire 3 mn après le début du mouvement?

2) Le disque qui commence à tourner à une vitesse angulaire de 5 tours par seconde acquiert une vitesse angulaire de 3 tours par seconde après 2 mn. A quelle date sa vitesse angulaire sera-t-elle égale à 1 tour par seconde?

**4017.** Une balle pénètre dans une planche d'épaisseur $h = 0{,}1$ m à la vitesse $v_0 = 200$ m/s et en ressort à la vitesse $v_1 = 80$ m/s. En admettant que la résistance de la planche au mouvement de la balle est proportionnelle au carré de la vitesse de cette dernière trouver le temps mis par la balle pour perforer la planche.

**4018*.** Une goutte d'eau de masse initiale $M_0$ g et s'évaporant uniformément à la vitesse de $m$ g/s se déplace par inertie avec une vitesse initiale $v_0$ cm/s. La résistance du milieu est proportionnelle à la vitesse et au rayon de la goutte. Sachant qu'à l'instant initial $t = 0$ cette force est égale à $f_0$ dynes exprimer la vitesse de la goutte en fonction du temps.

**4019*.** Une goutte d'eau de masse initiale $M_0$ g et s'évaporant uniformément à la vitesse de $m$ g/s tombe en chute libre. La résistance du milieu est proportionnelle à la vitesse de la goutte (le coefficient de proportionnalité est égal à $k$).

Exprimer la vitesse de la goutte en fonction du temps écoulé depuis le début de la chute sachant que la vitesse initiale est nulle. On supposera que $k \neq 2m$.

**4020*.** Résoudre le problème précédent dans le cas d'une goutte sphérique en supposant que la force de résistance du milieu est proportionnelle au produit de la vitesse de la goutte par sa surface. La densité du liquide est $\gamma$. (Ramener le problème à des quadratures.)

**4021*.** Si un processus est tel qu'une matière $m_1$ se transforme en une autre $m_2$ et que la vitesse de formation de $m_2$ soit proportionnelle à la quantité existante de matière $m_1$, on dit que ce processus (ou réaction) est de premier ordre.

Une matière de masse initiale $m_0$ se transforme en une autre matière qui commence à son tour à se décomposer en une deuxième matière. Ces deux transformations sont des processus du premier ordre; les coefficients de proportionnalité qui sont connus sont respectivement $k_1$ pour le premier processus et $k_2$ pour le second.

Quelle quantité de deuxième matière obtiendra-t-on $t$ unités de temps après le début du processus?

**4022.** Un réservoir d'un volume de 100 l est rempli de saumure contenant 10 kg de sel. Ce réservoir reçoit 3 l d'eau pure par mn. Le mélange coule à la même vitesse dans un second réservoir de volume identique rempli initialement d'eau pure et dont le trop-

plein se déverse. Quelle est la quantité de sel contenue dans le second réservoir au bout d'une heure? Quelle est la quantité maximale de sel contenue dans le second réservoir? A quel instant cette quantité sera-t-elle atteinte? (La concentration de sel dans chaque réservoir est maintenue uniforme par remuage.)

**4023.** La tension et la résistance d'un circuit passent uniformément, dans l'espace d'une minute, respectivement de 0 à 120 V et de 0 à 120 ohms (voir exercices 3977-3978). L'inductance du circuit est constante (1 H). L'intensité initiale est $I_0$. Exprimer l'intensité en fonction du temps au cours de la première minute d'expérience.

**4024*.** Un tube cylindrique horizontal étroit $AB$, hermétiquement fermé, est rempli de gaz. Ce tube tourne uniformément autour d'un axe vertical $OO_1$ (fig. 69) passant par l'une de ses extrémités avec une vitesse angulaire $\omega$. La longueur du tube est $l$ cm, sa section transversale — $S$ cm², la masse de gaz — $M$ g, la pression dans le tube au repos — $p_0$ (la pression est constante tout le long du tube). Trouver la distribution de la pression le long du tube pendant sa rotation, i.e. exprimer $p$ en fonction de $x$.

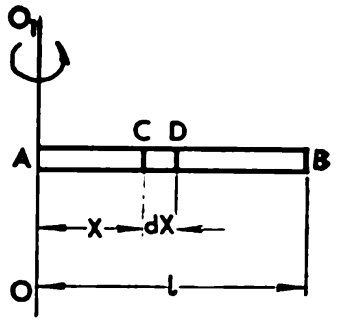

Fig. 69

## Autres exemples d'équations du premier ordre

Trouver la solution générale des équations en les ramenant par changement de variables à des équations linéaires ou homogènes.

**4025.** $y' = \dfrac{2y-x-5}{2x-y+4}$. **4026.** $y' = \dfrac{2x-y+1}{x-2y+1}$.

**4027.** $(x+y+1)\,dx = (2x+2y-1)\,dy$.

**4028.** $y' = \dfrac{2(y+2)^2}{(x+y-1)^2}$. **4029.** $y' = \dfrac{y^2-x}{2y(x+1)}$.

**4030.** $y' = \dfrac{y^3}{2(xy^2-x^2)}$. **4031.** $(1-xy+x^2y^2)\,dx = x^2\,dy$.

**4032.** $(x^2y^2-1)\,y' + 2xy^3 = 0$.

**4033.** $yy' + x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2+y^2}{x}\right)^2$. **4034.** $xy' + 1 = e^y$.

**4035.** $(x^2+y^2+1)\,dy + xy\,dx = 0$.

**4036.** $x\,dx + y\,dy + x\,(x\,dy - y\,dx) = 0$.

**4037.** $(x^2+y^2+y)\,dx = x\,dy$.

Résoudre les équations de Bernoulli.

**4038.** $y' + 2xy = 2x^3y^3$. **4039.** $y' + \dfrac{y}{x+1} + y^2 = 0$.

**4040.** $y^{n-1}(ay'+y) = x$. **4041.** $x\,dx = \left(\dfrac{x^2}{y} - y^3\right)dy$.

4042. $xy' + y = y^2 \ln x$. 4043. $y' - y \operatorname{tg} x + y^2 \cos x = 0$.

4044. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$. 4045. $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$.

4046. $y\,dy - \frac{ay^2}{x^2}\,dx = \frac{b\,dx}{x^2}$.

4047. $y' = \frac{y\varphi'(x) - y^2}{\varphi(x)}$, où $\varphi(x)$ est une fonction donnée.

4048. Trouver une courbe telle que le segment découpé sur l'axe des ordonnées par une tangente quelconque soit:

1) proportionnel au carré de l'ordonnée du point de contact;

2) proportionnel au cube de l'ordonnée du point de contact.

4049. Trouver les courbes d'équations $\rho = f(\varphi)$ telles que l'aire des secteurs limités par ces courbes, les rayons polaires du point fixe $(\rho_0, \varphi_0)$ et du point courant $(\rho, \varphi)$ soit proportionnelle au produit des coordonnées polaires $\rho$ et $\varphi$ du point courant. Le coefficient de proportionnalité est $k$.

## Equations aux différentielles totales

Trouver la solution générale des équations.

4050. $(2x^3 - xy^2)\,dx + (2y^3 - x^2y)\,dy = 0$.

4051. $\frac{x\,dy}{x^2+y^2} = \left(\frac{y}{x^2+y^2} - 1\right)dx$. 4052. $e^y\,dx + (xe^y - 2y)\,dy = 0$.

4053. $yx^{y-1}\,dx + x^y \ln x\,dy = 0$. 4054. $\frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2}$.

4055. $\frac{y + \sin x \cdot \cos^2(xy)}{\cos^2(xy)}\,dx + \frac{x}{\cos^2(xy)}\,dy + \sin y\,dy = 0$.

4056. $\left(1 + x\sqrt{x^2+y^2}\right)dx + \left(-1 + \sqrt{x^2+y^2}\right)y\,dy = 0$.

4057. $\left(\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y} - \frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x} + 1\right)dx + \left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} - \frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y} + \frac{1}{y^2}\right)dy = 0$.

## Facteur intégrant

Trouver le facteur intégrant et les solutions générales des équations.

4058. $(x^2 + y)\,dx - x\,dy = 0$. 4059*. $y(1 + xy)\,dx - x\,dy = 0$.

4060. $(x^2 + y^2 + 2x)\,dx + 2y\,dy = 0$.

4061. $\frac{y}{x}\,dx + (y^3 - \ln x)\,dy = 0$.

4062. $(x \cos y - y \sin y)\,dy + (x \sin y + y \cos y)\,dx = 0$.

4063. Vérifier que la fonction $e^{\int P(x)dx}$ est facteur intégrant de l'équation linéaire $\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$.

4064. Trouver le facteur intégrant de l'équation de Bernoulli

$$y' + P(x)\, y = y^n Q(x).$$

4065. Trouver les conditions sous lesquelles l'équation

$$X(x, y)\, dx + Y(x, y)\, dy = 0$$

admet un facteur intégrant de la forme $M = F(x + y)$.

4066. Trouver les conditions sous lesquelles l'équation

$$X(x, y)\, dx + Y(x, y)\, dy = 0$$

admet un facteur intégrant de la forme $M = F(x \cdot y)$.

## Problèmes divers

Trouver les solutions générales des équations.

4067. $y' = ax + by + c$. 4068. $ay' + by + cy^m = 0$.

4069. $y' = \frac{x+y-2}{y-x-4}$. 4070. $y' = \frac{y^2+xy-x^2}{y^2}$.

4071. $y' = \frac{a^2}{(x+y)^2}$. 4072. $y'(y^2 - x) = y$.

4073. $\frac{2x\,dx}{y^3} + \frac{y^2-3x^2}{y^4}\,dy = 0$.

4074. $(2y + xy^3)\,dx + (x + x^2y^2)\,dy = 0$.

4075. $\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right) dx + (x^2 + y^2)\,dy = 0$.

4076. $y' = \frac{(1+y)^2}{x(y+1) - x^2}$.

4077. $x\,dy + y\,dx + y^2(x\,dy - y\,dx) = 0$.

4078. $\left[\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right] dx + \left[\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}\right] dy = 0$.

4079. $y' = x\sqrt{y} + \frac{xy}{x^2-1}$. 4080. $y \sin x + y' \cos x = 1$.

4081. $y' - y + y^2 \cos x = 0$. 4082. $y' = \frac{\cos x \sin y + \operatorname{tg}^2 x}{\sin x \cdot \cos y}$.

4083. $xy' \cos \frac{y}{x} = y \cos \frac{y}{x} - x$.

4084. $\left(x \cos \frac{y}{x} + y \sin \frac{y}{x}\right) y\,dx + \left(x \cos \frac{y}{x} - y \sin \frac{y}{x}\right) x\,dy = 0$.

4085. $y' = \frac{x}{\cos y} - \operatorname{tg} y$. 4086. $y - y' \cos x = y^2 \cos x\,(1 - \sin x)$.

4087. $2yy' = e^{\frac{x^2+y^2}{x}} + \frac{x^2+y^2}{x} - 2x$.

4088. $\left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right) dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0$.

4089. Trouver les courbes dont le rapport de la sous-normale en un point à la somme de l'abscisse et de l'ordonnée de ce point est égal au rapport de l'ordonnée à l'abscisse de ce point.

**4090.** Trouver les courbes telles que le segment de toute tangente intercepté par l'axe des $x$ et la droite $y = ax + b$ admette le point de contact pour milieu.

**4091.** Trouver les courbes telles que le rapport de la distance de toute normale à l'origine des coordonnées à la distance de la même normale au point $(a, b)$ soit égal à une constante $k$.

**4092.** Trouver les courbes telles que la distance de l'origine des coordonnées à une tangente quelconque soit égale à la distance de l'origine des coordonnées à la normale en ce point de contact.

**4093*.** Trouver les courbes telles que l'ordonnée de tout point soit moyenne proportionnelle entre l'abscisse et la somme de l'abscisse et de la sous-normale en ce point.

**4094.** Un circuit électrique de résistance $R = 3/2$ ohms est mis sous tension (de 0 à 120 V) uniformément en l'espace de deux minutes. Par ailleurs, l'inductance est branchée uniformément à raison d'un nombre d'henry égal à celui qui mesure l'intensité du courant en ampères. Exprimer l'intensité en fonction du temps pendant les deux premières minutes d'expérience.

## § 2. Equations du premier ordre (suite)

### Champ de directions. Isoclines

**4095.** On considère l'équation différentielle $y' = -\frac{x}{y}$. a) Tracer le champ de directions défini par cette équation. b) Déterminer la position du vecteur du champ par rapport au rayon polaire de tout point du champ. c) Déterminer l'allure des courbes intégrales de l'équation à partir du champ de directions. d) Trouver les courbes intégrales en résolvant cette équation avec une méthode ordinaire (la méthode de séparation des variables). e) Déterminer la famille d'isoclines de cette équation.

**4096.** Trouver une équation différentielle admettant pour isoclines :

1) les hyperboles équilatères $xy = a$ ; 2) les paraboles $y^2 = 2px$ ; 3) les cercles $x^2 + y^2 = R^2$.

**4097.** Trouver les isoclines de l'équation différentielle de la famille de paraboles $y = ax^2$. Faire un dessin. Interpréter géométriquement ce résultat.

**4098.** Vérifier que les isoclines d'une équation homogène (et d'elle seulement) sont des droites passant par l'origine des coordonnées.

**4099.** Trouver les équations linéaires dont les isoclines sont des droites.

**4100.** Soient $y_1$, $y_2$, $y_3$ les ordonnées de trois isoclines d'une équation linéaire, correspondant à une même abscisse. Vérifier que le rapport $\frac{y_2-y_1}{y_3-y_1}$ est constant quelle que soit cette abscisse.

## Intégration approchée des équations différentielles

**4101.** Soit l'équation $y' = \frac{x^2+y^2}{10}$. Construire approximativement la courbe intégrale correspondant à l'intervalle $1 \leqslant x \leqslant 5$ et passant par le point $M$ (1, 1).

**4102.** Soit l'équation $y' = \frac{1}{x^2+y^2}$. Construire approximativement la courbe intégrale correspondant à l'intervalle [0,5 ; 3,5] et passant par le point (0,5 ; 0,5).

**4103.** Soit l'équation $y' = xy^3 + x^2$. Appliquer la formule d'Euler au calcul de $y$ pour $x = 1$, sachant que $y$ est une solution particulière satisfaisant à la condition initiale $y\,|_{x=0} = 0$. Calculer $y$ avec deux décimales vraies.

**4104.** Soit l'équation $y' = \sqrt{x}\cdot y^2 + 1$. Appliquer la méthode d'Euler au calcul de $y$ pour $x = 2$, sachant que $y$ est une solution particulière satisfaisant à la condition initiale $y\,|_{x=1} = 0$. Calculer $y$ avec deux décimales vraies.

**4105.** Soient l'équation $y' = \frac{xy}{2}$ et la condition initiale $y\,|_{x=0} = 1$. Résoudre cette équation exactement et calculer $y$ pour $x = 0{,}9$. Calculer ensuite cette valeur avec une méthode approchée en divisant l'intervalle [0 ; 0,9] en 9 parties. Déterminer l'erreur relative commise sur le dernier résultat.

**4106.** On considère l'équation $y' = \frac{3x^2}{x^3+y+1}$ et la condition initiale $y\,|_{x=1} = 0$. Résoudre cette équation exactement et calculer $x$ pour $y = 1$ en utilisant une méthode approchée quelconque d'intégration (comparer ensuite avec la valeur de $x$ obtenue en résolvant exactement cette équation).

**4107.** $y' = y^2 + xy + x^2$. Trouver par la méthode des approximations successives la deuxième approximation de la solution qui satisfait à la condition initiale $y\,|_{x=0} = 1$.

**4108.** $y' = xy^3 - 1$. Calculer pour $x = 1$ la solution de cette équation qui satisfait à la condition initiale $y\,|_{x=0} = 0$. Appliquer la méthode des approximations successives et se limiter à la troisième approximation. Faire les calculs avec deux décimales vraies.

Trouver quelques premiers termes du développement en série entière des solutions des équations satisfaisant aux conditions initiales mentionnées.

**4109.** $y' = y^3 - x$; $y\,|_{x=0} = 1$.

**4110.** $y' = x^2y^2 - 1$; $y\,|_{x=0} = 1$.

**4111.** $y' = x^2 - y^2$; $y\,|_{x=0} = 0$.

**4112.** $y' = \frac{1-x^2}{y} + 1$; $y\,|_{x=0} = 1$.

**4113.** $y' = \frac{xy}{1+x+y}$; $y\,|_{x=0} = 0$.

4114. $y' = e^y + xy$; $y|_{x=0} = 0$.
4115. $y' = \sin y - \sin x$; $y|_{x=0} = 0$.
4116. $y' = 1 + x + x^2 - 2y^2$; $y|_{x=1} = 1$.

## Solutions singulières. Equation de Clairault. Equation de Lagrange

Trouver les solutions générales et singulières des équations de Clairault et des équations de Lagrange.

4117. $y = xy' + y'^2$.
4118. $y = xy' - 3y'^3$.
4119. $y = xy' + \frac{1}{y}$.
4120. $y = xy' + \sqrt{1 + y'^2}$.
4121. $y = xy' + \sin y'$.
4122. $xy' - y = \ln y'$.
4123. $y = y'^2 (x + 1)$.
4124. $2yy' = x (y'^2 + 4)$.
4125. $y = yy'^2 + 2xy'$.
4126. $y = x (1 + y') + y'^2$.
4127. $y' = \ln (xy' - y)$.
4128. $y = y' (x + 1) + y'^2$.
4129. $y = y'x + a\sqrt[3]{1 - y'^3}$.
4130. $x = y\left(\frac{1}{\sqrt{y'}} - \frac{1}{y'}\right)$.

Trouver les solutions singulières des équations suivantes en appliquant la même méthode que dans le cas des équations de Lagrange et de Clairault.

4131. $y'^2 - yy' + e^x = 0$. 4132. $x^2y'^2 - 2 (xy - 2) y' + y^2 = 0$.
4133. $y' (y' - 2x) = 2 (y - x^2)$.

4134. Démontrer le théorème suivant: si une équation différentielle linéaire est une équation de Clairault, ses courbes intégrales sont un faisceau de droites.

4135. Trouver la courbe dont l'aire du triangle formé par une tangente et les axes de coordonnées est constante.

4136. Trouver la courbe dont la somme des segments découpés sur les axes de coordonnées par les tangentes est égale à $2a$.

4137. Trouver les courbes telles que le produit des distances de toute tangente à deux points donnés soit constant.

4138. Trouver les courbes telles que l'aire du rectangle construit sur la tangente et la normale en un point quelconque soit égale à l'aire d'un rectangle dont les côtés sont numériquement égaux à l'abscisse et l'ordonnée du point de contact.

4139. Trouver les courbes telles que la somme de la normale et de la sous-normale soit proportionnelle à l'abscisse du point de contact.

4140*. Trouver les courbes telles que les axes de coordonnées interceptent sur toute normale un segment de longueur constante $a$.

4141. La différence entre la vitesse d'un point matériel à une date arbitraire et la vitesse moyenne (du début du mouvement à cette date) est une grandeur directement proportionnelle à l'énergie cinétique de ce point et inversement proportionnelle au temps. Exprimer l'espace en fonction du temps.

### Trajectoires isogonales et orthogonales. Développantes

Trouver les trajectoires orthogonales aux courbes données.

4142. Les ellipses de grand axe $2a$.

4143. Les paraboles $y^2 = 4(x - a)$.

4144. Les cercles $x^2 + y^2 = 2ax$.

4145. Les cissoïdes $(2a - x)y^2 = x^3$.

4146. Les paraboles égales tangentes en leurs sommets à une droite donnée.

4147. Les cercles égaux centrés sur une droite donnée.

4148. Trouver une famille de trajectoires coupant les courbes $x^2 = 2a(y - x\sqrt{3})$ sous un angle $\alpha = 60°$.

4149. Trouver la famille de trajectoires isogonales qui coupent les paraboles $y^2 = 4ax$ sous un angle $\alpha = 45°$.

4150*. Trouver la courbe de propagation du son dans le plan à partir d'une source fixe située dans ce plan sachant qu'un vent de vitesse constante souffle dans toutes les directions.

Trouver les développantes des courbes.

4151. Le cercle $x^2 + y^2 = R^2$.

4152. La chaînette $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$.

4153. La développante du cercle
$$x = a(\cos t + t \sin t),\ y = a(\sin t - t \cos t).$$

4154. La parabole semi-cubique $y = 3t^2$, $x = -2t^3$.

## § 3. Equations du second ordre et d'ordre supérieur

### Cas particuliers d'équations du second ordre

Résoudre les équations.

4155. $y'' = x + \sin x$. 4156. $y'' = \operatorname{arctg} x$. 4157. $y'' = \ln x$.

4158. $xy'' = y'$. 4159. $y'' = y' + x$. 4160. $y'' = \frac{y'}{x} + x$.

4161. $(1 + x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$.

4162. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$. 4163. $(y'')^2 = y'$.

4164. $2xy'y'' = (y')^2 + 1$. 4165. $y'' - 2 \operatorname{ctg} x \cdot y' = \sin^3 x$.

4166. $1 + (y')^2 = 2yy''$. 4167. $(y')^2 + 2yy'' = 0$.

4168. $a^2y'' - y = 0$ 4169. $y'' = \frac{1}{4\sqrt{y}}$.

4170. $y'' + \frac{2}{1-y}(y')^2 = 0$. 4171. $yy'' + (y')^2 = 1$.

4172. $yy'' = (y')^2$. 4173. $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2$.

4174. $y(1 - \ln y)y'' + (1 + \ln y)(y')^2 = 0$.

4175. $y''=2yy'$. 4176. $\cos y\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+\sin y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{dy}{dx}$.

4177. $yy''-(y')^2=y^2y'$. 4178. $yy''-yy'\ln y=(y')^2$.

4179. $y''=y'\left(\frac{y'}{y}-2\sqrt{\frac{y'}{y}-4}\right)$.

4180. $(x+a)\,y''+x\,(y')^2=y'$. 4181*. $yy'y''=(y')^3+(y'')^2$.

4182. $xy''-\frac{1}{4}(y'')^2-y'=0$.

Résoudre les équations moyennant un changement convenable de variables: $yy'=p$, $(y')^2=p$, $xy'=p$, $\frac{y'}{y}=p$, etc.

4183. $xyy''+x\,(y')^2=3yy'$. 4184. $xy''=y'\,(e^y-1)$.

4185. $yy''+(y')^2=x$. 4186. $y''+\frac{y}{x}y'-\frac{y}{x^2}=0$.

4187. $x^2y\frac{d^2y}{dx^2}-\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)^2=0$.

4188. $yy''=y'\,(2\sqrt{yy'}-y')$.

Trouver les solutions particulières des équations satisfaisant aux conditions initiales indiquées.

4189. $y''\,(x^2+1)=2xy'$; $y\,|_{x=0}=1$, $y'\,|_{x=0}=3$.

4190. $xy''+x\,(y')^2-y'=0$ $y\,|_{x=2}=2$, $y'\,|_{x=2}=1$.

4191. $y''=\frac{y'}{x}+\frac{x^2}{y'}$; $y\,|_{x=2}=0$, $y'\,|_{x=2}=4$.

4192. $2y''=3y^2$; $y\,|_{x=-2}=1$, $y'\,|_{x=-2}=-1$.

4193. $yy''=(y')^2-(y')^3$; $y\,|_{x=1}=1$, $y'\,|_{x=1}=-1$.

4194. $y^3y''=-1$; $y\,|_{x=1}=1$, $y'\,|_{x=1}=0$.

4195. $y^4-y^3y''=1$; $y\,|_{x=0}=\sqrt{2}$; $y'\,|_{x=0}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4196. $y''=e^{2y}$; $y\,|_{x=0}=0$, $y'\,|_{x=0}=1$.

4197. $2\,(y')^2=y''\,(y-1)$; $y\,|_{x=1}=2$, $y'\,|_{x=1}=-1$.

4198*. $x^4y''=(y-xy')^3$; $y\,|_{x=1}=1$, $y'\,|_{x=1}=1$.

4199. $y''=xy'+y+1$; $y\,|_{x=0}=1$, $y'\,|_{x=0}=0$.

4200*. Trouver la courbe dont le rayon de courbure en l'un quelconque de ses points est proportionnel à la normale en ce point. Prendre pour coefficient de proportionnalité $k=-1, +1, -2, +2$.

4201. Trouver les courbes dont la projection du rayon de courbure sur l'axe $Oy$ est une grandeur constante $a$.

4202. Trouver les courbes passant par l'origine des coordonnées et telles que le rapport de l'aire du triangle $MTP$ (fig. 70) formé par la tangente en un point quelconque $M$, l'ordonnée $MP$ de ce point et l'axe des abscisses, à l'aire du triangle curviligne $OMP$ soit égal à une grandeur constante $k$ ($k>1/2$).

4203. Trouver la courbe dont la longueur de l'arc mesuré à partir d'un point quelconque est proportionnelle au coefficient angulaire de la tangente à l'extrémité de cet arc.

**4204.** Un point de masse $m$ est lancé verticalement vers le haut à une vitesse initiale $v_0$. La résistance de l'air est $kv^2$. Si l'on prend la verticale pour axe $Oy$ le mouvement du point vers le haut aura pour équation :

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg - kv^2,$$

et vers le bas :

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg + kv^2,$$

où $v = \frac{dy}{dt}$. Trouver la vitesse du point au moment où il touche le sol.

**4205.** Un fil fin inextensible est suspendu horizontalement à ses extrémités. Quelle forme prendra-t-il à l'équilibre sous l'action d'une charge uniformément distribuée sur la projection du fil sur un plan horizontal? (On négligera le poids du fil.)

**4206.** Ecrire l'équation du mouvement rectiligne d'un point matériel de masse $m$ sachant que le travail fourni par la force qui agit dans le sens du mouvement et qui dépend du chemin parcouru est proportionnel au temps écoulé depuis le début du mouvement. Le coefficient de proportionnalité est égal à $k$.

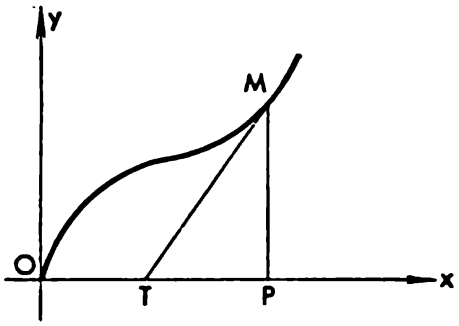

Fig. 70

**4207*.** Un rayon lumineux passe de l'air (indice de réfraction $m_0$) dans un liquide d'indice de réfraction variable en faisant un angle $\alpha_0$ avec la verticale (angle d'incidence). Sachant que l'indice de réfraction du liquide dépend linéairement de la profondeur, qu'il est constant dans tout plan parallèle à l'horizontale, qu'il est égal à $m_1$ à la surface et à $m_2$ à une profondeur $h$, on demande de trouver la forme de ce rayon lumineux dans le liquide. (On rappelle que l'indice de réfraction d'un milieu est inversement proportionnel à la vitesse de propagation de la lumière.)

## Cas particuliers d'équations d'ordre supérieur

Trouver les solutions générales des équations.

**4208.** $y''' = \frac{1}{x}$.

**4209.** $y''' = \cos 2x$.

**4210.** $y^{X} = e^{ax}$.

**4211.** $x^2y''' = (y'')^2$.

**4212.** $yx^{V} = y^{IV}$.

**4213.** $y''' = (y'')^3$.

**4214.** $y'y''' = 3\,(y'')^2$.

**4215.** $yy''' - y'y'' = 0$.

**4216.** $y'''\,[1 + (y')^2] = 3y'\,(y'')^2$.

**4217.** $(y'')^2 - y'y''' = \left(\frac{y'}{x}\right)^2$.

**4218.** Lorsqu'on étudie les oscillations d'un système matériel à un degré de liberté, on rencontre l'équation différentielle $y'' = f_1(x) + f_2(y) + f_3(y')$. Résoudre graphiquement cette équation sachant que

1) $f_1(x) = 0$, $f_2(y) = -\sqrt{y}$, $f_3(y') = 0{,}5y'$ et $y|_{x=0} = y'|_{x=0} = 0$;

2) $f_1(x) = -x$, $f_2(y) = 0$, $f_3(y') = -0{,}1\,y' - 0{,}1\,y'^3$ et $y|_{x=0} = y'|_{x=0} = 1$.

**4219.** $y'' = yy' - x^2$; $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 1$.

1) Résoudre graphiquement cette équation.

2) Développer la solution en série entière en se limitant aux premiers termes.

**4220.** Trouver les six premiers termes du développement en série de la solution de l'équation différentielle $y'' = \frac{y'}{y} - \frac{1}{x}$ vérifiant les conditions initiales $y|_{x=1} = 1$, $y'|_{x=1} = 0$.

**4221.** Trouver sous forme de série entière la solution particulière de l'équation différentielle $y'' = x \sin y'$ vérifiant les conditions initiales $y|_{x=1} = 0$, $y'|_{x=1} = \frac{\pi}{2}$. (On se limitera aux six premiers termes.)

**4222.** Trouver sous forme de série entière la solution particulière $y = f(x)$ de l'équation $y'' = xyy'$ satisfaisant aux conditions initiales $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$. Peut-on se limiter aux cinq premiers termes du développement pour calculer $f(-0{,}5)$ à 0,001 près?

**4223.** Trouver les sept premiers termes du développement en série entière de la solution de l'équation différentielle $yy'' + y' + y = 0$ satisfaisant aux conditions initiales $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 0$. Déterminer l'ordre de petitesse de la différence $y - (2 - x - e^{-x})$ lorsque $x \to 0$.

**4224.** Trouver les 12 premiers termes du développement en série entière de la solution de l'équation différentielle $y'' + yy' - 2 = 0$ satisfaisant aux conditions initiales $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 0$. Calculer l'intégrale $\int_0^1 y\,dx$ à 0,001 près. Calculer $y'|_{x=0,5}$ à 0,00001 près.

**4225*.** Un circuit électrique comprend en série une inductance $L = 0{,}4$ H et un voltamètre. L'électrolyte est un litre d'eau légèrement additionnée d'acide sulfurique. L'eau est décomposée par le courant, ce qui modifie la concentration et partant la résistance de la solution. La tension aux bornes est maintenue constante et égale à 20 V. La masse de l'électrolyte décomposé est proportionnelle à l'intensité du courant, au temps et à l'équivalent électrochimique (loi de Faraday). L'équivalent électrochimique de l'eau est égal à 0,000187 g/C. La résistance initiale de la solution étant $R_0 = 2$ ohms et l'intensité initiale 10 A, exprimer sous forme

d'une série entière et en fonction du temps le volume d'eau dans le voltamètre.

**4226*.** Un circuit électrique comprend en série une inductance $L = 0{,}4$ H et un voltamètre de résistance initiale 2 ohms. L'électrolyte est constitué d'un litre d'eau dans lequel on a dissous 10 g d'acide chlorhydrique. L'acide est décomposé par le courant, ce qui modifie la concentration de l'électrolyte (cf. exercice précédent où c'était le volume du solvant qui était variable et non la masse de la matière dissoute). La tension aux bornes étant de 20 V, l'équivalent électrochimique $k$ de l'acide chlorhydrique de 0,000381 g/C et l'intensité initiale de 10 A, exprimer sous forme d'une série entière et en fonction du temps la masse d'acide chlorhydrique contenue dans l'électrolyte.

## § 4. Equations linéaires

**4227.** Les fonctions $x^3$ et $x^4$ sont solutions d'une équation différentielle homogène et linéaire de deuxième ordre. Vérifier qu'elles forment un système fondamental. Trouver cette équation.

**4228.** Même problème pour les fonctions $e^x$ et $x^2e^x$.

**4229.** Les fonctions $x$, $x^3$, $e^x$ forment un système fondamental de solutions d'une équation différentielle homogène et linéaire de troisième ordre. Trouver cette équation.

**4230.** Les fonctions $x^2$ et $x^3$ forment un système fondamental de solutions d'une équation différentielle homogène et linéaire de second ordre. Trouver la solution de cette équation qui satisfait aux conditions initiales $y\,|_{x=1} = 1$, $y'\,|_{x=1} = 0$.

**4231.** Les fonctions $\cos^2 x$ et $\sin^2 x$ sont solutions d'une équation différentielle linéaire et homogène du second ordre:

a) vérifier qu'elles constituent un système fondamental de solutions;

b) écrire cette équation;

c) montrer que les fonctions 1 et $\cos 2x$ constituent également un système fondamental.

**4232*.** Si $y_1$ est solution particulière de l'équation

$$y'' + y'P(x) + yQ(x) = 0,$$

alors

$$y_2 = Cy_1 \int e^{-\int P(x)dx} \cdot \frac{dx}{y_1^2} \quad (C \text{ est une constante})$$

l'est également. Montrer cela de trois manières:

1) par une vérification immédiate, 2) par le changement $y = y_1 z$; 3) à l'aide de la formule d'Ostrogradski.

**4233.** Appliquer la formule de l'exercice 4322 à la recherche de la solution générale de l'équation $(1 - x^2)\,y'' - 2xy' + 2y = 0$ sachant qu'une solution particulière est $y_1 = x$.

**4234.** Intégrer l'équation $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$ sachant qu'une solution particulière est $y_1 = \frac{\sin x}{x}$.

4235. L'équation $(2x - x^2)\, y'' + (x^2 - 2)\, y' + 2\,(1 - x)\, y = 0$ admet la solution $y = e^x$. Trouver la solution de cette équation qui satisfait les conditions initiales $y\,|_{x=1} = 0$, $y'\,|_{x=1} = 1$.

4236*. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $y'' + y'\,P(x) - yQ(x) = 0$ possède deux solutions $y_1$ et $y_2$ linéairement indépendantes telles que $y_1 y_2 = 1$.

4237*. Trouver la solution générale de l'équation

$$(1 - x^2)\, y'' - xy' + 9y = 0$$

sachant qu'elle admet pour solution particulière un polynôme du troisième degré.

Dans les exercices 4238-4240 choisir une solution particulière (distincte de la triviale) puis trouver les solutions générales des équations.

4238. $y'' - \operatorname{tg} x \cdot y' + 2y = 0$.

4239. $y'' - y' + \frac{y}{x} = 0$.

4240. $y'' - \frac{2x}{x^2+1}\, y' + \frac{2y}{x^2+1} = 0$.

4241. Trouver la solution générale de l'équation

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$$

sachant que $y_1 = x$ et $y_2 = x^2$ sont des solutions particulières.

Trouver les solutions générales des équations non homogènes.

4242. $x^2 y'' - xy' + y = 4x^3$.

4243. $y'' - \frac{x}{x-1}\, y' + \frac{1}{x-1}\, y = x - 1$.

4244. $(3x + 2x^2)\, y'' - 6\,(1 + x)\, y' + 6y = 6$.

4245. L'équation $(1 + x^2)\, y'' + 2xy' - 2y = 4x^2 + 2$ admet $y = x^2$ pour solution particulière. Trouver la solution de cette équation qui satisfait les conditions $y\,|_{x=-1} = 0$, $y'\,|_{x=-1} = 0$.

---

4246. Trouver les six premiers termes du développement en série entière de la solution de l'équation différentielle $y'' - (1 + x^2)\, y = 0$ qui satisfait les conditions initiales $y\,|_{x=0} = -2$, $y'\,|_{x=0} = 2$.

4247. Trouver les neuf premiers termes du développement en série entière de la solution de l'équation différentielle $y'' = x^2 y - y'$ qui satisfait aux conditions initiales $y\,|_{x=0} = 1$, $y'\,|_{x=0} = 0$.

4248. Représenter par une série entière la solution particulière de l'équation $y'' - xy' + y - 1 = 0$; $y\,|_{x=0} = 0$, $y'\,|_{x=0} = 0$.

4249. Représenter par une série entière la solution générale de l'équation $y'' = y \cdot e^x$. (Se limiter aux six premiers termes.)

4250. Représenter par une série entière la solution générale de l'équation $y'' + xy' - x^2 y = 0$. (On se limitera aux six premiers termes.)

Trouver les solutions générales des équations.

4251. $y'' + y' - 2y = 0$. 4252. $y'' - 9y = 0$.

4253. $y'' - 4y' = 0$. 4254. $y'' - 2y' - y = 0$.

4255. $3y'' - 2y' - 8y = 0$. 4256. $y'' + y = 0$.

4257. $y'' + 6y' + 13y = 0$. 4258. $4y'' - 8y' + 5y = 0$.

4259. $y'' - 2y' + y = 0$. 4260. $4\frac{d^2x}{dt^2} - 20\frac{dx}{dt} + 25x = 0$.

4261. $2y'' + y' + 2\sin^2 15^\circ \cos^2 15^\circ \cdot y = 0$.

Intégrer les équations suivantes.

4262. $y'' - 4y' + 3y = 0$; $y|_{x=0} = 6$, $y'|_{x=0} = 10$.

4263. $y'' + 4y' + 29y = 0$; $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 15$.

4264. $4y'' + 4y' + y = 0$; $y|_{x=0} = 2$, $y'|_{x=0} = 0$.

4265. Soit $y_1 = e^{mx}$ une solution particulière d'une équation différentielle linéaire et homogène du second ordre à coefficients constants. Sachant que le discriminant de l'équation caractéristique correspondante est nul, trouver la solution particulière de cette équation différentielle qui est égale à 1 avec sa dérivée pour $x = 0$.

4266. Trouver la courbe intégrale de l'équation $y'' + 9y = 0$ qui passe par le point $M(\pi, -1)$ et qui est tangente en ce point à la droite $y + 1 = x - \pi$.

4267. Trouver la courbe intégrale de l'équation $y'' + ky = 0$ qui passe par le point $M(x_0, y_0)$ et qui est tangente en ce point à la droite $y - y_0 = a(x - x_0)$.

Composer les solutions générales des équations non homogènes en trouvant leurs solutions particulières soit par tâtonnement soit par la méthode de variation des constantes arbitraires.

4268. $2y'' + y' - y = 2e^x$. 4269. $y'' + a^2y = e^x$.

4270. $y'' - 7y' + 6y = \sin x$. 4271. $y'' + 2y' + 5y = -\frac{17}{2}\cos 2x$.

4272. $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$.

4273. $y'' - 2y' + 2y = 2x$. 4274. $y'' + 4y' - 5y = 1$.

4275. $y'' - 3y' + 2y = f(x)$, si $f(x)$ est égale à:

1) $10e^{-x}$; 2) $3e^{2x}$; 3) $2\sin x$; 4) $2x^3 - 30$;

5) $2e^x \cos\frac{x}{2}$; 6) $x - e^{-2x} + 1$; 7) $e^x(3 - 4x)$; 8) $3x + 5\sin 2x$;

9) $2e^x - e^{-2x}$; 10) $\sin x \sin 2x$; 11) $\operatorname{sh} x$.

4276. $2y'' + 5y' = f(x)$, si $f(x)$ est égale à:

1) $5x^2 - 2x - 1$; 2) $e^x$; 3) $29\cos x$; 4) $\cos^2 x$;

5) $0{,}1\ e^{-2{,}5x} - 25\sin 2{,}5x$; 6) $29x\sin x$; 7) $100x \cdot e^{-x}\cos x$;

8) $3 \cdot \operatorname{ch}\frac{5}{2}x$.

**4277.** $y'' - 4y' + 4y = f(x)$, si $f(x)$ est égale à:
1) 1; 2) $e^{-x}$; 3) $3e^{2x}$; 4) $2(\sin 2x + x)$; 5) $\sin x \cos 2x$;
6) $\sin^3 x$; 7) $8(x^2 + e^{2x} + \sin 2x)$; 8) $\operatorname{sh} 2x$; 9) $\operatorname{sh} x + \sin x$;
10) $e^x - \operatorname{sh}(x-1)$.

**4278.** $y'' + y = f(x)$, si $f(x)$ est égale à:
1) $2x^3 - x + 2$; 2) $-8\cos 3x$; 3) $\cos x$; 4) $\sin x - 2e^{-x}$;
5) $\cos x \cos 2x$; 6) $24 \sin^4 x$; 7) $\operatorname{ch} x$.

**4279.** $5y'' - 6y' + 5y = f(x)$, si $f(x)$ est égale à:
1) $5e^{\frac{3}{5}x}$; 2) $\sin\frac{4}{5}x$; 3) $e^{2x} + 2x^3 - x + 2$; 4) $e^{\frac{3}{5}x}\cdot\cos x$;
5) $e^{\frac{3}{5}x}\cdot\sin\frac{4}{5}x$; 6) $13\, e^x\cdot\operatorname{ch} x$.

**4280.** $y'' + y + \operatorname{ctg}^2 x = 0$. **4281.** $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1}$.

**4282.** $y'' - y' = f(x)$, si $f(x)$ est égale à:
1) $\frac{e^x}{1+e^x}$; 2) $e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}$; 3) $e^{2x}\cos e^x$.

Trouver les solutions particulières des équations satisfaisant les conditions initiales indiquées.

**4283.** $4y'' + 16y' + 15y = 4e^{-\frac{3}{2}x}$; $y|_{x=0} = 3$, $y'|_{x=0} = -5{,}5$.

**4284.** $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6$; $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 3{,}2$.

**4285.** $y'' - y' = 2(1-x)$; $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 1$.

**4286.** $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3)$; $y|_{x=0} = 2$, $y'|_{x=0} = 2$.

**4287.** $y'' + y + \sin 2x = 0$; $y|_{x=\pi} = y'|_{x=\pi} = 1$.

**4288*.** Montrer que l'équation $a_0y'' + a_1y' + a_2y = Ae^{px}$ ($a_0$, $a_1$, $a_2$ sont des coefficients constants, $p$ et $A$ des nombres réels ou complexes) admet une solution particulière de la forme $\bar{y} = \frac{A}{\varphi(p)}e^{px}$ si $p$ n'est pas racine de l'équation caractéristique $\varphi(r) \equiv a_0r^2 + a_1r + a_2 = 0$; $\bar{y} = \frac{Ax}{\varphi'(p)}e^{px}$ si $p$ est une racine simple et enfin $\bar{y} = \frac{Ax^2}{\varphi''(p)}e^{px}$ si $p$ est une racine double.

Trouver les solutions générales des équations d'Euler.

**4289.** $x^2y'' - 9xy' + 21y = 0$. **4290.** $x^2y'' + xy' + y = x$.

**4291.** $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{2}{x}$.

**4292.** $x^2y'' - 2xy' + 2y + x - 2x^3 = 0$.

**4293.** Si l'axe de l'arbre d'une turbine se trouve dans une position horizontale et si le centre de gravité du disque qui est monté sur cet arbre n'est pas situé sur l'axe, alors la déformation $y$ de l'axe de l'arbre (fig. 71) lorsque celui-ci est en rotation satisfait l'équation

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{1}{m\alpha} - \omega^2\right)y = g\cos\omega t + \omega^2 e,$$

où $m$ est la masse du disque, $\alpha$ un nombre constant dépendant du mode de fixation des extrémités $A$ et $B$; $\omega$ la vitesse angulaire, $e$ l'excentricité du centre de gravité du disque. Trouver l'intégrale générale de cette équation.

**4294.** Un point matériel de masse 1 g est éloigné d'un centre, le long d'une droite, par une force proportionnelle à la distance qui la sépare de ce centre (coefficient de proportionnalité : 4). La résistance du milieu est proportionnelle à la vitesse du mouvement (coefficient de proportionnalité: 3). Ecrire l'équation de ce mouvement sachant qu'à l'instant initial le point est à 1 cm du centre et que sa vitesse est nulle.

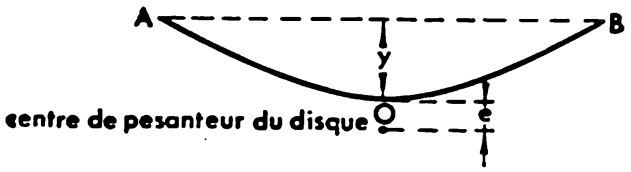

Fig. 71

**4295.** Une particule de masse 1g se déplace sur une ligne droite vers un point $A$ sous l'action d'une force d'attraction qui est proportionnelle à la distance qui la sépare du point $A$. A 1 cm de $A$ cette force est de 0,1 dyne. La résistance du milieu est proportionnelle à la vitesse et est égale à 0,4 dyne pour une vitesse de 1 cm/s. A l'instant $t = 0$ la particule se trouve à 10 cm du point $A$ et sa vitesse est nulle. Exprimer la distance en fonction du temps et calculer cette distance pour $t = 3$s (à 0,01 cm près).

**4296.** Un point matériel de masse $m$ se déplace sur une ligne droite de $A$ en $B$ sous l'action d'une force constante $F$. La résistance du milieu est proportionnelle à la distance du point matériel au point $B$ et à l'instant initial (i.e. au point $A$) est égale à $f$ ($f < F$). Sachant que la vitesse initiale du point est nulle, trouver le temps qu'il mettra pour aller de $A$ en $B$. ($AB = a$).

**4297.** Un corps de masse 200 g est suspendu à un ressort. On tire ce ressort de 2 cm puis on le relâche (sans vitesse initiale). Ecrire l'équation du mouvement du corps en supposant que la résistance du milieu est proportionnelle à la vitesse. Si le corps se déplace à une vitesse de 1 cm/s la force de résistance est de 0,1 gf; la tension du ressort lorsqu'on l'allonge de 2 cm est de 10 kgf. On néglige le poids du ressort.

**4298.** Un billot cylindrique en bois ($S = 100$ cm$^2$, $h = 20$ cm, $\gamma = 0{,}5$ g/cm$^3$) est entièrement plongé dans l'eau puis lâché sans vitesse initiale. Sachant que la force de frottement est proportionnelle à la hauteur immergée, déterminer le coefficient de proportionnalité $k$ pour que le billot émerge de moitié à la première émersion.

Trouver la durée ($t_1$) de la première émersion.

Ecrire l'équation de la première émersion.

**4299*.** Un tube long et étroit tourne horizontalement à une vitesse angulaire constante $\omega$ autour d'un axe vertical. A l'instant initial, à une distance $a_0$ de l'axe et à l'intérieur du tube se trouve une boule de masse $m$. Ecrire l'équation du mouvement de la boule par rapport au tube sachant que sa vitesse initiale par rapport au tube est nulle.

**4300.** Résoudre le problème précédent en supposant que la boule est fixée au point $O$ d'un ressort. L'action du ressort sur la boule est proportionnelle à la déformation du ressort, une force de $k$ dynes provoquant un allongement de 1 cm. La longueur du ressort au repos est $a_0$ cm.

### Equations d'ordre supérieur

Trouver les solutions générales des équations.

**4301.** $y''' + 9y' = 0$.

**4302.** $y^{(IV)} - 13y'' + 36y = 0$.

**4303.** $y^{(IV)} = 8y'' - 16y$.

**4304.** $y^{(IV)} = 16y$.

**4305.** $y''' - 13y' - 12y = 0$.

**4306.** $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

**4307.** $y^{(IV)} + 2y''' + y'' = 0$.

**4308.** $y^{(n)} = y^{(n-2)}$.

**4309.** $y^{(IV)} + y = 0$.

**4310.** $64y^{(VIII)} + 48y^{(VI)} + 12y^{(IV)} + y'' = 0$.

**4311.** $y^{(n)} + \frac{n}{1} y^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} y^{(n-2)} + \ldots + \frac{n}{1} y' + y = 0$.

**4312.** $y''' = -y'$; $y|_{x=0} = 2$, $y'|_{x=0} = 0$, $y''|_{x=0} = -1$.

**4313.** $y^{(V)} = y'$; $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 1$, $y''|_{x=0} = 0$,

$$y'''|_{x=0} = 1, \quad y^{(IV)}|_{x=0} = 2.$$

Trouver les solutions générales des équations non homogènes. On choisira les solutions particulières soit par tâtonnement soit par la méthode de variation des constantes arbitraires.

**4314.** $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3$.

**4315.** $y''' - 3y' + 2y = e^{-x}(4x^2 + 4x - 10)$.

**4316.** $y^{(IV)} + 8y'' + 16y = \cos x$.

**4317.** $y^{(IV)} + 2a^2y'' + a^4y = \cos ax$.

**4318.** $y^{(V)} + y''' = x^2 - 1$.

**4319.** $y^{(IV)} - y = xe^x + \cos x$.

**4320.** $y^{(IV)} - 2y'' + y = 8(e^x + e^{-x}) + 4(\sin x + \cos x)$.

**4321.** $y''' + 2y'' + y' + 2e^{-2x} = 0$; $y|_{x=0} = 2$, $y'|_{x=0} = 1$, $y''|_{x=0} = 1$.

**4322.** $y''' - y' = 3(2 - x^2)$; $y|_{x=0} = y'|_{x=0} = y''|_{x=0} = 1$.

**4323.** Intégrer l'équation d'Euler: $x^3y''' + xy' - y = 0$.

## § 5. Systèmes d'équations différentielles

**4324.1.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 7x, \\ \dfrac{dy}{dt} + 2x + 5y = 0. \end{cases}$

**4324.2.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$

4324.3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$

4324.4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x - y. \end{cases}$

4324.5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y - z, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x - z. \end{cases}$

4324.6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 4x - y + 4z \end{cases}$

(Les racines de l'équation caractéristique sont $r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 5$).

4324.7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 2y + 3z - x \end{cases}$

(Les racines de l'équation caractéristique sont $r_1 = 2$, $r_{2,3} = 3 \pm i$).

4325. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + e^t + e^{-t}. \end{cases}$

4326. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y - 5x + e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 6y + e^{-2t}. \end{cases}$

4327. $\begin{cases} yzy' = x \left(y' = \dfrac{dy}{dx}\right), \\ y^2z' = x \left(z' = \dfrac{dz}{dx}\right). \end{cases}$

4328. $\begin{cases} y' = \dfrac{x+y}{z}, \\ z' = \dfrac{x-y}{y}. \end{cases}$

4329. $\begin{cases} xy' = y, \\ xzz' + x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$

4330. $\begin{cases} y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2 - z^2}, \\ z' = \dfrac{2xz}{x^2 - y^2 - z^2}. \end{cases}$

4331. $\begin{cases} z = y'(z-y)^2, \\ y = z'(z-y)^2. \end{cases}$

4332. $\begin{cases} 4\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} + 3x = \sin t, \\ \dfrac{dx}{dt} + y = \cos t, \end{cases}$

4333. $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} = x, \\ \dfrac{d^2x}{dt^2} = y. \end{cases}$

4334. $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} + x = e^t, \\ \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{d^2y}{dt^2} = 1. \end{cases}$

4335. $\dfrac{dx}{z-y} = \dfrac{dy}{x-z} = \dfrac{dz}{y-x}.$

Trouver les solutions particulières des systèmes d'équations différentielles satisfaisant les conditions initiales indiquées page 282.

4336. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 - yz}{x^2 - yz}, & y|_{x=0} = 1; \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z(x+y)}{x^2 - yz}, & z|_{x=0} = -1. \end{cases}$

4337. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 - \dfrac{2x}{t}, & x|_{t=1} = \dfrac{1}{3}; \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - 1 + \dfrac{2x}{t}, & y|_{t=1} = -\dfrac{1}{3}. \end{cases}$

4338. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = z + y - x, \\ \dfrac{dy}{dt} = z + x - y, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y + z, \end{cases} \quad \begin{array}{l} x|_{t=0} = 1; \\ y|_{t=0} = z|_{t=0} = 0. \end{array}$

4339. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z, & x|_{t=0} = -1; \\ \dfrac{dy}{dt} = z + x, & y|_{t=0} = 1; \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y, & z|_{t=0} = 0. \end{cases}$

4340. Trouver deux courbes telles que : a) les tangentes aux points de même abscisse se coupent sur l'axe des ordonnées ; b) les normales aux points de même abscisse se coupent sur l'axe des abscisses ; c) l'une d'elles passe par le point (1, 1) et l'autre par le point (1, 2).

4341. Soient deux courbes dont l'une $y = f(x)$ passe par le point (0, 1), l'autre $y = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ par le point (0, 1/2). Les tangentes à ces courbes aux points de mêmes abscisses se coupent sur l'axe des abscisses. Trouver la courbe $y = f(x)$.

4342. Trouver une courbe gauche passant le point (0, 1, 1) telle que

a) le lieu géométrique de la trace de la tangente sur le plan $Oxy$ lorsque le point de contact décrit cette courbe soit la bissectrice de l'angle $(Ox, Oy)$,

b) la distance de cette trace à l'origine des coordonnées soit égale à la coordonnée $z$ du point de contact.

4343. Deux boules de masse $m$ sont reliées par un ressort de masse négligeable (dont l'allongemet est proportionnel à la force d'extension). Au repos la longueur du ressort est $l_0$. On le tire jusqu'à la longueur $l_1$, puis à l'instant $t = 0$ les deux boules qui sont situées à la verticale l'une de l'autre sont lâchées (on néglige la résistance du milieu). Trouver le temps $T$ nécessaire au ressort pour reprendre sa longueur $l_0$. Ecrire l'équation du mouvement de chaque boule.

**4344.** Un tube horizontal tourne autour d'un axe vertical à raison de 2 radians par seconde. Ce tube renferme deux boules de 300g et 200g reliées par un ressort au repos, de masse négligeable, long de 10 cm, la boule la plus lourde étant la plus éloignée de l'axe de rotation. Une force de 0,24 N allonge le ressort de 1 cm, quant au centre de gravité du système formé par les boules, il se trouve à 10 cm de l'axe de rotation. Les boules sont maintenues dans cet état par un mécanisme. Celui-ci cessant d'agir à l'instant $t = 0$, les deux boules se mettent en mouvement. Ecrire l'équation du mouvement de chaque boule par rapport au tube (on négligera la force de frottement).

**4345.** La vitesse de croissance d'une culture de micro-organismes est proportionnelle à leur nombre et à la quantité de matière nutritive (le coefficient de proportionnalité est $k$). La matière nutritive diminue à une vitesse proportionnelle au nombre de micro-organismes existant (le coefficient de proportionnalité est égal à $k_1$). Au début de l'expérience le récipient renfermait $A_0$ micro-organismes et une quantité $B_0$ de matière nutritive. Exprimer le nombre $A$ de micro-organismes et la quantité $B$ de matière nutritive en fonction du temps ($k > 0$, $k_1 > 0$).

**4346*.** Supposons que les bactéries se reproduisent à une vitesse proportionnelle à leur nombre (coefficient de proportionnalité : $a$) et qu'en même temps elles secrètent un poison qui les détruit à une vitesse proportionnelle à la quantité de poison et au nombre de bactéries (coefficient de proportionnalité : $b$). Supposons par ailleurs que la vitesse de secrétion du poison est proportionnelle au nombre de bactéries (coefficiet de proportionnalité : $c$). Le nombre de bactéries croît jusqu'à une valeur maximale, puis décroît et tend vers 0. Montrer que le nombre $N$ de bactéries est donné en fonction du temps par la formule

$$N = \frac{4M}{(e^{kt} + e^{-kt})^2},$$

où $M$ est le nombre maximal de bactéries et le temps $t$ mesuré à partir du moment où $N = M$, $k$ étant une constante.

**4347.** Deux cylindres, dont les bases sont situées dans un même plan, communiquent entre eux par un tube en caoutchouc et sont remplis de liquide jusqu'à des hauteurs différentes $H_1$ et $H_2$. Le tube est traversé dans l'unité de temps par un volume de liquide proportionnel à la différence de niveau, i.e. égal à $\alpha \cdot (h_1 - h_2)$, où $\alpha$ est le coefficient de proportionnalité. Trouver la loi de variation de la hauteur de liquide dans les cylindres sachant que leurs sections transversales sont respectivement $S_1$ et $S_2$.

## § 6. Problèmes numériques

**4348.** 1 kg d'eau de chaleur spécifique constante et de température initiale $\theta_0$ est chauffé par un appareil de chauffage de résistance électrique $R$ dépendant linéairement de la température $\theta$ : $R =$

$= R_0 (1 + 0{,}004\,\theta)$, où $R_0$ est la résistance à 0 °C (cette loi est valable pour la plupart des métaux purs). On néglige les pertes de chaleur.

Exprimer la température $\theta$ en fonction du temps $t$ dans l'intervalle $[0, T]$ sachant que

1) la tension $E$ varie uniformément et qu'elle passe de $E = 0$ à $E = E_1$ en l'espace de $T$ s. Calculer à 1° près de combien s'est élevée la température de l'eau à la fin de la 10-ème minute. $\theta_0 = 0°$, $E_1 = 110$ V, $R_0 = 10$ ohms et $T = 10$mn;

2) la tension varie suivant la loi $E = E_0 \sin 100\pi t$. Calculer à 1° près de combien s'est élevée la température à la fin de la 10-ème minute. $\theta_0 = 0°$, $E_0 = 110$ V et $R_0 = 10$ ohms.

**4349.** Un litre d'eau est chauffé par une résistance électrique de 24 ohms. L'eau cède une partie de sa chaleur au milieu ambiant dont la température est de 20 °C (la vitesse de refroidissement est proportionnelle à la différence de température de l'eau et du milieu). On sait que si l'on coupe le courant, la température de l'eau passera de 40° à 30° en 10 mn. La température initiale de l'eau est de 20 °C. Quelle est la température de l'eau au bout de 10 mn si:

1) la tension $E$ passe uniformément de $E_0 = 0$ à $E_1 = 120$ V en l'espace de 10 mn. Précision des calculs: 0,1°;

2) le courant est alternatif et la tension varie d'après la formule $E = 110 \sin 100\pi t$? Précision des calculs: 0,1°.

**4350.** Soit l'équation $y' = \frac{x}{y} - x^2$. Dresser le tableau de valeurs de la solution satisfaisant à la condition initiale $y|_{x=1} = 1$, en faisant varier $x$ de 1 à 1,5 par valeurs de 0,05. Précision des calculs: 0,001.

**4351.** Calculer pour $x = 1$ la valeur de la solution particulière de l'équation $y' = y + x$ satisfaisant la condition initiale $y|_{x=0} = 1$. Calculer les 5 premières approximations $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$, $y_5$ (à 0,0001 près) par la méthode des approximations successives. Comparer les résultats obtenus.

**4352.** On sait que l'intégrale $\int e^{-x^2}\,dx$ ne se calcule pas sous forme finie à l'aide de fonctions élémentaires. Se servir du fait que la fonction $y = e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ est solution de l'équation $y' = 2xy + 1$ pour calculer $\int_0^{0,5} e^{-x^2}\,dx$. Utiliser la méthode des approximations successives en se limitant aux cinq premières approximations. Comparer ce résultat avec celui obtenu avec la règle de Simpson.

**4353.** $y = f(x)$ est la solution de l'équation différentielle $y' = y^2 - x$ satisfaisant à la condition initiale $y|_{x=0} = 1$. Trouver par la méthode des approximations successives la quatrième approximation ($y_4$) en se limitant à un nombre de termes suffisant pour

calculer $y_4$ (0,3) à 0,001 près. Trouver ensuite quelques premiers termes du développement en série entière de la fonction $f(x)$ ; calculer $f$ (0,3) à 0,001 près et considérant cette valeur comme plus exacte évaluer l'erreur commise sur $y_4$ (0,3).

**4354.** $y = f(x)$ est la solution de l'équation différentielle $y'' = \frac{y'}{y} - \frac{1}{x}$ qui satisfait les conditions initiales $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 0$. Calculer $f$ (1,6) à 0,001 près.

**4355*.** $y = f(x)$ est la solution de l'équation différentielle $y'' = y' - y + x$ satisfaisant les conditions initiales $y|_{x=1}=1$, $y'|_{x=1} = 0$. Trouver $f$ (1,21) à 0,000001 près.

**4356*.** $y = f(x)$ est la solution de l'équation différentielle $y'' = xy' - y + e^x$ satisfaisant les conditions initiales $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 0$. Calculer $f$ (1/2) à 0,0001 près.

**4357.** Soit une courbe d'équation $y = f(x)$. Développer la fonction $f(x)$ en série sachant qu'elle est solution de l'équation différentielle $y'' = xy$ avec les conditions initiales $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 1$. Calculer à 0,0001 près la courbure de cette courbe au point d'abscisse 1.

# CHAPITRE XV

# SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES

## § 1. Polynômes trigonométriques

**4358.** Se servir des formules d'Euler $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ pour montrer que les fonctions $\sin^n x$ et $\cos^n x$ peuvent être représentées par des polynômes trigonométriques d'ordre $n$.

**4359.** Démontrer les relations

$$\int_0^{2\pi} \sin^n x \cos mx\, dx = \int_0^{2\pi} \sin^n x \sin mx\, dx = \int_0^{2\pi} \cos^n x \cos mx\, dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^n x \sin mx\, dx = 0 \text{ si } m > n \text{ } (m \text{ et } n \text{ sont entiers}).$$

**4360.** Montrer que tout polynôme trigonométrique d'ordre $n$ composé uniquement de cosinus peut être mis sous la forme $P(\cos \varphi)$, où $P(x)$ est un polynôme de degré $n$ en $x$.

**4361.** Se servir des formules d'Euler (voir exercice 4358) pour démontrer la relation

$$\cos \varphi + \cos 2\varphi + \ldots + \cos n\varphi = \frac{\sin \frac{n\varphi}{2} \cos \frac{(n+1)\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}}.$$

**4362.** Démontrer les relations :

1) $\cos \varphi + \cos 3\varphi + \ldots + \cos (2n-1)\varphi = \frac{\sin 2n\varphi}{2 \sin \varphi}$ ;

2) $\sin \varphi + \sin 2\varphi + \ldots + \sin n\varphi = \frac{\sin \frac{n\varphi}{2} \sin \frac{(n+1)\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}}$.

**4363.** Trouver les zéros des polynômes trignométriques

$$\sin \varphi + \sin 2\varphi + \ldots + \sin n\varphi$$

et

$$\cos \varphi + \cos 2\varphi + \ldots + \cos n\varphi$$

dans l'intervalle $[0, 2\pi]$.

**4364.** Montrer que le polynôme trigonométrique

$$\sin\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2}+\ldots+\frac{\sin n\varphi}{n}$$

possède dans l'intervalle $[0, \pi]$ des maximums aux points $\frac{\pi}{n+1}$, $3\frac{\pi}{n+1}$, ..., $(2q-1)\frac{\pi}{n+1}$ et des minimums aux points $\frac{2\pi}{n}$, $2\cdot\frac{2\pi}{n}$, ..., $(q-1)\frac{2\pi}{n}$, où $q=\frac{n}{2}$ si $n$ est pair et $q=\frac{n+1}{2}$ si $n$ est impair.

**4365*.** Montrer que le polynôme trigonométrique sans terme libre

$$\Phi_n(\varphi) = a_1\cos\varphi + b_1\sin\varphi + \ldots + a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi$$

non identiquement nul ne peut pas conserver le même signe pour tous les $\varphi$.

## § 2. Séries de Fourier

**4366.** Vérifier que la fonction $y = x^3\sin\frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $y = 0$ pour $x = 0$ dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$ est continue avec sa dérivée première, mais qu'elle ne remplit pas les conditions du théorème de Dirichlet. Peut-on la développer en série de Fourier dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$?

Dans les exercices 4367-4371 on suppose que la fonction $f(x)$ est continue.

**4367.** La fonction $f(x)$ vérifie la condition

$$f(x+\pi) = -f(x).$$

Montrer que tous ses coefficients pairs de Fourier sont nuls (i.e. $a_0 = a_2 = b_2 = a_4 = b_4 = \ldots = 0$).

**4368.** La fonction $f(x)$ satisfait la condition

$$f(x+\pi) = f(x).$$

Montrer que tous ses coefficients impairs de Fourier sont nuls.

**4369.** La fonction $f(x)$ satisfait les conditions $f(-x) = f(x)$ et $f(x+\pi) = -f(x)$.
Montrer que $b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = 0$ et $a_0 = a_2 = a_4 = \ldots = 0$.

**4370.** La fonction $f(x)$ satisfait les conditions

$$f(-x) = -f(x) \text{ et } f(x+\pi) = -f(x).$$

Montrer que $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = 0$ et $b_2 = b_4 = b_6 = \ldots = 0$.

**4371.** La fonction $f(x)$ satisfait les conditions:

a) $f(-x) = f(x)$ et $f(x+\pi) = f(x)$;

b) $f(-x) = -f(x)$ et $f(x+\pi) = f(x)$.

Trouver les coefficients nuls de Fourier.

**4372.** Développer en série de Fourier une fonction égale à $-1$ dans l'intervalle $]-\pi, 0[$ et à 1 dans l'intervalle $]0, \pi[$.

**4373.** Développer la fonction $y = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ en une série de sinus dans l'intervalle $]0, \pi[$.

**4374.** Appliquer les résultats des exercices 4372 et 4373 au développement en série des fonctions $y = x$ et $y = \frac{\pi - x}{2}$. Indiquer les intervalles de validité des formules obtenues.

**4375.** Développer la fonction $y = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ en une série de cosinus dans l'intervalle $]0, \pi[$.

**4376.** Développer la fonction $y = x^2$ en une série de Fourier: 1) dans l'intervalle $]-\pi, \pi[$; 2) dans l'intervalle $]0, 2\pi[$ (fig. 72 et 73).

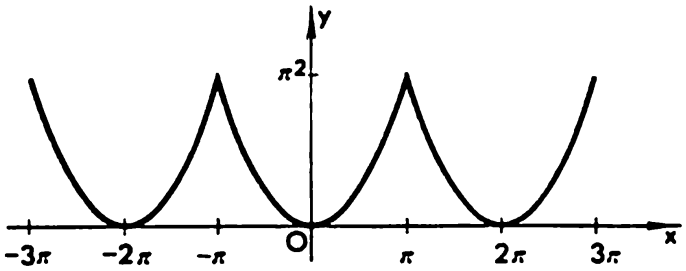


Fig. 72

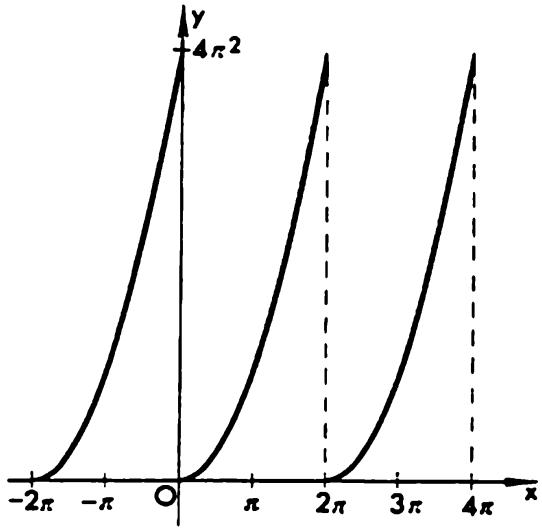


Fig. 73

Appliquer les développements obtenus au calcul des sommes des séries:

$$S_1 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots,$$

$$S_2 = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} + \ldots,$$

$$S_3 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \ldots$$

Développer les fonctions données en séries de Fourier dans les intervalles mentionnés.

**4377.** La fonction $y = x^2$ dans l'intervalle $]0, \pi[$ en série de sinus.

**4378.** La fonction $y = x^3$ dans l'intervalle $]-\pi, \pi[$.

**4379.** La fonction $f(x)$ égale à 1 pour $-\pi < x < 0$ et à 3 pour $0 < x < \pi$.

**4380.** La fonction $f(x)$ égale à 1 dans l'intervalle $]0, h[$ et à 0 dans l'intervalle $]h, \pi[$, en série de cosinus.

**4381.** La fonction continue $f(x)$ égale à 1 pour $x = 0$, à 0 dans l'intervalle $]2h, \pi[$ et linéaire dans l'intervalle $]0, 2h[$, en série de cosinus $\left(0 < h < \frac{\pi}{2}\right)$.

**4382.** La fonction $y = |x|$ dans l'intervalle $]-l, l[$.

**4383.** La fonction $y = e^x - 1$ dans l'intervalle $]0, 2\pi[$.

**4384.** La fonction $y = e^x$ dans l'intervalle $]-l, l[$.

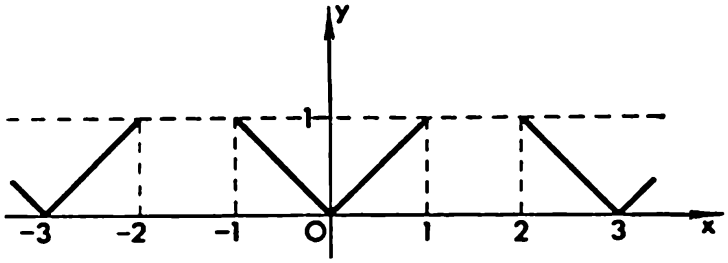


Fig. 74

**4385.** La fonction $y = \cos ax$ dans l'intervalle $]-\pi, \pi[$ ($a$ n'étant pas un entier).

**4386.** La fonction $y = \sin ax$ dans l'intervalle $]-\pi, \pi[$ ($a$ n'étant pas un entier).

**4387.** La fonction $y = \sin ax$ ($a$ est un entier) dans l'intervalle $]0, \pi[$ en série de cosinus.

**4388.** La fonction $y = \cos ax$ ($a$ est un entier) dans l'intervalle $]0, \pi[$ en série de cosinus.

**4389.** La fonction $y = \operatorname{sh} ax$ dans l'intervalle $]-\pi, \pi[$.

**4390.** La fonction $y = \operatorname{ch} x$ dans l'intervalle $]0, \pi[$ en série de cosinus et en série de sinus.

**4391.** Développer en série de Fourier la fonction dont le graphe est représenté sur la fig. 74.

**4392*.** Développer en série de Fourier la fonction dont le graphe est représenté sur la fig. 75.

**4393*.** Développer en série de Fourier les graphes représentés sur les fig. 76 et 77.

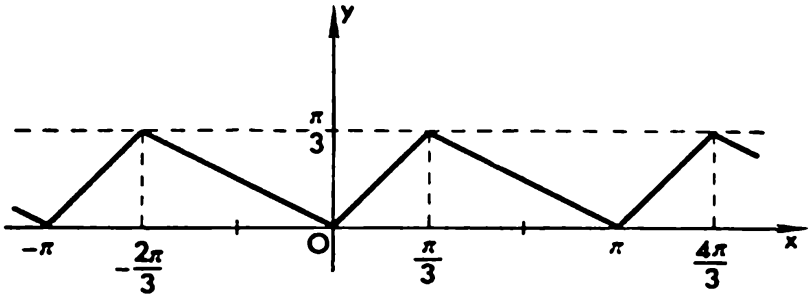


Fig. 75

**4394.** Développer la fonction $y = x(\pi - x)$ en série de cosinus dans l'intervalle $]0, \pi[$. Appliquer le résultat obtenu au calcul de la somme

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} + \ldots$$

**4395.** On donne la fonction $\varphi(x) = (\pi^2 - x^2)^2$.

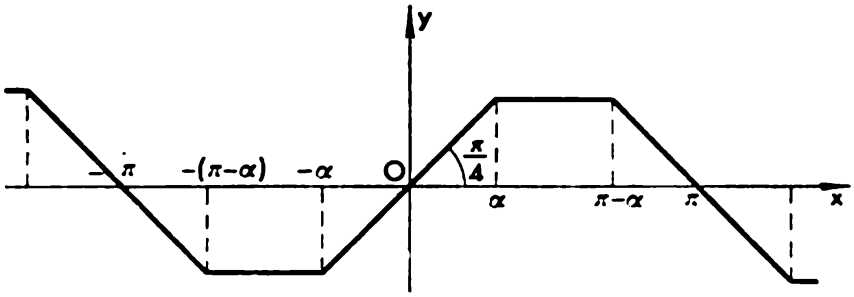


Fig. 76

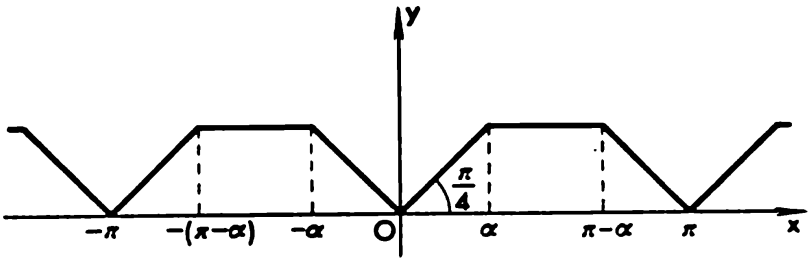


Fig. 77

a) Vérifier qu'ont lieu les égalités

$$\varphi(-\pi) = \varphi(\pi), \quad \varphi'(-\pi) = \varphi'(\pi) \quad \text{et} \quad \varphi''(-\pi) = \varphi''(\pi),$$

[mais que $\varphi'''(-\pi) \neq \varphi'''(\pi)$].

b) Se servir du résultat obtenu pour développer la fonction $\varphi(x)$ en série de Fourier dans l'intervalle $(-\pi, \pi.)$

c) Calculer la somme de la série

$$1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}+\ldots$$

## § 3. Méthode de Krylov. Analyse harmonique

Améliorer la convergence des séries trigonométriques en ramenant les coefficients jusqu'à l'ordre $k$ indiqué entre parenthèses.

**4396*.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+1}\sin nx \quad (k=4).$

**4397*.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n^2+1}\sin nx \quad (k=2).$

**4398*.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^4+1}\cos nx \quad (k=4).$

**4399*.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2-1}\cos nx \quad (k=5).$

**4400.** Les fonctions $f_i(x)$ $(i=1, 2, 3)$ sont données dans l'intervalle $[0, 2\pi[$ par le tableau suivant:

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{11\pi}{6}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_1(x)$ | 27 | 32 | 35 | 30 | 26 | 20 | 18 | 22 | 26 | 30 | 32 | 36 |
| $f_2(x)$ | 0,43 | 0,87 | 0,64 | 0,57 | 0,28 | 0 | —0,30 | —0,64 | —0,25 | 0,04 | 0,42 | 0,84 |
| $f_3(x)$ | 2,3 | 3,2 | 2,1 | 1,6 | —0,4 | —0,2 | —0,4 | 0,3 | 0,7 | 0,9 | 1,2 | 1,6 |

Trouver une expression approchée de ces fonctions sous forme d'un polynôme trigonométrique du second ordre.

# CHAPITRE XVI

## ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES CHAMPS *)

### Champ vectoriel, divergence, rotationnel

**4401.** Trouver les lignes vectorielles du champ homogène $\boldsymbol{A}(P) = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$, où $a$, $b$ et $c$ sont des constantes.

**4402.** Trouver les lignes vectorielles du champ plan $\boldsymbol{A}(P) = -\omega y\boldsymbol{i} + \omega x\boldsymbol{j}$, où $\omega$ est une constante.

**4403.** Trouver les lignes vectorielles du champ $\boldsymbol{A}(P) = -\omega y\boldsymbol{i} + \omega x\boldsymbol{j} + h\boldsymbol{k}$, où $\omega$ et $h$ sont des constantes.

**4404.** Trouver les lignes vectorielles du champ:

1) $\boldsymbol{A}(P) = (y+z)\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} - x\boldsymbol{k}$;

2) $\boldsymbol{A}(P) = (z-y)\boldsymbol{i} + (x-z)\boldsymbol{j} + (y-x)\boldsymbol{k}$;

3) $\boldsymbol{A}(P) = x(y^2-z^2)\boldsymbol{i} - y(z^2+x^2)\boldsymbol{j} + z(x^2+y^2)\boldsymbol{k}$.

Calculer la divergence et le rotationnel des champs vectoriels suivants:

**4405.** $\boldsymbol{A}(P) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.

**4406.** $\boldsymbol{A}(P) = (y^2+z^2)\boldsymbol{i} + (z^2+x^2)\boldsymbol{j} + (x^2+y^2)\boldsymbol{k}$.

**4407.** $\boldsymbol{A}(P) = x^2yz\boldsymbol{i} + xy^2z\boldsymbol{j} + xyz^2\boldsymbol{k}$.

**4408.** $\boldsymbol{A}(P) = \operatorname{grad}(x^2+y^2+z^2)$.

**4409.** Un champ vectoriel est engendré par une force de grandeur constante $F$, orientée dans le sens de l'axe des abscisses. Calculer la divergence et le rotationnel de ce champ.

**4410.** Un champ vectoriel plan est engendré par une force inversement proportionnelle au carré de la distance de son point d'application à l'origine des coordonnées et orientée vers l'origine des coordonnées. (Exemple un champ électrique plan engendré par une charge ponctuelle.) Trouver la divergence et le rotationnel de ce champ.

**4411.** Trouver la divergence et le rotationnel d'un champ spatial dont les lignes de force réalisent les conditions de l'exercice 4410.

**4412.** Un champ vectoriel est engendré par une force inversement proportionnelle à la distance de son point d'application à l'axe $Oz$, perpendiculaire à cet axe et orientée vers lui. Calculer la divergence et le rotationnel de ce champ.

---

*) Les problèmes relatifs aux propriétés du champ scalaire et de son gradient figurent dans le § 4 du chapitre XI.

4413. Un champ vectoriel est engendré par une force inversement proportionnelle à la distance de son point d'application au plan $xOy$ et orientée vers l'origine des coordonnées. Calculer la divergence de ce champ.

Ici et dans la suite $\boldsymbol{r}$ est un rayon vecteur et $r = |\boldsymbol{r}|$ son module.

4414. Calculer div $(a\boldsymbol{r})$, où $a$ est un scalaire constant.

4415. Démontrer la relation

$$\operatorname{div}(\varphi \boldsymbol{A}) = \varphi \operatorname{div} \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{A} \operatorname{grad} \varphi),$$

où $\varphi = \varphi(x, y, z)$ est une fonction scalaire.

4416. Calculer div $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{r}\boldsymbol{a})$ et div $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\boldsymbol{a})$, où $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont des vecteurs constants.

4417. Calculer div $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r})$, où $\boldsymbol{a}$ est un vecteur constant.

4418. Sans passer aux coordonnées calculer la divergence du champ vectoriel:

$$1)\ \boldsymbol{A}(P) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{r}) - 2\boldsymbol{a}\boldsymbol{r}^2,\ 2)\ \boldsymbol{A}(P) = \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|^3},\ 3)\ \operatorname{grad} \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0}.$$

4419. Calculer la divergence du champ vectoriel

$$\boldsymbol{A}(P) = f(|\boldsymbol{r}|) \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}.$$

Montrer que la divergence de ce champ est nulle si et seulement si $f(|\boldsymbol{r}|) = \frac{C}{r^2}$ dans l'espace et $f(|\boldsymbol{r}|) = \frac{C}{|\boldsymbol{r}|}$ dans le plan, où $C$ est une constante arbitraire.

4420. Montrer que

$$\operatorname{rot}[\boldsymbol{A}_1(P) + \boldsymbol{A}_2(P)] = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}_1(P) + \operatorname{rot} \boldsymbol{A}_2(P).$$

4421. Calculer rot $[\varphi \boldsymbol{A}(P)]$, où $\varphi = \varphi(x, y, z)$ est une fonction scalaire.

4422. Calculer rot $\boldsymbol{r}\boldsymbol{a}$, où $\boldsymbol{a}$ est un vecteur constant.

4423. Calculer rot $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r})$, où $\boldsymbol{a}$ est un vecteur constant.

4424. Un solide tourne à une vitesse angulaire constante $\omega$ autour d'un axe. Trouver la divergence et le rotationnel du champ de vitesses linéaires.

4425. Montrer la relation

$$\boldsymbol{n}[\operatorname{grad}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{n}) - \operatorname{rot}(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{n})] = \operatorname{div} \boldsymbol{A},$$

sachant que $\boldsymbol{n}$ est un vecteur unitaire constant.

---

En analyse vectorielle il est plus commode de représenter les opérations de différentiation (grad, div, rot) par le vecteur $\nabla$ (« nabla » ou opérateur de Hamilton):

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

Cet opérateur agit sur une grandeur (scalaire ou vectorielle) de la manière suivante: il faut multiplier vectoriellement ce vecteur par la grandeur en ques-

tion, puis considérer le produit du symbole $\frac{\partial}{\partial x}$, etc. par une grandeur $S$ comme la recherche de la dérivée correspondante. Alors grad $u = \nabla u$; div $\boldsymbol{A} = \nabla \boldsymbol{A}$: rot $\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A}$.

L'opérateur de Hamilton sert également au calcul des dérivées secondes

$$\nabla\nabla u = \text{div grad } u;\ \nabla \times \nabla u = \text{rot grad } u;\ \nabla(\nabla \boldsymbol{A}) = \text{grad div } \boldsymbol{A};$$

$$\nabla(\nabla \times \boldsymbol{A}) = \text{div rot } \boldsymbol{A};\ \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \text{rot rot } \boldsymbol{A}.$$

4426. Montrer que $\boldsymbol{r} \cdot \nabla r^n = nr^n$, où $\boldsymbol{r}$ est un rayon vecteur.

4427. Montrer les relations:

1) rot grad $u = 0$; 2) div rot $\boldsymbol{A} = 0$.

4428. Montrer que

$$\text{div grad } u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

(Cette expression porte le nom d'opérateur de Laplace et s'écrit $\Delta u$. En se servant de l'opérateur d'Hamilton on peut le mettre sous la forme $\Delta u = (\nabla\nabla)\, u = \nabla^2 u$.)

4429. Montrer que

$$\text{rot rot } \boldsymbol{A}(P) = \text{grad div } \boldsymbol{A}(P) - \Delta \boldsymbol{A}(P),$$

où $\Delta \boldsymbol{A}(P) = \Delta A_x \boldsymbol{i} + \Delta A_y \boldsymbol{j} + \Delta A_z \boldsymbol{k}$.

## Potentiel

4430. Un champ vectoriel est engendré par un vecteur constant $\boldsymbol{A}$. Vérifier que ce champ possède un potentiel qu'on évaluera.

4431. Un champ vectoriel est engendré par une force proportionnelle à la distance de son point d'application à l'origine des coordonnées. Montrer que ce champ est conservatif et calculer son potentiel.

4432. Les forces d'un champ sont inversement proportionnelles à la distance de leurs points d'application au plan $Oxy$ et orientées vers l'origine des coordonnées. Etablir si ce champ est conservatif.

4433. Les forces d'un champ sont proportionnelles au carré de la distance de leurs points d'application à l'axe de cotes et orientées vers l'origine des coordonnées. Etablir si ce champ est conservatif.

4434. Un champ vectoriel est engendré par une force inversement proportionnelle à la distance de son point d'application à l'axe $Oz$, perpendiculaire à cet axe et orientée vers lui. Montrer que ce champ est conservatif et trouver son potentiel.

4435. Un champ vectoriel est engendré par les vitesses linéaires des points d'un solide en rotation autour de son axe. Est-ce que ce champ possède un potentiel?

4436. Les forces d'un champ sont définies comme suit: $\boldsymbol{A}(P) = f(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}$ (ce champ est central). Montrer que le potentiel de ce champ est égal à:

$$u(x, y, z) = \int_a^r f(r)\, dr \quad \left(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right).$$

En déduire, comme cas particulier, le potentiel du champ de la force d'attraction d'une masse ponctuelle et le potentiel de l'exercice 4431.

**4437.** Trouver le travail effectué par les forces du champ $A(p) = xy\,i + yz\,j + xz\,k$ lorsqu'un point de masse $m$ se déplace sur une courbe fermée composée du segment de droite $x + z = 1$, $y = 0$, du quart de circonférence $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ et du segment de

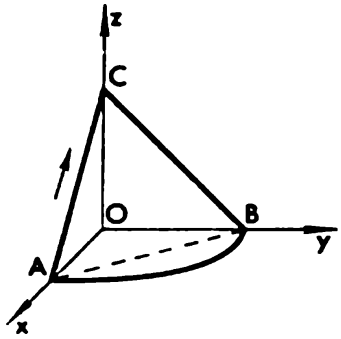


Fig. 78

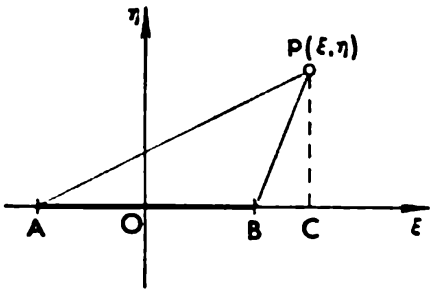


Fig. 79

droite $y + z = 1$, $x = 0$ (fig. 78), dans le sens indiqué sur la figure. Comment varie le travail si l'on remplace l'arc $BA$ par la ligne polygonale $BOA$ ou le segment $BA$?

## Potentiel de la force d'attraction*)

**4438.** Soit donnée dans le plan $O\xi\eta$ une tige $AB$ de longueur $2l$, de densité linéaire $\delta$, disposée sur l'axe $O\xi$, symétriquement à l'origine des coordonnées (fig. 79).

a) Trouver le potentiel $u(x, y)$ de la tige.

b) Montrer que les projections $X$ et $Y$ de la force d'attraction agissant sur un point $P$ de masse $m$ et de coordonnées $\xi = x$, $\eta = y$ sont égales à

$$X = mk\delta\left(\frac{1}{PA} - \frac{1}{PB}\right), \quad Y = -\frac{mk\delta}{y}\left(\frac{CB}{PB} + \frac{AC}{PA}\right),$$

et la résultante $R$ égale à

$$R = \frac{2mk\delta}{y}\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta),$$

où $k$ est la constante d'attraction ($C$ — la projection du point $P$ sur l'axe $O\xi$, $\alpha$ — l'angle $APC$, $\beta$ — l'angle $BPC$).

**4439.** Trouver le potentiel de la circonférence $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$ au point $(R, 0, 2R)$ sachant que la densité est en chaque point

*) Dans ce paragraphe, la force d'attraction agit selon la loi de Newton. Au lieu de l'expression « potentiel de masse » placée sur (ou dans) une figure géométrique, nous dirons pour abréger « potentiel de la figure donnée ».

égale à la valeur absolue du sinus de l'angle fait par le rayon vecteur de ce point avec l'axe des abscisses.

**4440.** Trouver le potentiel de la première spire d'une hélice homogène $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$ à l'origine des coordonnées, sachant que la densité est $\delta$.

**4441.** Trouver le potentiel d'un carré homogène de côté $a$ (la densité surfacique est $\delta$) en l'un de ses sommets.

**4442.** Sur le plan $Oxy$ est distribuée une masse avec une densité $\delta$ variant d'après la loi $\delta = \frac{1}{1+\rho^2}$, où $\rho$ est la distance de cette masse à l'origine des coordonnées. Trouver le potentiel au point $(0, 0, h)$. (Distinguer les trois cas: $h < 1$, $h = 1$ et $h > 1$.)

**4443*.** Calculer le potentiel de la surface latérale homogène d'un cylindre à base circulaire:

1) au centre de la base,

2) au centre de son axe (le rayon du cylindre est $R$, la hauteur $H$ et la densité surfacique $\delta$).

**4444.** Calculer le potentiel de la surface latérale homogène d'un cône circulaire droit (rayon de base $R$, hauteur $H$) en son sommet.

**4445.** On donne un cylindre homogène circulaire droit (rayon de base $R$, hauteur $H$, densité $\delta$).

1) Calculer le potentiel au centre de la base.

2) Calculer le potentiel au milieu de l'axe.

**4446.** On donne un cône circulaire droit homogène (rayon de base $R$, hauteur $H$, densité $\delta$). Trouver le potentiel de ce cône en son sommet.

**4447.** Trouver le potentiel d'une demi-boule homogène $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ $(z \geqslant 0)$ de densité $\delta$ au point $A$ $(0, 0, a)$. (Distinguer deux cas: $a \geqslant R$ et $a \leqslant R$.)

**4448*.** Trouver le potentiel d'un solide homogène limité par deux concentriques de rayons $R$ et $r$ $(R > r)$ et de densité $\delta$ en un point situé à une distance $a$ du centre. (Distinguer trois cas: $a \geqslant R$, $a \leqslant r$ et $r \leqslant a \leqslant R$.) Montrer que si ce point est situé à l'intérieur du corps, la force d'attraction qui agit sur lui est nulle.

**4449.** Trouver le potentiel d'une boule pleine non homogène

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R$$

au point $A$ $(0, 0, x)$ $(a > R)$ sachant que la densité $\delta = \lambda z^2$, i.e. est proportionnelle au carré de la distance de ce point au plan $Oxy$.

## Flux et circulation (dans le plan)

**4450.** Calculer le flux et la circulation d'un vecteur constant $A$ le long d'une courbe fermée arbitraire $L$.

**4451.** Calculer le flux et la circulation du vecteur $A(P) = ar$, où $a$ est un scalaire constant et $r$ le rayon vecteur du point $P$, le long d'une courbe fermée arbitraire $L$.

4452. Calculer le flux et la circulation du vecteur $A(P) = xi - yj$ le long d'une courbe fermée arbitraire $L$.

4453. Calculer le flux et la circulation du vecteur $A(P) = (x^3 - y)\,i + (y^3 + x)\,j$ le long d'une circonférence de rayon $R$ centrée à l'origine des coordonnées.

4454. Le potentiel du champ de vitesses des particules d'un fluide courant est égal à $u = \ln r$, où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Trouver la quantité de liquide qui a traversé un contour fermé $L$ contenant l'origine des coordonnées dans l'unité de temps (flux), et la quantité de liquide qui s'est écoulée dans l'unité de temps le long de ce contour (circulation). Comment varie ce résultat si l'origine des coordonnées se trouve à l'extérieur du contour?

4455. Le potentiel du champ de vitesses des particules d'un liquide courant est égal à $u = \varphi$, où $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$. Trouver le flux et la circulation du vecteur le long d'un contour fermé $L$.

4456. Le potentiel du champ de vitesses des particules d'un fluide courant est égal à $u(x, y) = x(x^2 - 3y^2)$. Trouver la quantité de liquide qui s'est écoulée dans l'unité de temps à travers le segment de droite qui joint l'origine des coordonnées au point (1, 1).

## Flux et circulation (dans l'espace)

4457. Montrer que le flux d'un rayon vecteur $r$ à travers une surface fermée quelconque est égal au triple volume du corps limité par cette surface.

4458. Calculer le flux d'un rayon vecteur à travers la surface latérale d'un cylindre circulaire (rayon de base $R$, hauteur $H$) sachant que l'axe de ce cylindre passe par l'origine des coordonnées.

4459. Appliquer les résultats des exercices 4457 et 4458 au calcul du flux d'un rayon vecteur à travers les bases du cylindre de l'exercice précédent.

4460. Calculer le flux d'un rayon vecteur à travers la surface latérale d'un cône circulaire droit dont la base est portée par le plan $xOy$ et l'axe coïncide avec l'axe $Oz$. (Hauteur du cône 1, rayon de base 2.)

4461. Trouver le flux du vecteur $A(P) = xyi + yzj + xzk$ à travers la portion de sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ comprise dans le premier octant.

4462*. Calculer le flux du vecteur $A(P) = yzi + xzj + xyk$ à travers la surface latérale de la pyramide qui a pour sommet le point $S(0, 0, 2)$ et pour base le triangle $O(0, 0, 0)$, $A(2, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$.

4463. Calculer la circulation du rayon vecteur le long de la spire $AB$ de l'hélice $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, où $A$ et $B$ sont les points correspondant aux valeurs 0 et $2\pi$ du paramètre $t$.

**4464.** Un solide tourne autour de l'axe $Oz$ à une vitesse angulaire $\omega$ constante. Calculer la circulation du champ des vitesses linéaires le long d'une circonférence de rayon $R$ dont le centre est situé sur l'axe de rotation et le plan est perpendiculaire à l'axe de rotation, dans le sens de la rotation.

**4465*.** Calculer le flux du rotationnel du champ de vecteurs $\boldsymbol{A}(P) = y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$ à travers la surface du paraboloïde de révolution

$$z = 2(1 - x^2 - y^2)$$

interceptée par le plan $z = 0$.

# RÉPONSES

## Chapitre 1

1. Tous les nombres naturels à l'exception de $n = 1$ et $n = 2$. Si la somme des angles est $S$ et le nombre de côtés $n$, on a $S = \pi(n - 2)$.

4. a) la fonction est nulle pour $x = -2$, $x = 1$ et $x = 6$;
b) elle est positive pour $x < -2$, $-2 < x < 1$, $x > 6$;
c) elle est négative pour $1 < x < 6$.

6. $r = \frac{1}{\sqrt{\pi h}}$. 7. $S = \frac{a^2 - b^2}{4} \operatorname{tg} \alpha$.

8. $b = \sqrt{25 - a^2}$. 9. $f(0) = -2$; $f(1) = -0{,}5$; $f(2) = 0$; $f(-2) = 4$; $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -5$; $f(\sqrt{2}) = -0{,}242\ldots$, $\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| = 1$; $\varphi(0) = 2$; $\varphi(1) = 0{,}5$; $\varphi(2) = 0$; $\varphi(-2) = -4$; $\varphi(4) = 0{,}4$; $f(-1)$ n'existe pas, $\varphi(-1)$ n'existe pas.

10. $f(1) = 0$; $f(a) = a^3 - 1$; $f(a+1) = a^3 + 3a^2 + 3a$; $f(a-1) = a^3 - 3a^2 + 3a - 2$; $2f(2a) = 16a^3 - 2$.

11. $F(0) = \frac{1}{4}$; $F(2) = 1$; $F(3) = 2$; $F(-1) = \frac{1}{8}$; $F(2{,}5) = \sqrt{2}$; $F(-1{,}5) = \frac{1}{\sqrt{128}}$; $\varphi(0) = \frac{1}{4}$; $\varphi(2) = 1$; $\varphi(-1) = \frac{1}{2}$; $\varphi(x) = 2^{x-2}$ pour $x > 0$ et $\varphi(x) = 2^{-x-2}$ pour $x < 0$; $\varphi(-1) + F(1) = 1$.

12. $\psi(0) = 0$; $\psi(1) = a$; $\psi(-1) = -\frac{1}{a}$; $\psi\left(\frac{1}{a}\right) = a^{\frac{1-a}{a}}$; $\psi(a) = a^{a+1}$; $\psi(-a) = -a^{1-a}$.

13. $\varphi(t^2) = t^6 + 1$; $[\varphi(t)]^2 = t^6 + 2t^3 + 1$.

20. $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est égal à la pente de la corde passant par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

22. a) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$; b) $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

23. $x_1 = -2$, $x_2 = 5$, $x_3 = -\frac{1}{2}$.

24. Une racine est toujours $x = a$. 25. 4 et $-2$; $-2$, 2, 4, 10.

26. $x_1 = -3$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$. 27. $x \leqslant -1$ et $x \geqslant 2$.

28. $a = 4$, $b = -1$.

29. $a = -\frac{1}{2 \sin 0{,}5} \approx -1{,}04$ (on suppose que $\sin 0{,}5 \approx 0{,}48$); $b = 1$; $c = -\frac{1}{2} + 2k\pi$ ou $a = \frac{1}{2 \sin 0{,}5} \approx 1{,}04$; $b = -1$; $c = \frac{1}{2} + (2k+1)\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

30. $y = (x+1)^2$. 31. $y = \left|\frac{1}{\cos x}\right|$. 32. $y = \sqrt[3]{(a^t+1)^2}$.

33. $u = \sqrt{1 + (\lg \sin x)^2}$. 34. $v = \sin(1+x)$.

35. 1) $y = v^3$, $v = \sin x$; 2) $y = \sqrt[3]{v}$, $v = u^2$, $u = x+1$; 3) $y = \lg v$, $v = \operatorname{tg} x$; 4) $y = u^3$, $u = \sin v$, $v = 2x+1$; 5) $y = 5^u$, $u = v^2$, $v = 3x+1$.

36. a) $-\frac{3}{8}$; b) 0; c) $\sin 12$; d) $-\sin 2x \cos^2 2x$; e) $x^9 - 3x^7 + 3x^5 - 2x^3 + x$; f) 0; g) $\sin(2 \sin 2x)$.

38. 1) $y = \pm\sqrt{1-x^2}$; 2) $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$; 3) $y = \sqrt[3]{a^3-x^3}$; 4) $y = \frac{C}{x}$; 5) $y = \frac{\log_2 5}{x}$; 6) $y = \frac{10\,000}{x} - 1$; 7) $y = \log_2(x^3+7) - \log_2(x^2-2) - x$; 8) $y = \operatorname{Arccos}\frac{x^2}{1+x}$.

39*. Supposons que $x > 0$ et $y > 0$, alors $y + y - x - x = 0$; $y = x$ (son graphe est la bissectrice du premier quadrant). Supposons que $x > 0$ et $y < 0$: on a $y - y - x - x = 0$, d'où $x = 0$ (le graphe est l'axe $Oy$). Supposons que $x < 0$ et $y > 0$: on a alors $y + y - x + x = 0$, d'où $y = 0$ (le graphe est l'axe $Ox$). Supposons que $x < 0$ et $y < 0$, on a alors $y - y - x + x = 0$, i.e. une identité (le graphe est constitué de l'ensemble des points du troisième quadrant).

40.

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{120}$ | $\frac{1}{720}$ |

41.

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u$ | 0 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 |

42.

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | 2 | 1 | 2 | 0 | 4 | 0 | 2 | 2 | 3 | 0 | 4 | 0 | 4 |

43. Si $f(x)$ est le poids du segment $AM$, alors $f(x) = 2x$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, $f(x) = 2 + \frac{3}{2}(x-1)$ pour $1 < x \leqslant 3$, $f(x) = x + 2$ pour $3 < x \leqslant 4$. La fonction est définie pour $0 \leqslant x \leqslant 4$.

44. $S = \pi(2R - x)^2$ pour $0 \leqslant x \leqslant R$; $S = \pi R^2$ pour $R \leqslant x \leqslant 3R$; $S = \pi(6Rx - x^2 - 8R^2)$ pour $3R \leqslant x \leqslant 4R$. La fonction $S = f(x)$ n'est pas définie en dehors de l'intervalle $[0, 4R]$.

45. $V = \pi x\left(R^2 - \frac{x^2}{4}\right)$; $0 < x < 2R$.

46. $S = \frac{\pi x^2}{2R}\sqrt{4R^2 - x^2}$; $0 < x < 2R$.

47. 1) $x > 0$; 2) $x > -3$; 3) $x \leqslant \frac{5}{2}$; 4) $-\infty < x \leqslant 0$; 5) l'axe numérique tout entier à l'exception des points $x = \pm 1$; 6) l'axe numérique tout entier; 7) n'est pas définie uniquement pour $x = 0, x = -1, x = 1$; 8) l'axe numérique tout entier à l'exception des points $x = 1$ et $x = 2$; 9) $-1 \leqslant x \leqslant 1$; 10) $-\infty < x < 0$ et $4 < x < \infty$; 11) $-\infty < x \leqslant 1$ et $3 \leqslant x < \infty$; la fonction n'est pas définie dans l'intervalle $]1,3[$; 12) $-\infty < x < 1$ et $2 < x < \infty$; la fonction n'est pas définie dans l'intervalle $[1,2]$; 13) $-4 \leqslant x \leqslant 4$; 14) $1 \leqslant x \leqslant 3$; 15) $0 \leqslant x \leqslant 1$; 16) $-\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}$; 17) $0 \leqslant x \leqslant 1/2$; 18) $-1 \leqslant x \leqslant 1$; 19) $-\infty < x < 0$; 20) n'a pas de sens; 21) $1 \leqslant x \leqslant 4$; 22) $2k\pi < x < (2k+1)\pi$, où $k$ est un entier; 23) $2k\pi \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi$, où $k$ est un entier; 24) $0 < x < 1$ et $1 < x < \infty$.

48. 1) $-2 \leqslant x < 0$ et $0 < x < 1$; 2) $-1 \leqslant x \leqslant 3$; 3) $1 \leqslant x < 4$; 4) $3/2 < x < 2$ et $2 < x < \infty$; 5) le domaine de définition est constitué du seul point $x = 1$; 6) $-1 < x < 0$ et $1 < x < 2$; $2 < x < \infty$; 7) $3 - 2\pi < x < 3 - \pi$; $3 < x \leqslant 4$; 8) $-4 \leqslant x \leqslant -\pi$ et $0 \leqslant x \leqslant \pi$; 9) $2k\pi < x < (2k+1)\pi$, où $k$ est un entier; 10) $4 < x < 5$ et $6 < x < \infty$; 11) n'est nulle part définie; 12) $-1 < x \leqslant 1$ et $2 \leqslant x < 3$; 13) l'axe numérique tout entier; 14) $4 \leqslant x \leqslant 6$; 15) $2 < x < 3$.

49. 1) Oui; 2) sont identiques sur tout intervalle ne renfermant pas le point $x = 0$; 3) sont identiques sur l'intervalle $[0, \infty[$; 4) sont identiques sur l'intervalle $]0, \infty[$.

50. 1) $y = \sqrt{4 - x^2}$; 2) $y = \dfrac{1}{x\sqrt{4 - x^2}}$;

3) $y = \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x-3} + \dfrac{1}{x-4}$.

51. 1) $1 < x \leqslant 3$; 2) $0 \leqslant x < +\infty$ pour deux branches et $1 \leqslant x < +\infty$ pour les deux autres.

52. $-\infty < x < \infty$.

53. 1) $y > 0$ pour $x > 2$; $y < 0$ pour $x < 2$; $y = 0$ pour $x = 2$; 2) $y > 0$ pour $x < 2$ et $x > 3$; $y < 0$ pour $2 < x < 3$; $y = 0$ pour $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$; 3) $y > 0$ dans l'intervalle $]-\infty, \infty[$, la fonction ne possède pas de zéro; 4) $y > 0$ dans les intervalles $]0, 1[$, $]2, \infty[$; $y < 0$ dans les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]1, 2[$; $y = 0$ pour $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$; 5) $y > 0$ pour $x \neq 0$; $y = 0$ pour $x = 0$.

54. 1), 3), 8), 10), 11), 15) — paires; 5), 6), 9), 12), 14), 17) — impaires; 2), 4), 7), 13), 16) ni paires ni impaires.

55. 1) $y = (x^2 + 2) + 3x$; 2) $y = (1 - x^4) + (-x^3 - 2x^5)$; 3) $y = (\sin 2x + \operatorname{tg} x) + \cos \frac{x}{2}$.

57. 1) $y = \dfrac{a^x + a^{-x}}{2} + \dfrac{a^x - a^{-x}}{2}$;

2) $y = \dfrac{(1+x)^{100} + (1-x)^{100}}{2} + \dfrac{(1+x)^{100} - (1-x)^{100}}{2}$.

59. Les fonctions 1), 5), 6), 8).

60. Les graphes sont représentés sur les fig. 80 et 81.

61. 1) Décroît dans l'intervalle $]-\infty, 0[$ et croît dans l'intervalle $]0, \infty[$; 2) décroît dans l'intervalle $]-\infty, 0[$ et reste nulle dans l'intervalle $]0, \infty[$.

62. 1) Maximum $= 1$, minimum $= 0$; 2) maximum $= 1$, minimum $= -1$; 3) maximum $= 2$, minimum $= 0$; 4) ne possède pas de maximum, minimum $= 1$.

65. $I = \frac{E}{3}$. 66. a) $p = 0{,}727h$; b) 10,5 g/cm$^2$; c) 36,4 cm.

67. $F = \frac{8}{45}\,w$. 68. 1) $y = \frac{2}{3}x + 4$; 2) $y = 1{,}195x + 1{,}910$; 3) $y = -0{,}57x + 8{,}63$.

69. a) $V = 100 + 0{,}35t$; b) 100 cm³. 70. $S = 16{,}6 + 1{,}34t$.

71. $V = 12 - 0{,}7t$. 72. $\Delta y = 6$. 73. $\Delta y = -6$. 74. $\Delta x = 4$. 75. $x_2 = 2a$.

76. $x = 3$; la solution graphique de cette équation est le point d'intersection de la fonction $y = \varphi(x)$ et de la droite $y = 2x - 4$.

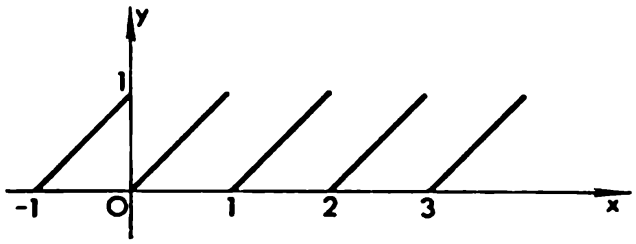


Fig. 80

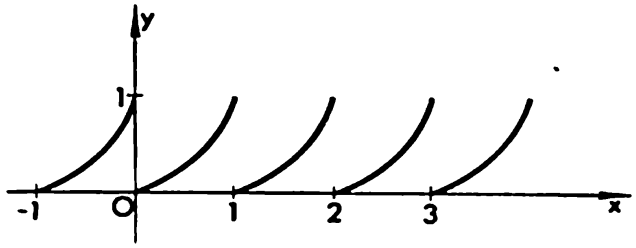


Fig. 81

78*. On remarquera que la condition de l'exercice exclut le signe d'égalité dans la relation $|f(x) + \varphi(x)| \leqslant |f(x)| + |\varphi(x)|$. On aura une inégalité stricte $x < 3$ et $x > 4$. On résoudrait cet exercice en construisant les graphes des fonctions $\Phi(x) = |f(x) + \varphi(x)|$ et $\psi(x) = |f(x)| + |\varphi(x)|$.

79. $x < 2$. Voir l'indication relative à l'exercice 78*.

$$82.\quad y = \begin{cases} 0 \text{ sur l'intervalle } (-\infty;\ -3); \\ -\frac{5}{9}x^2 + 5 \quad » \quad » \quad [-3;\ 3], \\ \frac{2}{3}x - 2 \quad » \quad » \quad [3;\ 6]. \end{cases}$$

83. 1) $y = -\frac{7}{8}$ pour $x = \frac{1}{4}$; 2) $y = \frac{17}{4}$ pour $x = -\frac{3}{2}$; 3) $y = 5$ pour $x = 0$; 4) $y = -\frac{7a^2}{8}$ pour $x = \frac{a}{4}$; 5) $y = \frac{a^4}{4b^2}$ pour $x = \frac{a^2}{2b^2}$.

84. 1) $y = -6$ pour $x = -2$; 2) $y = 0{,}31875$ pour $x = \frac{3}{8}$; 3) $y = \frac{5}{8}$ pour $x = \frac{1}{4}$; 4) $y = a^4$ pour $x = 0$; 5) $y = -\frac{9}{4}b^2$ pour $x = \frac{b}{2a}$.

85. $a = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$. 86. $a = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$. 87. 4 m. 88. 50 cm.

89. Le cylindre dont la section axiale est un carré.

**90.** Plus la hauteur du cône est petite, plus la surface latérale est grande; la fonction atteint son maximum pour un rayon de base égal à $\frac{P}{4}$, i.e. lorsque le cône dégénère en un disque plan.

**91.** 12,5 cm. **92.** La hauteur du rectangle est égale à la moitié de la hauteur du triangle.

**93.** Le rayon du cylindre doit être égal à la moitié de celui du cône.

**94.** Pour $H > 2R$ le rayon du cylindre est égal à $\frac{RH}{2(H-R)}$; pour $H \leqslant 2R$ la surface totale du cylindre inscrit sera d'autant plus grande que le sera le rayon de base.

**95.** $\frac{P}{2}$. **96.** $a = \frac{P}{6-\sqrt{3}}$. **97.** $\frac{4}{\pi+4}$.

**98.** Le côté des carrés doit être égal à 10 cm.

**99.** Le côté de la base et les arêtes doivent être chacun égaux à 10 cm.

**100.** Le côté du triangle doit être égal à $\frac{3a}{9+4\sqrt{3}}$.

**101.** $\left(\frac{b}{6}, \frac{b}{6}\right)$. **102.** $\left(\frac{15}{11}, \frac{37}{11}\right)$.

**104.** 1) $x_1 \approx -1{,}1$, $x_2 \approx 2{,}1$; 2) $x_1 = -1$, $x_2 = 5/2$; 3) $x_1 \approx 0{,}5$, $x_2 \approx 4{,}1$; 4) $x_1 = x_2 = 3/2$; 5) ne possède pas de racines réelles. **105.** $x_1 = -3$, $x_2 = 8$. La solution graphique est le point d'intersection des graphes de la fonction $y = \varphi(x)$ et de la parabole $y^2 = 7x + 25$.

**106.** Si $b^2 - 4ac > 0$ et $a > 0$ la fonction est définie sur l'axe numérique tout entier à l'exclusion de l'intervalle $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, où $x_1$ et $x_2$ sont les racines du trinôme. Si $b^2 - 4ac > 0$ et $a < 0$ la fonction est définie uniquement pour $x_1 < x < x_2$. Si $b^2 - 4ac < 0$ et $a > 0$ la fonction est définie sur l'axe numérique tout entier. Si $b^2 - 4ac < 0$ et $a < 0$ la fonction n'est pas définie. Si, enfin, $b^2 - 4ac = 0$ la fonction est définie sur l'axe numérique tout entier à l'exception du seul point $x = -\frac{b}{2a}$ pour $a > 0$ et n'est nulle part définie pour $a < 0$.

**107.** $f(x+1) = 2x^2 + 5x + 3$.

**108*.** Supposons que $\frac{x^2+2x+c}{x^2+4x+3c} = m$, où $m$ est un réel quelconque; on a alors $(m-1)x^2 + 2(2m-1)x + c(3m-1) = 0$. L'argument $x$ étant réel, il vient $(2m-1)^2 - (m-1)(3mc-c) \geqslant 0$ ou encore $(4-3c)m^2 + 4(c-1)m - (c-1) \geqslant 0$; or comme $m$ est réel cette inégalité n'a lieu que si

$$\begin{cases} 4 - 3c > 0, \\ 4(c-1)^2 + (4-3c)(c-1) \leqslant 0; \end{cases}$$

d'où $0 \leqslant c \leqslant 1$, or par hypothèse $c \neq 0$, donc $0 < c \leqslant 1$.

**109.** $pv = 1748$.

**110.** La variable $x$ est inversement proportionnelle à $v$.

**111.** La variable $x$ est directement proportionnelle à $v$.

**112.** La quantité de matière qui se dépose sur l'électrode est inversement proportionnelle au volume du solvant.

**114.** 1) maximum pour $x = 1$ et $y = 4$;
minimum pour $x = 5$ et $y = 4/5$;
2) maximum pour $x = -1$ et $y = 1/7$;
minimum pour $x = 2$ et $y = -2$;
3) maximum pour $x = 0$ et $y = 1$;
minimum pour $x = 4$ et $y = -3/5$.

**117.** 1) $y=x$; 2) $y=\frac{x}{2}$; 3) $y=\frac{1-x}{3}$;

4) $y=\pm\sqrt{x-1}$; 5) $y=\frac{1}{x}$; 6) $y=\frac{x-1}{x}$;

7) $y=1\pm\sqrt{x+1}$; 8) $y=\pm\sqrt{x^3-1}$;

9) $y=\lg\frac{x}{10}$; 10) $y=-2+10^{x-1}$;

11) $y=2^{\frac{1}{x}}$; 12) $y=\log_2\frac{x}{1-x}$;

13) $y=\frac{1}{2}\lg\frac{x}{2-x}$; 14) $y=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{2}$:

15) $y=\dfrac{1+\arcsin\frac{x-1}{2}}{1-\arcsin\frac{x-1}{2}}$;

16) $y=\pm\cos\frac{x}{4}$ $(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$.

**119.** $d=-a$.

**122.** $1<x\leqslant 3$; $y=1+2^{1-x^2}$. **123.** $y=\arcsin\sqrt[3]{x-x^2-2}$.

**125.** $x_1\approx -0{,}5$, $x_2=1$, $x_3\approx 54{,}5$.

**126*.** 1) $x_1\approx 1{,}4$, les autres racines sont imaginaires; $x_1$ est l'abscisse du point d'intersection des graphes de la parabole cubique $y=x^3$ et de la droite $y=-x+4$;

2) $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=3$; il est plus intéressant de faire le changement de variable $x=x'+\alpha$ et de choisir $\alpha$ tel que le coefficient de $x'^2$ s'annule; on procède ensuite comme dans 1); 3) $x_1=4$, $x_2=x_3=1$; voir indication du 2); 4) $x_1=-1$, les autres racines sont imaginaires; voir indication du 2).

**127.** 1) 1,465 . . .; 2) $\approx 14{,}26$ cm; 3) $\approx 6{,}8$ cm.

**128.** Si $y_1=x^n$, $y_2=\sqrt[n]{x}$, alors

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| pour | $n>1$ | et | $0<x<1$ | $y_1<y_2$ | et pour | $1<x<\infty$ | $y_1>y_2$, |
| » | $0<n<1$ | » | » | $y_1>y_2$ | » | » | $y_1<y_2$, |
| » | $-1<n<0$ | » | » | $y_1<y_2$ | » | » | $y_1>y_2$, |
| » | $n<-1$ | » | » | $y_1>y_2$ | » | » | $y_1<y_2$. |

**133.** $x_1=1$, $x_2=2$.

**134.** (1, 2); (3, 8); $\left(3, \frac{4}{3}\right)$; (−1,5; 0,3). **135.** $n=15$.

**136.** En partant de la définition des fonctions hyperboliques on démontre que $\operatorname{sh}(-x)=-\operatorname{sh}x$, $\operatorname{th}(-x)=-\operatorname{th}x$, $\operatorname{ch}(-x)=\operatorname{ch}x$. Ces fonctions ne sont pas périodiques.

**140.** $y_{\min}\approx 0{,}8$ pour $x\approx 0{,}4$. **141.** Cette fonction étant impaire son graphe est symétrique par rapport à l'origine des coordonnées. $y=\frac{a^x-a^{-x}}{2}$.

**143.** 1) $A=1$, $T=\frac{2}{3}\pi$; 2) $A=5$, $T=\pi$; 3) $A=4$, $T=2$; 4) $A=2$, $T=4\pi$; 5) $A=1$, $T=\frac{8}{3}$; 6) $A=3$, $T=\frac{16}{5}\pi$.

**144.** 1) $2$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3}{2\pi}$; $5$; 2) $1$; $4\pi$; $\frac{1}{4\pi}$; $\frac{3\pi-1}{2}$; 3) $\frac{1}{3}$; $1$; $1$; $-\frac{\pi}{3}$; 4) $1$; $6\pi^2$; $\frac{1}{6\pi^2}$; $\frac{1}{2\pi}$.

**146.** Domaine de définition $]0, \pi[$. L'aire est maximale pour $x=\frac{\pi}{2}$.

**147.** $x=R\sin\left(\frac{vt}{R}+\frac{\pi}{2}+\arccos\frac{a}{R}\right)$.

**148.** $y=\sin\left[\frac{t-t_0}{t_1-t_0}(\arcsin y_1-\arcsin y_0)+\arcsin y_0\right]$;

$$T=\frac{2\pi(t_1-t_0)}{\arcsin y_1-\arcsin y_0};\quad \varphi_{\text{init.}}=\frac{t_1\arcsin y_0-t_0\arcsin y_1}{t_1-t_0}.$$

**149.** $x=R(1-\cos\varphi)+a-\sqrt{a^2-R^2\sin^2\varphi}$, où $\varphi=2\pi nt$.

**151.** 1) $x_1=0$, $x_{2,3}\approx\pm1{,}9$; 2) $x=0$; $\pm4{,}5$; $\pm7{,}72$; puis avec une grande précision on peut supposer que $x\approx\pm\frac{(2n+1)\pi}{2}$ $(n>3)$; 3) $x\approx0{,}74$; 4) $x_1=0{,}9$, $x_2=2{,}85$, $x_3=5{,}8$; 5) on a une infinité de racines; $x_1=0$, $x_2$ est légèrement inférieur à $\frac{\pi}{2}$, $x_3$ légèrement supérieur à $\frac{3\pi}{2}$, etc.

**152.** 1) $2\pi$; 2) $2\pi$; 3) $24$; 4) $2$. **153.** 1) $y=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y=\sqrt{5+2\sqrt{3}}\sin(x+\varphi_0)$, où $\varphi_0=\arcsin\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$.

**155*.** 1) Période $\frac{\pi}{2}$. Sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ la fonction peut être représentée comme suit:

$y=\sin x+\cos x$ sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$y=\sin x-\cos x$ » » $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$,

$y=-\sin x-\cos x$ » » $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$,

$y=-\sin x+\cos x$ » » $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

2) Période $2\pi$. Sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ la fonction peut être représentée comme suit:

$y=\operatorname{tg} x$ sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$,

$y=0$ » » $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$,

$y=-\operatorname{tg} x$ » » $\left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$,

$y=0$ » » $\left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$.

**156.** 1) Le domaine de définition est constitué d'une infinité d'intervalles de la forme $]2n\pi, (2n+1)\pi[$, où $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$; ni paire ni impaire; périodique et de période $2\pi$. Dans l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$ le sinus croît de 0 à 1,

donc lg sin $x$ croît jusqu'à 0. Dans l'intervalle $]\frac{\pi}{2}, \pi[$ le sinus décroît de 1 à 0, donc lg sin $x$ décroît lui aussi. Dans l'intervalle $]\pi, 2\pi[$ le sinus est négatif, donc la fonction lg sin $x$ n'est pas définie. 2) Le domaine de définition est constitué des points isolés de la forme $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, où $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. En ces points $y = 0$. Le graphe est constitué de points de l'axe des abscisses. 3) La fonction est définie sur l'axe numérique tout entier à l'exception des points $x = \pi n$, où $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

158. $\omega = 2 \arcsin \frac{\alpha}{2\pi}$. 159. $\gamma = \operatorname{arctg} \frac{a(l \cos \varphi + b \sin \varphi)}{b^2 + l^2 + a(b \cos \varphi - l \sin \varphi)}$.

160. $\alpha = \arccos \left[1 - \frac{x(2a - x)}{2R(a + R - x)}\right]$.

161. 1) $-1 \leqslant x \leqslant 1$; 2) $0 \leqslant x \leqslant 1$; 3) $0 \leqslant x \leqslant 1$; 4) $-1 \leqslant x \leqslant 0$; 5) $0 < x < \infty$; 6) $-\infty < x < 0$; 7) $0 \leqslant x < \infty$; 8) $-\infty < x \leqslant 0$; 9) $-\infty < x < 1$; 10) $1 < x < \infty$.

162. 1) $-1 \leqslant x \leqslant 1$; 2) $0 \leqslant x \leqslant 1$; 3) $-\infty < x < \infty$; 4) partout définie sauf pour $x = 0$.

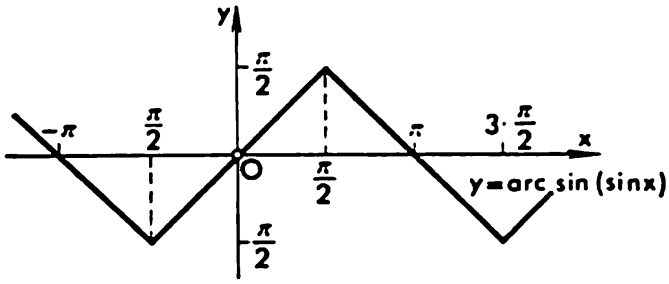


Fig. 82

163*. Période $2\pi$. Voir graphe sur la fig. 82. *Indication.* Par définition de la fonction arcsin $x$ on a $y = \arcsin(\sin x) \equiv x$ sur l'intervalle $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$. Pour représenter le graphe de la fonction sur l'intervalle $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 3\frac{\pi}{2}$ on pose $z = x - \pi$, d'où $x = \pi + z$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant z \leqslant \frac{\pi}{2}$,

$$y = \arcsin(\sin x) = \arcsin \sin(z + \pi) = -\arcsin(\sin z) = -z;$$

$$y = \pi - x, \quad \text{etc.}$$

167. $y_{\max} \approx 15$, $y_{\min} \approx 5{,}5$; la fonction commence à décroître pour $x = -2$. $x \approx -3{,}6$ est un zéro de la fonction.

169. $y = \frac{1}{32}(267 - 10x - x^2)$ ou $y = -0{,}0312x^2 - 0{,}3125x + 8{,}344$; les zéros de la fonction sont $x_1 \approx -22{,}09$, $x_2 \approx 12{,}09$. Pour calculer les racines avec une précision de 0,01, il faut se donner les coefficients à 0,0001 près.

170. $x_1 \approx 2{,}60$ cm, $x_2 \approx 7{,}87$ cm.

171. $x_1 \approx -2{,}3$, $x_2 \approx 3$; les autres racines sont imaginaires.

172*. $\alpha$ doit être choisi de façon à annuler le coefficient de $x'^3$; $x_1 \approx -3{,}6$, $x_2 \approx -2{,}9$, $x_3 \approx 0{,}6$, $x_4 \approx 4{,}8$.

173. $x_1 \approx 0{,}59$, $x_2 \approx 3{,}10$, $x_3 \approx 6{,}29$, $x_4 \approx 9{,}43$; en général $x \approx \pi n$ $(n > 2)$.

174. $x_1 \approx -0{,}57$, $y_1 \approx -1{,}26$; $x_2 \approx -0{,}42$, $y_2 \approx 1{,}19$; $x_3 \approx 0{,}46$, $y_3 \approx 0{,}74$, $x_4 \approx 0{,}54$, $y_4 \approx -0{,}68$.

## Chapitre II

176. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1, n \geqslant 4$. 177. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0; n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

178. $n = 19\,999$. 179. $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$; $n \geqslant 1000$. La grandeur $v_n$ est soit plus grande, soit plus petite, soit égale à sa limite. (Elle est égale à sa limite pour $n = 2k + 1$, où $k = 0, 1, 2, \ldots$)

180. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$; $n \geqslant 14$; $n \geqslant \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$.

181. $n \geqslant \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5-6\varepsilon}{\varepsilon}}$, si $\varepsilon \leqslant \frac{5}{6}$; $n = 0$, si $\varepsilon > \frac{5}{6}$.

182. $n \geqslant \frac{a}{\sqrt{\varepsilon(2+\varepsilon)}}$; la suite $u_n$ est décroissante.

183. $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$; $v_n$ atteint sa limite pour $n = m + 1$ car à partir de cette valeur de $n$ on a $v_n = 0$. 185. 0. 186. 1) N'existe pas. 2) Existe. 189. Si $a = 0$ cette limite peut égaler tout nombre ou ne pas exister. 190. $\delta < \sqrt{4+\varepsilon} - 2$; $\delta < 0{,}00025$. 191. $\delta < 2 - \sqrt{3}$.

192. $\delta < \frac{2}{13}$. 193. $\left|x - \frac{\pi}{2}\right| < \frac{\pi}{2} - \arcsin 0{,}99 \approx 0{,}136$.

194. $N \geqslant \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$, si $\varepsilon \leqslant 1$; $N = 0$, si $\varepsilon > 1$.

195. $N \geqslant \sqrt{\frac{4}{\varepsilon} - 3}$, si $\varepsilon \leqslant \frac{4}{3}$; $N = 0$, si $\varepsilon > \frac{4}{3}$. 196. $n > \frac{N-1}{2}$.

197. $u_n$ est un infiniment grand de même signe que la différence de deux termes consécutifs de la progression. Cette assertion est valable pour une progression géométrique si et seulement si la raison de la progression est supérieure à 1 en valeur absolue.

198. $-\frac{1}{10^4+2} < x < \frac{1}{10^4-2}$. 199. $\frac{3000}{1001} < x < \frac{3000}{999}$.

200. $\delta < \frac{1}{\sqrt{N}} = 0{,}01$. 201. $\log_2 0{,}99 < x < \log_2 1{,}01$.

202. $M \geqslant 10^N = 10^{100}$. 203. $\sin x$, $\cos x$ et toutes les fonctions trigonométriques inverses. 205. Non. Oui. 206. Non.

207. 1) Par exemple, $x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ et $x_n = 2\pi n$; 2) Non.

209. Pour $a > 1$ et $x \to +\infty$, la fonction n'est pas bornée (mais n'est pas un infiniment grand); pour $x \to -\infty$ elle tend vers zéro. Si $0 < a < 1$ et $x \to -\infty$ la fonction n'est pas bornée (mais n'est pas un infiniment grand); pour $x \to +\infty$ elle tend vers zéro. Pour $a = 1$ la fonction est bornée sur l'axe numérique tout entier.

210. 1), 3) et 5) non; 2) et 4) oui. 213. $\frac{-1}{10001} < x < \frac{1}{9999}$. 214. $N \geqslant \left(\frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon}\right)^2$.

215. 1) $y = 1 + \frac{1}{x^3-1}$; 2) $y = \frac{1}{2} + \frac{-1}{2(2x^2+1)}$; 3) $y = -1 + \frac{2}{1+x^2}$.

216*. Comparer $u_n$ à la somme de la progression géométrique $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$ $\ldots, \frac{1}{3^n}$. 220. 3. 221. Continue.

222. $f(x) = 9\pi$ pour $0 \leqslant x \leqslant 5$; $f(x) = 4\pi$ pour $5 < x \leqslant 10$; $f(x) = \pi$ pour $10 < x \leqslant 15$. La fonction est discontinue pour $x = 5$ et $x = 10$.

223. $a = 1$. 224. $A = -1$, $B = 1$. 225. $x = 2$; $x = -2$. 226. 2/3.

227. La fonction $y = \frac{\sin x}{x}$ présente au point $x = 0$ une discontinuité non essentielle, la fonction $y = \frac{\cos x}{x}$ une discontinuité de seconde espèce.

228. La fonction est discontinue pour $x = 0$.

229. La fonction présente deux discontinuités: une non essentielle pour $x = 0$ et une de seconde espèce pour $x = \pm 1$.

230. Non. Si $x \to 0$ à droite, alors $f(x) \to \pi/2$, si $x \to 0$ à gauche, alors $f(x) \to -\pi/2$.

231. La fonction est discontinue pour $x = 0$. 232. 0.

234. Non. Si $x \to 1$ à droite, alors $y \to 1$, si $x \to 1$ à gauche, alors $y \to 0$.

235. Si $x \to 0$ à droite, $y \to 1$, si $x \to 0$ à gauche, $y \to -1$.

236. La fonction est discontinue pour $x = 0$ (d scontinuité de première espèce).

237. La fonction présente une discontinuité de première espèce aux points $x = \frac{\pi}{2}(2k + 1)$.

238. La fonction est discontinue pour $x \neq 0$ et continue pour $x = 0$.

239. Les trois fonctions sont discontinues lorsque $x$ est égal à un entier (positif ou négatif) ou à zéro.

241*. Mettre le polynôme sous la forme $x^n \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\right)$ et l'étudier pour $x \to \pm\infty$.

244*. Construire schématiquement le graphe de la fonction $y = \frac{a_1}{x-\lambda_1} + \frac{a_2}{x-\lambda_2} + \frac{a_3}{x-\lambda_3}$ et étudier son comportement au voisinage des points $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$.

245. 1. 246. 1/2. 247. 3. 248. $\infty$. 249. 0. 250. 0. 251. 15/17. 252. 1. 253. 0. 254. 4. 255. 1. 256. 0. 257. 0. 258. 0. 259. 1. 260. 4/3. 261. 1/2. 262. —1/2. 263. —1. 264*. 1. On remarquera que $\frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$. 265. $\frac{1}{2}$. 266. 1. 267. 0. 268. 9. 269. $\frac{3}{4}$. 270. $\infty$. 271. 0. 272. 0. 273. —2/5. 274. 1/2. 275. 6. 276. $\infty$. 277. —1. 278. $\infty$. 279. 0. 280. $m/n$. 281. 0. 282. $\infty$. 283. 1/2. 284. —1. 285. 0. 286. 1/4. 287. —1/2. 288. 100. 289. —1. 290. 1. 291. $\infty$. 292. 0. 293. 0. 294. $\infty$. 295. 4. 296. 1/4. 297. 3. 298. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, si $x > 0$; $\infty$, si $x = 0$. 299. $\frac{1}{3}$. 300. $\frac{2}{3}$. 301. $\frac{1}{4a\sqrt{a-b}}$. 302. $\frac{m}{n}$. 303*. $\frac{1}{2}$. Ajouter puis retrancher 1 au numérateur. 304. —1/4. 305. Une racine tend vers $-c/b$, l'autre vers $\infty$. 306. 0. 307. 0. 308. 0, si $x \to +\infty$; $\infty$, si $x \to -\infty$.

309. 1/2, si $x \to +\infty$; $-\infty$, si $x \to -\infty$.

310. $\frac{a+b}{2}$, si $x \to +\infty$; $\infty$, si $x \to -\infty$.

311. $\pm 5/2$. 312. 0. 313. 1. 314. 3. 315. $k$. 316. $\alpha/\beta$. 317. 2/5.

318. 0, si $n > m$; 1, si $n = m$; $\infty$, si $n < m$.

319. 2/3. 320. 1/3. 321. 1/2. 322. 3/4. 323. $\infty$. 324. —1. 325. 1/2. 326. $\infty$.

327. 0. 328. 1/2. 329. $\infty$. 330. $-3/2$. 331. 1. 332. $\pi/2$. 333. $2/\pi$. 334. $-\frac{a}{\pi}$.

335. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 336. 2. 337. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 338. $-2$. 339. $-2\sin a$. 340. $\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}$. 341. $\cos^3\alpha$.

342. $\frac{\sin 2\beta}{2\beta}$. 343. $-\sin\alpha$. 344. $\frac{2\sin a}{\cos^3 a}$. 345. $\frac{\sqrt{2}}{8}$. 346. 1. 347. 6. 348. $\frac{3}{2}$.

349. $-1$. 350*. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Poser $\arccos x = y$. 351. $\frac{1}{e}$. 352. $\frac{1}{e}$. 353. 1. 354. $e^{mk}$.

355. $e^6$. 356. $e^{-\frac{2}{3}}$. 357. $e^2$. 358. 0, si $x \to +\infty$; $\infty$, si $x \to -\infty$. 359. $\infty$, si $x \to +\infty$; 0, si $x \to -\infty$ 360. 1. 361. $\infty$, si $x \to +\infty$; 0, si $x \to -\infty$. 362. $e^2$. 363. $e$. 364. $\sqrt{e}$. 365. $k$. 366. $1/a$. 367. $a$. 368. $1/e$. 369. $\ln a$. 370. 2/3. 371. $e$. 372*. 3/2; ajouter puis retrancher 1 au numérateur. 373. 2. 374. 1. 375. $a-b$. 376. 1. 377. 0, si $x \to +\infty$; $\infty$, si $x \to -\infty$.

378. 1, si $x \to +\infty$; $-1$, si $x \to -\infty$.

379. 1) $a^n$; 2) 0, si $A \neq 0$, $a^n$, si $A = 0$ et $a \neq 0$; $\infty$, si $A = a = 0$; 3) $\frac{1}{1+A}$.

380. 0, si $x \to +\infty$; $-\infty$, si $x \to -\infty$.

381. Si $a > 1$ la limite est égale à 1 pour $x \to +\infty$, et à 0 pour $x \to -\infty$. Si $a < 1$ c'est l'inverse. Si $a = 1$ la limite est égale à 1/2. 382. Si $a > 1$, la limite est égale à 1, pour $x \to +\infty$ et $a - 1$ pour $x \to -\infty$. Si $a < 1$ c'est l'inverse. Si $a = 1$ la limite est égale à 0.

383. 0. 384. 0. 385. 1. 386. 0. 387. $-\cos a$. 388. 1/12. 389. 1/8.

390*. $\frac{\sin x}{x}$. Multiplier puis diviser par $\sin\frac{x}{2^n}$. 391. 1/2. 392. 0.

393*. $-1/2$. Se servir de la formule $\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a = \operatorname{arctg}\frac{b-a}{1+ab}$.

394. $\frac{1}{2}$.

395*. $\frac{1}{2}$. Remplacer $\arcsin x$ par $\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ et se servir de l'indication de l'exercice 393. 396. $\infty$, si $n < 1$; $e$, si $n = 1$; 1, si $n > 1$.

397*. 1. Remplacer $\cos x$ par $1 - (1 - \cos x)$. 398. $-1/2$. 399. $1/e$. 400. $e$. 401. $e^{ab}$.

402. $v_n$ est d'un plus grand ordre de petitesse.

403. $u_n$ et $v_n$ sont équivalents. 405. Du même ordre.

406. Pour $x = 0$ les grandeurs $\Delta y$ et $\Delta x$ ne sont pas du même ordre. Pour $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ elles sont équivalentes. 407. Non. 408. Du troisième ordre.

409. 1) 2; 2) 1/2; 3) 1; 4) 10. 410. $x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{a^2}{2b^2}}$. 411. $a = k$. 412. Non

414. 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) infiniment petit équivalent; 5) infiniment petit équivalent; 6) 1; 7) infiniment petit équivalent; 8) 2; 9) 2; 10) 1; 11) 2/3; 12) 2.

415. $a^2\sqrt{3}$. 416. $2\pi R^2$; $4R^2$.

418. Le fait que la ligne polygonale tend vers la droite (i.e. ses points se rapprochent de la droite) n'entraîne pas que la longueur de cette ligne tend vers la longueur du segment.

419. $a$. 420. $a$, $\frac{\pi a}{2}$. 421. $2\pi(R + r)$.

422. Le segment et l'angle sont du même ordre 1/2.

425. 1) 10,25; 2) 30,2; 3) 16,125; 4) 40,4; 5) 0,558; 6) 0,145.
426. 1) 10,16; 2) 20,12; 3) 1,02; 4) 4,04. 427. $\ln 1{,}01 \approx 0{,}01$; $\ln 1{,}02 \approx 0{,}02$; $\ln 1{,}1 \approx 0{,}1$; $\ln 1{,}2 \approx 0{,}2$.

## Chapitre III

428. a) 5; b) 5. 429. a) $v = 0{,}25\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$; b) $v = 0{,}55\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$; c) $\frac{t_1+t_2}{1200}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.
430. 75,88; 60,85; 49,03; 48,05.
431. $53{,}9\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$; $49{,}49\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$; $49{,}25\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$; $49{,}005\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_5 = 49{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_{10} = 98{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v = 9{,}8t\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.
432. a) $4\,\frac{\text{g}}{\text{cm}}$; b) $40\,\frac{\text{g}}{\text{cm}}$; c) $4l\,\frac{\text{g}}{\text{cm}}$, où $l$ est la longueur du segment $AM$.
433. 1) $95\,\frac{\text{g}}{\text{cm}}$; 2) a) $35\,\frac{\text{g}}{\text{cm}}$; b) $5\,\frac{\text{g}}{\text{cm}}$; c) $185\,\frac{\text{g}}{\text{cm}}$.
434. 1) $1{,}002\,\frac{\text{cal}}{\text{g}\cdot{}^\circ\text{C}} = 4198\,\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot{}^\circ\text{C}}$; 2) $1{,}013\,\frac{\text{cal}}{\text{g}\cdot{}^\circ\text{C}}$.
435*. Introduire la vitesse angulaire moyenne, puis par passage à la limite déduire la grandeur cherchée.
438. $k = \frac{f'(t)}{f(t)}$, où $k$ est le coefficient de dilatation linéaire.
439. $k = S\,\frac{\varphi'(P)}{\varphi(P)}$. 440. 1) 56; 2) 19; 3) 7,625; 4) 1,261.
441. 1) 4,52; 2) $-0{,}249$; 3) 0,245. 442. a) 6,5; b) 6,1; c) 6,01; d) 6,001.
443. $f'(5) = 10$; $f'(-2) = -4$; $f'\left(-\frac{3}{2}\right) = -3$. 444. 3; 0; 6; $\frac{1}{3}$.
445. $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. 446. Non pour la fonction $f(x) = x^3$. 447. 1.
448. 0,4343. 449. 2,303. 454. 1) 0; 2) 6; 3) $-4$; 4) $k_1 = 2$, $k_2 = 4$.
455. (1, 1); (—1, —1). 456. 1) (0, 0); 2) (1/2, 1/4).
458. $\alpha_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{7}$, $\alpha_2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{13}$. 459. $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, $\alpha_2 = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$.
460. arctg 3. 461. $y = 12x - 16$; $x + 12y - 98 = 0$; la sous-tangente est égale à $\frac{2}{3}$, la sous-normale à 96.
462. $x = 0$ et $x = 2/3$.
463. 1) (2, 4); 2) (—3/2, 9/4); 3) (—1, 1) et (1/4, 1/16).
466. 1) $6x-5$; 2) $4x^3-x^2+5x-0{,}3$; 3) $2ax+b$; 4) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; 5) $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}$; 6) $\frac{0{,}2}{\sqrt[4]{y^3}}-10y^2-\frac{0{,}4}{y^3}$; 7) $\frac{1}{n}-\frac{n}{x^2}+\frac{2x}{m^2}-\frac{2m^2}{x^3}$; 8) $\frac{3}{2}m\sqrt{x}+\frac{7}{6}n\sqrt[6]{x}+\frac{1}{2}p\frac{1}{\sqrt{x^3}}$; 9) $\frac{2mz+n}{p+q}$; 10) $-\frac{1}{15}t^{-\frac{5}{3}}+7{,}28t^{-2{,}4}-\frac{0{,}5}{t\sqrt[5]{t}}$; 11) $2x-1$; 12) $3{,}5x^2\sqrt{x}-1+\frac{1}{2\sqrt{x}}$; 13) $3v^2+2v-1$; 14) $6(a-x)$; 15) $\frac{2ax}{a+b}+\frac{b}{a+b}-\frac{c}{(a+b)x^2}$; 16) $\frac{3m(mu+n)^2}{p^3}$. 467. $f(1)=1$; $f'(1)=2$; $f(4)=8$; $f'(4)=2{,}5$; $f(a^2)=3a^2-2|a|$; $t'(a^2)=3-\frac{1}{|a|}$. 468. $f(-1)=-5$; $f'(-1)=-8$; $f'(2)=\frac{19}{16}$; $f'\left(\frac{1}{a}\right)=3a^4+10a^3-a^2$. 469. 13. 471. 1) $4x^3-3x^2-8x+$

$+9$; 2) $7x^6-10x^4+8x^3-12x^2+4x+3$; 3) $-\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)$; 4) $\frac{1}{9}\left(\frac{60}{\sqrt[6]{x}}-\right.$ $\left.-\frac{5}{x\sqrt[6]{x^5}}+\frac{\sqrt{3}}{x\sqrt[3]{x}}-48\sqrt[6]{27x^2}\right)$; 5) $\frac{1+12x}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{9\sqrt[3]{x^2}+10x\sqrt[3]{x}+36x\sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[3]{x^2}}$; 6) $2x(3x^4-28x^2+49)$; 7) $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\sqrt{2x}+2\sqrt{3x}+2\sqrt{6x}+3x\sqrt{6}}{2\sqrt{x}}$.

472. $-\frac{2}{(x-1)^2}$. 473. $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$. 474. $\frac{3t^2-6t-1}{(t-1)^2}$.

475. $\frac{v^4+2v^3+5v^2-2}{(v^2+v+1)^2}$. 476. $\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$. 477. $-\frac{4x}{3(x^2-1)^2}+1+2x-$ $-3x^2$. 478. $\frac{2v^4(v^3-5)}{(v^3-2)^2}$. 479. $-\frac{6x^2}{(x^3+1)^2}$. 480. $-\frac{6x^2}{(x^3-1)^2}$. 481. $\frac{2v-1}{a^2-3}$.

482. $-\frac{3x^2}{\sqrt{\pi}}$. 483. $-\frac{2t+1}{(t^2+t+1)^2}$. 484. $\frac{3-2t}{(t^2-3t+6)^2}$. 485. $\frac{4x^3(2b^2-x^2)}{(b^2-x^2)^2}$.

486. $\frac{1+2x+3x^2-2x^3-x^4}{(1+x^3)^2}$. 487. $\frac{6x(1+3x-5x^3)}{(1-x^2)^2(1-2x^3)^2}$. 488. $\frac{a+2bx}{m(a+bm)}$.

489. $-\frac{a^2b^2c^2[(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)+(x-a)(x-b)]}{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}$. 490. $f'(0)=0$; $f'(1)=6$. 491. $F'(0)=11$; $F'(1)=2$; $F'(2)=-1$. 492. $F'(0)=-\frac{1}{4}$; $F'(-1)=$ $=\frac{1}{2}$; 493. $s'(0)=\frac{3}{25}$; $s'(2)=\frac{17}{15}$. 494. $y'(1)=16$; $y'(a)=15a^2+\frac{2}{a^3}-1$.

495. $\rho'(2)=\frac{5}{9}$; $\rho'(0)=1$. 496. $\varphi'(1)=-\frac{a+1}{4}$. 497. $z'(0)=1$. 498. 1) $4x^3-$ $-3x^2(a+b+c+d)+2x(ab+ac+ad+bc+db+cd)-(abc+abd+acd+bcd)$; 2) $8x(x^2+1)^3$; 3) $-20(1-x)^{19}$; 4) $60(1+2x)^{29}$; 5) $-20x(1-x^2)^9$; 6) $5(15x^2+$ $+2x)(5x^3+x^2-4)^4$; 7) $6(3x^2-1)(x^3-x)^5$; 8) $6\left(14x+\frac{4}{x^2}\right)\left(7x^2-\frac{4}{x}+6\right)^5$; 9) $4\left(3t^2+\frac{3}{t^4}\right)\left(t^3-\frac{1}{t^3}+3\right)^3$; 10) $-\frac{4(x+1)}{(x-1)^3}$; 11) $\frac{5(x^2+2x-1)(1+x^2)^4}{(1+x)^6}$; 12) $24(x^2+x+1)(2x^3+3x^2+6x+1)^3$. 499. $\frac{(s+2)(s+4)}{(s+3)^2}$.

500. $\frac{(3-t)t^2}{(1-t)^3}$. 501. $\frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{2x})^2}$. 502. $-\frac{4}{3\sqrt[3]{4x^2}(1+\sqrt[3]{2x})^2}$.

503. $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. 504. $-\frac{4(1-2\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}$. 505. $\frac{mv^{m-1}}{(1-v)^{m+1}}$.

506. $-\frac{4(2x-1)}{(x^2-x+1)^3}$. 507. $\frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$. 508. $-\frac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^4}}$.

509. $\frac{2x^3+4x^7}{-x^4-x^8)^3}$. 510. $\frac{3-x}{2\sqrt{(1-x)^3}}$. 511. $\frac{x(x^2+2a^2)}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$.

512. $-\frac{v+\sqrt{a^2+v^2}}{a^2\sqrt{a^2+v^2}}$. 513. $-\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^4}}-\frac{15x}{2\sqrt[4]{(x^2+2)^7}}$. 514. $u'(1)=9$.

515. $y'(2)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. 516. 0. 517. $\cos x-\sin x$. 518. $\frac{1-\cos x-x\sin x}{(1-\cos x)^2}$.

519. $\frac{x-\sin x\cdot\cos x}{x^2\cos^2 x}$. 520. $\varphi\cos\varphi$. 521. $(\alpha\cos\alpha-\sin\alpha)\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\sin^2\alpha}\right)$.

522. $\frac{1}{1+\cos t}$. 523. $\frac{\sin x+\cos x+x(\sin x-\cos x)}{1+\sin 2x}$.

524. $\frac{(1+\operatorname{tg} x)(\sin x+x\cos x)-x\sin x\sec^2 x}{(1+\operatorname{tg} x)^2}$. 525. $-\sin 2x$. 526. $\operatorname{tg}^3 x\sec^2 x$.

527. $-\sin^3 x$. 528. $\frac{3}{2}\sin 2x(2-\sin x)$. 529. $\operatorname{tg}^4 x$. 530. $2x\frac{\sin x}{\cos^3 x}$.

531. $-\frac{16\cos 2x}{\sin^3 2x}$. 532. $3\cos 3x$. 533. $-\frac{a}{3}\sin\frac{x}{3}$. 534. $9\cos(3x+5)$.

535. $\frac{1}{2\cos^2\frac{x+1}{2}}$. 536. $\frac{1}{\sqrt{1+2\operatorname{tg} x}\cdot\cos^2 x}$. 537. $-\frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}$. 538. $\cos(\sin x)\times$

$\times\cos x$. 539. $-12\cos^2 4x\sin 4x$. 540. $\frac{1}{4\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\cdot\cos^2\frac{x}{2}}$.

541. $\frac{x\cos\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$.

542. $-\frac{2x}{3\sin^2\sqrt[3]{1+x^2}\cdot\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}$. 543. $4(1+\sin^2 x)^3\sin 2x$.

544. $\frac{x^2-1}{2x^2\cos^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\sqrt{1+\operatorname{tg}\left(x+\frac{1}{x}\right)}}$.

545. $\frac{\sin\left(2\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$.

546. $-3\sin 3x\sin(2\cos 3x)$. 548. $\arcsin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

549. $\frac{\pi}{2(\arccos x)^2\sqrt{1-x^2}}$. 550. $\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

551. $\arcsin x$. 552. $-\frac{1}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$.

553. $\sin x\cdot\operatorname{arctg} x+x\cos x\cdot\operatorname{arctg} x+\frac{x\sin x}{1+x^2}$.

554. $-\frac{x+\arccos x\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}$.

555. $\frac{\operatorname{arctg} x}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$. 556. 0.

557. $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$. 558. $-\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}$.

559. $\frac{\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

560. $\frac{2x}{\operatorname{arctg} x}-\frac{x^2}{(1+x^2)(\operatorname{arctg} x)^2}$.

561. $\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$. 562. $-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+2x-2x^2}}$.

563. $\frac{2x}{1+x^4}$. 564. $-\frac{2}{|x|\sqrt{x^2-4}}$.

565. $\frac{\cos x}{|\cos x|}$. 566. $-\frac{2\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{1+x^2}$.

567. $\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-(\arccos x)^2}}$. 568. $-\frac{1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}$.

569. $\frac{x+1}{8\sqrt[4]{(\arcsin\sqrt{x^2+2x})^3}\sqrt{(1-2x-x^2)(x^2+2x)}}$.

570. $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha\cos x}$. 571. $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\cos x}$.

572. $\frac{1}{2(1+x^2)}$. 573. $2x\log_3 x+\frac{x}{\ln 3}$.

574. $\frac{2\ln x}{x}$. 575. $\frac{\ln x+1}{\ln 10}$. 576. $\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$.

577. $\frac{x\ln x-x+1}{x\ln^2 x}\ln 2$. 578. $\sin x\ln x+x\cos x\ln x+\sin x$.

579. $-\frac{1}{x\ln^2 x}$. 580. $\frac{1-n\ln x}{x^{n+1}}$. 581. $-\frac{2}{x(1+\ln x)^2}$.

582. $\frac{1+x^2-2x^2\ln x}{x(1+x^2)^2}$. 583. $x^{n-1}(n\ln x+1)$.

584. $\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$. 585. $-\frac{2}{1-2x}$.

586. $\frac{2x-4}{x^2-4x}$. 587. $\operatorname{ctg} x$. 588. $\frac{2x}{(x^2-1)\ln 3}$.

589. $\frac{2}{\sin 2x}$. 590. $-\frac{2}{\arccos 2x\sqrt{1-4x^2}}$.

591. $4\ln^3\sin x\cdot\operatorname{ctg} x$. 592. $\frac{a}{(ax+b)[1+\ln^2(ax+b)]}$.

593. $n(1+\ln\sin x)^{n-1}\operatorname{ctg} x$. 594. $\frac{1}{x\log_5 x\log_3(\log_5 x)\ln 2\ln 3\ln 5}$.

595. $\frac{x}{\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}\,(2+x^2)\sqrt{1+x^2}}$. 596. $\frac{6x^2\arcsin[\ln(a^3+x^3)]}{(a^3+x^3)\sqrt{1-\ln^2(a^3+x^3)}}$.

597. $\frac{\operatorname{ctg}\frac{x+3}{4}}{12\sqrt[3]{\ln^2\sin\frac{x+3}{4}}}$. 598. $2^x\ln 2$. 599. $10^x\ln 10$. 600. $-\frac{\ln 3}{3^x}$.

601. $4^{-x}(1-x\ln 4)$. 602. $10^x(1+x\ln 10)$. 603. $e^x(1+x)$. 604. $\frac{1-x}{e^x}$.

605. $\frac{2^x(\ln 2-1)+3x^2-x^3}{e^x}$. 606. $e^x(\cos x-\sin x)$.

607. $\frac{e^x}{\sin^2 x}(\sin x-\cos x)$. 608. $-\frac{\sin x+\cos x}{e^x}$.

609. $\frac{(\ln x-1)\ln 2}{\ln^2 x}\,2^{\frac{x}{\ln x}}$. 610. $3x^2-3^x\ln 3$. 611. $\frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}$.

612. $e^x(x^2+1)$. 613. $\frac{2e^x}{(1-e^x)^2}$. 614. $-\frac{2\cdot 10^x\ln 10}{(1+10^x)^2}$.

615. $\frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$. 616. $e^x(\cos x+\sin x+2x\cos x)$. 617. $-e^{-x}$.

618. $2\cdot 10^{2x-3}\ln 10$. 619. $\frac{e^{\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x+1}}$. 620. $2^x\ln 2\cdot\cos(2^x)$.

621. $3^{\sin x}\cos x\cdot\ln 3$. 622. $3\sin^2 x\cos x\cdot a^{\sin^3 x}\ln a$.

623. $\frac{2e^{\arcsin 2x}}{\sqrt{1-4x^2}}$. 624. $2^{3x}\cdot 3^x\ln 2\cdot\ln 3$. 625. $\frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{2x\sqrt{\ln x}}$.

626. $\cos(e^{x^2+3x-2})\,e^{x^2+3x-2}(2x+3)$.

627. $-12\cdot 10^{1-\sin^4 3x}\ln 10\cdot\sin^3 3x\cos 3x$.

628. $\frac{(2ax+b)\,e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}}{2(ax^2+bx+c)\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}$.

629. $\frac{\operatorname{ctg}\sqrt[3]{\operatorname{arctg}(e^{3x})}\cdot e^{3x}}{(1+e^{6x})\sqrt[3]{[\operatorname{arctg}(e^{3x})]^2}}$. 630. $-2ab^2xe^{-b^2x^2}$.

631. $\frac{2}{a^2}xe^{\frac{-x^2}{a^2}}(a^2-x^2)$. 632. $Ae^{-k^2x}[\omega\cos(\omega x+\alpha)-k^2\sin(\omega x+\alpha)]$.

633. $a^xx^a\left(\frac{a}{x}+\ln a\right)$. 634. $3\operatorname{sh}^2 x\operatorname{ch} x$. 635. $\operatorname{th} x$. 636. $\frac{1}{\operatorname{ch} 2x}$.

637. $-\frac{2x}{\operatorname{ch}^2(1-x^2)}$. 638. $2\operatorname{sh} 2x$. 639. $\operatorname{sh}(\operatorname{sh} x)\operatorname{ch} x$. 640. $\frac{\operatorname{sh} x}{2\sqrt{\operatorname{ch} x}}$.

641. $e^{\operatorname{ch}^2 x}\operatorname{sh} 2x$. 642. $\frac{1}{x\operatorname{ch}^2(\ln x)}$. 643. $x\operatorname{ch} x$. 644. $\frac{3\operatorname{th} x}{2\operatorname{ch}^2 x\sqrt[4]{1+\operatorname{th}^2 x}}$.

645. $\frac{1}{4\operatorname{ch}^4\frac{x}{2}}$. 646. $\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x}}$. 647. $\frac{1}{1-\operatorname{sh}^4 x}$.

648. $\frac{x(4+\sqrt{x})\operatorname{sh} 2x+2(2x^2\sqrt{x}-1)\operatorname{ch} 2x}{2x^2}$.

649. $\frac{xe^{3x}}{\operatorname{sh}^2 x}[(3x+2)\operatorname{sh} x-x\operatorname{ch} x]$.

650. $x^{x^2+1}(2\ln x+1)$. 651. $x^{x^x}\cdot x^x\left(\ln^2 x+\ln x+\frac{1}{x}\right)$.

652. $(\sin x)^{\cos x}\left(\frac{\cos^2 x}{\sin x}-\sin x\ln\sin x\right)$. 653. $(\ln x)^x\left(\frac{1}{\ln x}+\ln\ln x\right)$.

654. $2\sqrt[x]{(x+1)^2}\left[\frac{1}{x(x+1)}-\frac{\ln(x+1)}{x^2}\right]$.

655. $x^2e^{x^2}\sin 2x\,(3+2x^2+2x\operatorname{ctg}2x)$. 656. $-\frac{2(x-2)(x^2+11x+1)}{3(x-5)^4\sqrt[3]{(x+1)^2}}$.

657. $2x^{\ln x-1}\ln x$. 658. $\frac{57x^2-302x+361}{20(x-2)(x-3)}\cdot\frac{(x+1)^2\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$.

659. $\frac{1}{2}\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}\left(\frac{1}{x}+\operatorname{ctg}x-\frac{1}{2}\cdot\frac{e^x}{1-e^x}\right)$.

660. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\,[(\arcsin x)^2-1]}\sqrt{\frac{1-\arcsin x}{1+\arcsin x}}$. 661. $x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$.

662. $x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$. 663. $\left(\frac{x}{x+1}\right)^x\left(\frac{1}{x+1}+\ln\frac{x}{x+1}\right)$.

664. $x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}(2+\ln x)$. 665. $(x^2+1)^{\sin x}\left[\frac{2x\sin x}{x^2+1}+\cos x\ln(x^2+1)\right]$.

666. $\frac{x^4+6x^2+1}{3x(1-x^4)}\sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$. 667. $\frac{(1+\sqrt[3]{x})^2}{\sqrt[3]{x^2}}$.

668. $\frac{a}{k\cos^2\left(\frac{x}{k}+b\right)}$. 669. $\frac{p}{2\sqrt{1+\sqrt{2px}}\sqrt{2px}}$.

670. $\frac{2x-3}{1+(x^2-3x+2)^2}$. 671. $\frac{1+\sin x}{(x-\cos x)\ln 10}$.

672. $\frac{3}{2}\sin 2x(\cos x-2)$. 673. $\sec^2\frac{x}{5}$. 674. $-\frac{1+2\sqrt{x}}{6\sqrt{x}\sqrt[3]{(x+\sqrt{x})^4}}$.

675. $2\sin\frac{x}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\sin 2x$. 676. $e^{\cos x}(\cos x-\sin^2 x)$.

677. $\frac{x^4(7x^6-40)}{\sqrt[3]{(x^6-8)^2}}$. 678. $e^{-x^2}\left(\frac{1}{x}-2x\ln x\right)$.

679. $\frac{5(x-1)}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^9$. 680. $-\frac{1}{1+x^2}$. 681. $2x^2e^{2x+3}$.

682. $\frac{2\sin 2x}{\cos^2 2x}$. 683. $\frac{1+x^2}{1+x^2+x^4}$. 684. $-\frac{2(x\cos x+\sin x)}{x^2\sin^2 x}$.

685. $\frac{1}{3}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\sin\frac{2x}{3}-\frac{1}{2}\sin^2\frac{x}{3}\operatorname{cosec}^2\frac{x}{2}$.

686. $-\frac{4(31x^5+18)}{27x^5\sqrt[9]{(4x^5+2)^8}}$. 687. $\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

688. $\operatorname{arctg}\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$. 689. $\frac{\operatorname{tg}x(1+2\operatorname{tg}^2 x)}{\cos^2 x\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x}}$.

690. $\frac{\cos 2x}{x}-2\sin 2x\ln x$. 691. $\frac{1+x^4}{1+x^6}$. 692. $\frac{n\cos x}{\sqrt{1-n^2\sin^2 x}}$.

693. $\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x-\sin^2 x}}$. 694. $\sin^5 3x\cos^3 3x$. 695. $\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

696. $-\frac{1}{2}\sin\frac{\arcsin x}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 697. $\frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$.

698. $\frac{3}{2\sqrt{3x-9x^2}}$. 699. $\frac{\ln x-2}{x^2}\sin\left[2\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)\right]$.

700. $\frac{2x-\cos x}{(x^2-\sin x)\ln 3}$. 701. $-\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$.

702. $-\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}(x+\sqrt{1-x^2})}$. 703. $\arcsin(\ln x)+\frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

704. $-\frac{2e^x}{(1+e^x)^2}\sec^2\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)$. 705. $-\frac{2\sin^3 x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$.

706. $-0{,}8\left(\cos\frac{2x+1}{2}-\sin 0{,}8x\right)\left(\sin\frac{2x+1}{2}+0{,}8\cos 0{,}8x\right)$.

707. $10^{\sqrt{x}}\left(1+\frac{\sqrt{x}}{2}\ln 10\right)$. 708. $-\frac{4}{\operatorname{tg}2x\sin^2 2x}$.

709. $-\frac{1}{(x^2+2x+2)\operatorname{arctg}\frac{1}{1+x}}$. 710. $-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

711. $\frac{x+2}{2\sqrt{x+3}\sqrt[3]{(1+x\sqrt{x+3})^2}}$. 712. $\frac{x(8+9\sqrt{x})}{4\sqrt{1+\sqrt{x}}}$.

713. $-\frac{\sin 2x}{2\sqrt{(1+\sin^2 x)^3}}$. 714. $3x^2\operatorname{arctg}x^3+\frac{3x^5}{1+x^6}$.

715. $\frac{\operatorname{ctg}x\ln\cos x+\operatorname{tg}x\ln\sin x}{\ln^2\cos x}$. 716. $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

717. $\frac{4}{(1-4x)^2}\left(\sqrt{\frac{1-4x}{1+4x}}+\arcsin 4x\right)$. 718. $-\frac{e^{\frac{1}{\ln x}}}{x\ln^2 x}$. 719. $\frac{1}{e^x-1}$.

720. $10^{x\operatorname{tg}x}\ln 10\left(\operatorname{tg}x+\frac{x}{\cos^2 x}\right)$. 721. $2\sin x(x\sin x\cos x^2+\cos x\sin x^2)$.

722. $\frac{2\sin x}{\cos 2x\sqrt{\cos 2x}}$. 723. $\frac{2-3x-x^3}{2(1-x)(1+x^2)}\sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$. 724. $\frac{x^2}{1-x^4}$.

725. $2^{\frac{x}{\ln x}}\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}\ln 2$. 726. $\sqrt{\frac{a-x}{x-b}}$. 727. $-\frac{2(2\cos^2 x+1)}{\sin^2 2x}$.

728. $-\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$. 729. $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$. 730. $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

731. $-\cos 2x$. 732. $\frac{x^2}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$. 733. $(a^2+1)\sin xe^{ax}$.

734. $e^{1-\cos x}(1+x\sin x)$. 735. $\frac{2e^{-2x}}{(1+e^{-4x})(\operatorname{arctg}e^{-2x})^2}$. 736. $10e^x\sin 3x$.

737. $9x^2\arcsin x$. 738. $\frac{e^{-\sqrt{x}}}{4\sqrt{x}\sqrt{(1+e^{-\sqrt{x}})^3}}$. 739. $\frac{x}{\sqrt{2+4x-x^2}}$.

740. $\dfrac{(\cos x-\sin x)(e^x+e^{-x})}{e^x\cos x+e^{-x}\sin x}$. 741. $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

742. $\dfrac{\sin(x-\cos x)(1+\sin x)}{\cos^2(x-\cos x)}$. 743. $e^x\sin x\cos^3 x\,(1+\operatorname{ctg} x-3\operatorname{tg} x)$.

744. $\dfrac{54\sqrt[5]{x^4}}{55\sqrt[11]{(9+6\sqrt[5]{x^9})^{10}}}$. 745. $\dfrac{1}{\sqrt{e^{2x}+4e^x+1}}$.

746. $\dfrac{e^{\operatorname{arctg}\sqrt{1+\ln(2x+3)}}}{(2x+3)[2+\ln(2x+3)]\sqrt{1+\ln(2x+3)}}$.

747. $\dfrac{e^{x^2}}{(e^x-e^{-x})^2}[2x(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})]$.

748. $\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin^2 x}$. 749. $\dfrac{40}{2x-3\sqrt{1-4x^2}}$. 750. $\dfrac{x^5+1}{x^4(x^2+1)}$.

751. $\dfrac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}$. 752. $\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{1-x^2}+\operatorname{ctg} x$.

753. $\dfrac{(1+2x^2)\sin x+x(1+x^2)\cos x}{\sqrt{1+x^2}}$. 754. $\dfrac{(x^2-32x-73)(3-x)^3}{2(x+1)^6\sqrt{x+2}}$.

755. $\dfrac{3e^{\sqrt{x}}(2+\sqrt{x})}{10\sqrt[5]{(1+xe^{\sqrt{x}})^2}}$. 756. $\left(2x-\dfrac{1}{1+x^2}\right)\dfrac{e^{x^2-\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}\ln x+1}}{\sqrt{x}}$.

757. $\dfrac{1}{\cos^5 x}$. 758. $\dfrac{e^x\operatorname{arctg} x}{\ln^5 x}\left[1+x+\dfrac{x}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}-\dfrac{5}{\ln x}\right]$.

759. $\dfrac{(1-x^2)e^{3x-1}\cos x}{(\arccos x)^3}\left[\dfrac{3-2x-3x^2}{1-x^2}-\operatorname{tg} x+\dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}\arccos x}\right]$.

760. $4\sqrt{(x^2+a^2)^3}$. 761. $(\arcsin x)^2$. 762. $\dfrac{e^{-x}-e^x}{e^{-x}+e^x}$.

763. $\dfrac{1}{ae^{mx}+be^{-mx}}$. 764. $\dfrac{1}{x^3+1}$. 765. $\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

766. $(\operatorname{tg} 2x)^{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}\left(\dfrac{4\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{\sin 4x}-\dfrac{\ln\operatorname{tg} 2x}{2\sin^2\frac{x}{2}}\right)$.

767. $\dfrac{3x^2+10x+20}{15(x^2+4)\sqrt[3]{(x-5)^2\sqrt[5]{x^2+4}}}$. 768. $\dfrac{1}{x^4+x^2+1}$.

769. $-\dfrac{2nx^{n-1}}{x^{2n}+1}$, si $n$ est pair, et $-\dfrac{2nx^n}{|x|(x^{2n}+1)}$, si $n$ est impair.

770. $\dfrac{24x^3}{(1+8x^3)^2}$. 774. a) $\dfrac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$;

b) $\dfrac{2-n(n+1)x^{n-1}+2(n^2-1)x^n-n(n-1)x^{n+1}}{(1-x)^3}$. *Indication*: se servir de la valeur de la somme $x+x^2+\ldots+x^n$.

776. $\sqrt{1-y^2}\,e^{-\arcsin y}$ et $\dfrac{\cos\ln x}{x}$. 777. $\dfrac{1}{3(s^2-1)}$. 779. $\dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$.

780. $\alpha'(x)=\frac{1}{x[1+\ln\alpha(x)]}$.

781. $(\operatorname{Arsh} x)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; $(\operatorname{Arch} x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; $(\operatorname{Arth} x)'=\frac{1}{1-x^2}$.

782. $\frac{e^t}{1-t}$. 783. $\frac{-(1+x^4)^2}{8x^3}$; $-\frac{1}{2\sqrt[4]{(1-y)^3(1+y)^5}}$.

784. $\frac{1}{3y^2-4}$. 785. $\frac{1}{2^s\ln 2}\sqrt{1-2^{2s}}$, $\frac{1}{\ln 2}\operatorname{ctg} t$. 789. $-\sqrt{2}$.

790. $-\frac{1}{a}$. 791. $-\frac{1}{4}$. 792. $-\frac{b^2x}{a^2y}$. 793. $-\sqrt{\frac{y}{x}}$. 794. $\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$.

795. $\frac{3a^2\cos 3x+y^2\sin x}{2y\cos x}$. 796. $\frac{2a}{3(1-y^2)}$. 797. $\frac{y}{y-x}$.

798. $\frac{x}{y}\cdot\frac{y^2-2x^2}{2y^2-x^2}$. 799. $-\frac{3x^2+2axy+by^2}{ax^2+2bxy+3y^2}$.

800. $-\frac{y\cos^2(x+y)(\cos(xy)-\sin(xy))-1}{x\cos^2(x+y)(\cos(xy)-\sin(xy))-1}$. 801. $2^{x-y}\frac{2^y-1}{1-2^x}$.

802. $\frac{1}{2(1+\ln y)}$. 803. $\frac{\sqrt{1-y^2}(1-\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}(1-\sqrt{1-y^2})}$. 804. $\frac{y^2-xy\ln y}{x^2-xy\ln x}$.

805. $-\frac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$. 806. $-\frac{1+y\sin(xy)}{x\sin(xy)}$. 807. $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$.

808. $\frac{e^y}{2-y}$. 809. $\frac{\sin y}{2\sin 2y-\sin y-x\cos y}$. 810. $\frac{\sqrt{1-k^2}}{1+k\cos x}$.

811. $\frac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}$. 812. $\frac{1+y^2}{y^2}$. 814. (2, 4).

816. $y+4x+4=0$; $8y-2x+15=0$; la sous-tangente est égale à 1/2; la sous-normale à $-8$.

819. a) $t_1=0$, $t_2=8$; b) $t_1=0$, $t_2=4$, $t_3=8$.

820. $181{,}5\cdot 10^3$ ergs. 821. $\omega=13$ rad/s. 822. $\omega=2\pi$ rad/s. 823. $\omega=(2at-b)$ rad/s; la vitesse s'annulle pour $t=\frac{b}{2a}$ s. 824. 23 $A$. 825. (0, 0); (1, 1); (2, 0). 827. (1, 0); (—1, —4). 828. $y=2x-2$; $y=2x+2$. 829. $3x+y+6=0$. 830. La tangente $y-y_0=(x-x_0)\cos x_0$; la normale $y-y_0=-(x-x_0)\sec x_0$. 831. La tangente $x_0(y-y_0)=x-x_0$; la normale $(y-y_0)+x_0(x-x_0)=0$. 832. La tangente $x+2y=4a$; la normale $y=2x-3a$. 833. La tangente $y-y_0=\frac{x_0^2(3a-x_0)}{y_0(2a-x_0)^2}(x-x_0)$; la normale $y-y_0=-\frac{y_0(2a-x_0)^2}{x_0^2(3a-x_0)}(x-x_0)$. 835. Les sous-tangentes sont respectivement égales à $x/3$; $2x/3$ et $-2x$; les sous-normales respectivement égales à $-3x^5$; $-3x^2/2$ et $1/2x^2$. 836. $y=\frac{x_0}{2a}\left(x-\frac{x_0}{2}\right)$; $y-y_0=-\frac{2a}{x_0}(x-x_0)$.

837. $2x-y+1=0$. 838. $27x-3y-79=0$.
839. $2x-y-1=0$. 840. $4x-4y-21=0$. 842. 3,75.
844. $x+25y=0$; $x+y=0$. 845. (0, 1). 846. $y=x$.
848. $x-y-3e^{-2}=0$. 849. $2/\sqrt{5}$. 850. $(1+\sqrt{3}/2;\ 1)$.
857. $2x-y\pm 1=0$.

858. Si $y = f(x)$ est l'équation de la courbe donnée, celle du lieu géométrique cherché sera $y = xf'(x)$. a) La parabole $y^2 = 1/2\, px$; b) la droite parallèle à l'axe $Ox$; $y = \frac{1}{\ln b}$; c) la courbe de Kapp $y\sqrt{a^2-x^2} + x^2 = 0$; d) la circonférence $x^2 + y^2 = a$.

859. 1) $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{18}{31}$; 2) $\operatorname{arctg} \frac{8}{15}$.

860. 1) arctg 3. 2) 45°. 861. 90°. 862. 45° et 90°.

863. arctg 3. 864. arctg $(2\sqrt{2})$. 865. Pour $n$ impair la tangente est $\frac{x}{a}+\frac{y}{b} = 2$, la normale $ax - by = a^2 - b^2$. Pour $n$ pair les tangentes sont $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 2$, les normales $ax \pm by = a^2 - b^2$.

879. $\Delta y = 1{,}461$; $dy = 1{,}4$. 880. $\Delta y = 0{,}1012$; $dy = 0{,}1$; $\frac{dy}{\Delta y} = 0{,}9880$.

881. 14. 882. $-2$. 883. $\Delta y = 1{,}91$; $dy = 1{,}9$; $\Delta y - dy = 0{,}01$; $\frac{\Delta y - dy}{\Delta y} = 0{,}0052$. 884. $\Delta y = 0{,}1$; $dy = 0{,}1025$; $\Delta y - dy = -0{,}0025$; $\frac{\Delta y - dy}{\Delta y} = -0{,}025$.

885.

| | | |
|---|---|---|
| $\Delta x = 1$, | 0,1, | 0,01, |
| $\Delta y = 18$, | 1,161, | 0,110601, |
| $dy = 11$, | 1,1, | 0,11, |
| $\Delta y - dy = 7$, | 0,061, | 0,000601, |
| $\delta = \frac{\Delta y - dy}{\Delta y} = 0{,}39$, | 0,0526, | 0,0055. |

886. $\Delta y \approx 1{,}3$; $dy \approx 1{,}1$; $\Delta y - dy \approx 0{,}2$; $\delta = \frac{\Delta y - dy}{\Delta y} \approx 0{,}15$.

887. a) $dy = 16$, $\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\,\% = 5{,}88\%$;

b) $dy = 8$, $\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\,\% = 3{,}03\%$;

c) $dy = 1{,}6$, $\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\,\% = 0{,}62\%$.

888. a) $dy = 4{,}8$ cm²; b) $dy = 6{,}0$ cm²; c) $dy = 9{,}6$ cm².

889. 1) $\frac{0{,}125}{\sqrt{x}}\,dx$; 2) $\frac{5\,dx}{3\sqrt[3]{x^2}}$; 3) $-\frac{4\,dx}{x^3}$; 4) $-\frac{dx}{x^5}$;

5) $-\frac{dx}{4x\sqrt{x}}$; 6) $-\frac{dx}{3nx\sqrt[3]{x}}$; 7) $\frac{dx}{2(a+b)\sqrt{x}}$;

8) $-\frac{p\ln q}{q^x}\,dx$; 9) $-\frac{0{,}2(m-n)}{x^{1,2}}\,dx$; 10) $-\frac{(m+n)\,dx}{2x\sqrt{x}}$;

11) $\left[(2x+4)(x^2-\sqrt{x})+(x^2+4x+1)\left(2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]dx$;

12) $-\frac{6x^2\,dx}{(x^3-1)^2}$; 13) $\frac{2t\,dt}{(1-t^2)^2}$; 14) $3(1+x-x^2)^2(1-2x)\,dx$;

15) $\frac{2\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}\,dx$; 16) $5^{\ln \operatorname{tg} x}\,\frac{2\ln 5}{\sin 2x}\,dx$;

17) $-2^{-\frac{1}{\cos x}} \ln 2 \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$; 18) $-\frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2}}$;

19) $\frac{(x^2-1) \sin x + 2x \cos x}{(1-x^2)^2} dx$;

20) $\left(\frac{1}{2\sqrt{\arcsin x}\sqrt{1-x^2}} + \frac{2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2}\right) dx$;

21) $\left(\frac{5}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{1+x^2}\right) \frac{dx}{2}$;

22) $\left(3^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3} \cdot \ln 3 + 9x^2 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx.$

890. 1) $-0{,}0059$; 2) $-0{,}0075$; 3) $0{,}0086$; 4) 0; 5) $0{,}00287$. 891. $\Delta y \approx \approx 0{,}00025$; $\sin 30°1' \approx 0{,}50025$. 892. $0{,}00582$. 893. $-0{,}0693$. 894. $d\rho = -\frac{k \sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi$. 895. $0{,}3466$. 896. $\sin 60°03' = 0{,}8665$; $\sin 60°18' = 0{,}8686$. 899. $0{,}995$. 900. $\operatorname{arctg} 1{,}02 \approx 0{,}795$; $\operatorname{arctg} 0{,}97 \approx 0{,}770$. 901. $0{,}355$. 902. $0{,}52164$.

903. a) Variation de la longueur du fil: $2ds = \frac{8f}{3l} df$, b) variation de la flèche: $df = \frac{3l}{4f} ds$. 904. Erreur commise en évaluant l'angle d'après son sinus: $\Delta x_s = \operatorname{tg} x \cdot \Delta y$; erreur commise en l'évaluant d'après sa tangente: $\Delta x_T = 1/2 \sin 2x \cdot \Delta z$ (où $\Delta y$ et $\Delta z$ sont les erreurs qui affectent $y$ et $z$); $\frac{\Delta x_S}{\Delta x_T} = \frac{1}{\cos^2 x}$; la précision des calculs est donc meilleure lorsqu'on évalue l'angle avec le logarithme de sa tangente.

905. 0,3 %. 906. 1) $dy = \frac{(2t^3+4t+7)(3t^2+2)\,dt}{3\sqrt[3]{[(t^3+2t+1)(t^3+2t+6)]^2}}$;

2) $ds = -\frac{t}{2} \sin \frac{t^2-1}{2} dt$; 3) $dz = -ds$; 4) $dv = \frac{2 \ln 3}{3^{\frac{1}{\ln \operatorname{tg} s}} \ln^2 \operatorname{tg} s} \frac{ds}{\sin 2s}$;

5) $ds = \frac{(4u-3)\,du}{2\sqrt{2u^2-3u+1}}$; 6) $dy = -\frac{2ds}{\cos 2s}$.

908. Continue et différentiable.

909. $f(x)$ est partout continue à l'exception des points $x = 0$ et $x = 2$, $f'(x)$ existe et est partout continue à l'exception des points $x = 0, 1, 2$, où elle n'existe pas.

910. Pour $x = k\pi$, où $k$ est un entier arbitraire.

911. Continue mais non dérivable. 912. $f'(0) = 0$.

913. Continue, mais non dérivable.

914. $\Delta y$ et $\Delta x$ n'ont pas le même ordre de grandeur.

915. Continue, mais non dérivable. 916. Oui; non. 917. $a$. 918. $a\omega e^{a\varphi}$.

919. La vitesse de variation de l'abscisse est $v_x = -2r\omega \sin 2\varphi$; celle de l'ordonnée $v_y = -2r\omega \cos 2\varphi$.

920. Vitesse de variation de l'abscisse: $v_x = v(1 + \cos \varphi)$; vitesse de variation de l'ordonnée $v_y = v \sin \varphi$ ($\varphi$ étant l'angle de l'axe des ordonnées et du rayon polaire du point).

921. $-\frac{p \ln 2}{5540} \approx -0{,}000125\, p$.

922. 2 un./s au point (3, 6) et —2 un./s au point (3, —6).
923. 2 cm/s au point (3, 4) et —2 cm/s au point (—3, 4).
924. Aux points (3, 16/3) et (—3, —16/3).
925. $4v$ et $2av$. 926. $2\pi v$ et $2\pi rv$.

927. $4\pi r^2 v$ et $8\pi rv$. 928. $x = 2\pi k \pm \frac{\pi}{3}$ et $x = 2\pi k \pm \frac{2\pi}{3}$. 929. $x = 2\pi k$.

930. $1/n^2$ fois. 932. a) Oui; b) Non.

934. 1) $x^2 - 18x + 9y = 0$; 2) $y^2 = 4x^2(1 - x^2)$; 3) $y^3 = (x - 1)^2$; 4) $x = \operatorname{Arccos}(1 - y) \mp \sqrt{2y - y^2}$; 5) $y = \frac{2(1+x-x^2)}{1+x^2}$.

935. 1) $t = (2k + 1)\pi$; 2) $t = 1$; 3) $t = \pi/4 + \pi k$; 4) $t_1 = 1$, $t_2 = -1$.

936. $-\frac{b}{a}\operatorname{ctg}\varphi$. 937. $-\frac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi$.

938. $\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$. 939. $\frac{3t^2-1}{2t}$. 940. $-1$. 941. $\frac{t}{2}$. 942. $\frac{\cos\varphi - \varphi\sin\varphi}{1 - \sin\varphi - \varphi\cos\varphi}$.

943. $\frac{1+t^2}{t(2+3t-t^3)}$. 944. $\frac{1-\operatorname{tg} t}{1+\operatorname{tg} t}$. 945. $\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$.

946. $-\frac{4}{3}$. 947. 0 et $\frac{1}{3}$. 948. N'existe pas.

949. $\sqrt{3}/6$. 950. 1) $t = \pi/2 + \alpha$; 2) $t = \pi - \alpha$; 3) $t = \pi/6 + \alpha/3$, où $\alpha$ est la pente de la tangente.

956. 1) Les courbes se coupent en deux points sous les angles $\alpha_1 = \alpha_2 = \operatorname{arctg}\frac{41}{2} \approx 87°12'$; 2) les courbes se coupent en trois points sous les angles $\alpha_1 = \alpha_2 = 30°$ et $\alpha_3 = 0°$.

958. $T = \left|\frac{y}{\sin\frac{3}{2}t}\right|$; $N = \left|\frac{y}{\cos\frac{3}{2}t}\right|$;

$S_T = \left|y\operatorname{ctg}\frac{3}{2}t\right|$; $S_N = \left|y\operatorname{tg}\frac{3}{2}t\right|$.

959. $\left|\frac{y}{\cos t}\right|$, $\left|\frac{y}{\sin t}\right|$, $|y\operatorname{tg} t|$ et $|y\operatorname{ctg} t|$.

961. $\left|\frac{y}{\sin t}\right|$, $\left|\frac{y}{\cos t}\right|$, $|y\operatorname{ctg} t|$ et $|y\operatorname{tg} t|$.

963. $x + 2y - 4 = 0$; $2x - y - 3 = 0$.

964. $4x + 2y - 3 = 0$; $2x - 4y + 1 = 0$. 965. $y = 2$, $x = 1$.

966. 1) $4x + 3y - 12a = 0$; $3x - 4y + 6a = 0$; 2) $x + y = \frac{\pi^2\sqrt{2}}{16}$; $y - x = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$; 3) $y = 1 + x\ln a$.

969. $p = 2a\cos t$. 970. $\theta = \varphi$, $\alpha = 2\varphi$. 974. 3; —3.

975. 1) 0; 2) 0; $\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}$. 977. $\frac{f_1(t)f_2'(t)}{f_1'(t)} = \operatorname{tg}\theta$.

978. $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}bt^2 = \operatorname{arctg}\frac{2}{3}\varphi$.

979. $\rho = \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}$; $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg} t\right)$ la tangente de l'angle de la tangente et du rayon polaire est $\frac{2ab}{(b^2-a^2)\sin 2t}$. 980. La sous-tangente polaire est $S_T = \frac{\rho^2}{d\rho}$; la sous-normale polaire: $S_N = \frac{d\rho}{d\varphi}$.

983. $\frac{\rho}{\ln a}$. 984. $\rho \ln a$. 985. $\sqrt{1+a^2}$.

986. $\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}=\frac{r}{y}$. 987. $\frac{\sqrt{b^4x^2+a^4y^2}}{b^2x}$.

988. $\sqrt{1+\frac{p}{2x}}\,dx$ ou $\frac{\sqrt{y^2+p^2}}{y}\,dx$. 989. $\sqrt{1+\frac{4}{9ax}}$.

990. $\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx$. 991. $\frac{e^x+e^{-x}}{2}=y$.

992. $r$. 993. $2a\sin\frac{t}{2}$. 994. $3a\cos t\sin t\,dt$.

995. $a\sqrt{1+t^2}\,dt$. 996. $4a\sin\frac{t}{2}\,dt$.

997. $a\operatorname{ctg} t\,dt$. 998. $at$. 999. $a\sqrt{\operatorname{ch} 2t}\,dt$.
1000. 3/2 m/mn; le vecteur vitesse est dirigé verticalement vers le bas.

1001. $10\sqrt{26}\approx 51$ km/h; le vecteur vitesse est parallèle à l'hypoténuse du triangle rectangle dont un côté de l'angle droit est horizontal et égal à 50 km et l'autre vertical et égal à 10 km.
1002. 14,63 km/h. 1003. 40 km/h.

1004. $R_\omega\left(\sin\alpha+\frac{R\sin 2\alpha}{2\sqrt{l^2-R^2\sin^2\alpha}}\right)$. 1005. 9,43 m/s. 1006. 2.

1007. $-24x$. 1008. 207 360. 1009. 360. 1010. $6(5x^4+6x^2+1)$.

1011. $4\sin 2x$. 1012. $\frac{4}{e}$. 1013. $-\frac{1}{2}$.

1014. $\frac{5!}{(1-x)^6}$. 1015. $\frac{6}{x}$. 1016. $\frac{an(n+1)}{x^{n+2}}$.

1017. $16a\sin 2\varphi$. 1018. $\frac{2(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$.

1019. $2e^{x^2}(3x+2x^3)$. 1020. $\frac{6x(2x^3-1)}{(x^3+1)^3}$.

1021. $\frac{2x}{1+x^2}+2\operatorname{arctg} x$. 1022. $-\frac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$.

1023. $-\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$. 1024. $\frac{a+3\sqrt{x}}{4x\sqrt{x}(a+\sqrt{x})^3}$.

1025. $\frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{4x\sqrt{x}}$. 1026. $-\frac{\arcsin x+x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

1027. $\frac{a(a^2-1)\sin x}{\sqrt{(1-a^2\sin^2 x)^3}}$. 1028. $x^x\left[(\ln x+1)^2+\frac{1}{x}\right]$.

1029. $a^n e^{ax}$. 1030. $(-1)^n e^{-x}$.

1031. $a^n\sin\left(ax+n\frac{\pi}{2}\right)+b^n\cos\left(bx+n\frac{\pi}{2}\right)$.

1032. $2^{n-1}\sin\left[2x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right]$. 1033. $e^x(x+n)$.

1034. $(-1)^n\frac{(n-2)!}{x^{n-1}}$ $(n\geqslant 2)$.

1035. $\frac{(-1)^n a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$. 1036. $\frac{(-1)^{n-1}a^n(n-1)!}{(ax+b)^n}$.

1037. $(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n \ln a}$.

1038. $(-1)^n \dfrac{n!}{2}\left[\dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}+\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$.

1039. $(-1)^n n!\left[\dfrac{1}{(x-2)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$.

1040. $4^{n-1}\cos\left(4x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$. 1054. $\dfrac{d^2x}{dy^2}=-\dfrac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3}$.

1056. $-\dfrac{b^4}{a^2y^3}$. 1057. $-\dfrac{3r^3x}{y^5}$. 1058. $-\dfrac{2(3y^4+8y^2+5)}{y^8}$.

1059. $\dfrac{(3-s)e^{2s}}{(2-s)^3}$. 1060. $-\dfrac{2a^3xy}{(y^2-ax)^3}$.

1061. $-\dfrac{y}{[1-\cos(x+y)]^3}$. 1062. $-\dfrac{y[(x-1)^2+(y-1)^2]}{x^2(y-1)^3}$.

1063. $\dfrac{d^2x}{dy^2}=\dfrac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3}$. 1064. $\dfrac{1}{e^2}$.

1065. $-\dfrac{p^2}{\sqrt{(y^2+p^2)^3}}$. 1069. $-\dfrac{2a}{9b^2t^4}$. 1070. $-\dfrac{a^2}{y^3}=-\dfrac{1}{a\sin^3 t}$.

1071. $-\dfrac{3b\cos t}{a^3\sin^5 t}$. 1072. $-\dfrac{1}{a(1-\cos\varphi)^2}$.

1073. 1) $\dfrac{\cos^2 t-4\sin^2 t}{9a^2\cos^7 t\sin^3 t}$; 2) 0, car $x+y=0$.

1074. 1) $4t^2$; 2) $-\dfrac{2}{1-t^2}$.

1075. $\dfrac{2+t^2}{a(\cos t-t\sin t)^3}$. 1080. 16 m/s$^2$.

1081. $v=2t-4$, $a=2$. 1082. $-\pi^2/18$ cm/s$^2$.

1084. $-0{,}0015$ m/s$^2$. 1085. $-1/8$ m/s$^2$. 1088. 1) $(x^2-379)\sin x-40x\cos x$;

2) $e^x\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k\sin\left(x+k\dfrac{\pi}{2}\right)$; 3) $\alpha^n x^3\sin\left(\alpha x+n\dfrac{\pi}{2}\right)+3n\alpha^{n-1}x^2\sin\left[\alpha x+\right.$

$\left.+(n-1)\dfrac{\pi}{2}\right]+3n(n-1)\alpha^{n-2}x\sin\left[\alpha x+(n-2)\dfrac{\pi}{2}\right]+n(n-1)(n-2)\alpha^{n-3}\times$

$\times\sin\left[\alpha x+(n-3)\dfrac{\pi}{2}\right]$.

1093. $y^{(2n)}(0)=0$; $y^{(2n+1)}(0)=[1\cdot3\cdot5\ \ldots\ (2n-1)]^2$.

1095. $y^{(2n-1)}(0)=0$; $y^{(2n)}(0)=2[2\cdot4\cdot6\ \ldots\ (2n-2)]^2$.

1096. $-\dfrac{2dx^2}{9x\sqrt[3]{x}}$. 1097. $m(m-1)(m-2)x^{m-3}dx^3$.

1098. $4(x+1)(5x^2-2x-1)dx^2$. 1099. $4^{-x^2}\cdot2\ln4\cdot(2x^2\ln4-1)dx^2$.

1100. $\dfrac{ab(a^2-b^2)\sin 2x\,dx^2}{(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)^2}$.

1101. $\dfrac{4\ln x-4-\ln^3 x}{x^2\sqrt{(\ln^2 x-4)^3}}\,dx^2.$

1102. $-4\sin 2x\,dx^3.$ 1103. $\pm\dfrac{3a\sec^2\varphi}{4\sqrt{\operatorname{tg}\varphi}}(1+5\operatorname{tg}^2\varphi)\,d\varphi^2.$

1104. $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}\,dx^2}{3x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{2}}}.$ 1105. 1) $d^2y=\dfrac{4x}{x^4-1}\,d^2x-\dfrac{4(1+3x^4)}{(x^4-1)^2}\,dx^2;$

2) $d^2y=-4\sec^2 2t\,dt^2.$

1106. 1) $d^2y=\cos z\,d^2z-\sin z\,dz^2.$

2) $d^2y=a^x\cos(a^x)\ln a\,d^2x-a^x\ln^2 a\,(a^x\sin a^x-\cos a^x)\,dx^2;$

3) $d^2y=a^{t^3}\ln a\,[\cos a^{t^3}(6t+9t^4\ln a)-a^{t^3}\sin a^{t^3}9t^4\ln a]\,dt^2.$

## Chapitre IV

1110. 1) Point de maximum; 2) décroît; 3) croît; 4) point de minimum; 5) point de maximum; 6) point de minimum; 7) point de minimum; 8) point de maximum; 9) point de minimum.

1112. Croît au point $x_1=0$, décroît au point $x_2=1$, croît au point $x_3=-\pi/2$ et décroît au point $x_4=2$.

1113. Décroît au point $x_1=1/2$, croît aux points $x_2=2$ et $x_3=e$; $x_4=1$ est un point de minimum.

1114. Croît au point $x_1=1$, décroît au point $x_2=-1$; $x_3=0$ est un point de minimum.

1115. Décroît au point $x_1=1/2$, croît au point $x_2=-1/2$; $x_3=0$ est un point de maximum.

1125. Trois racines appartenant respectivement aux intervalles $]1, 2[$, $]2, 3[$ et $]3, 4[$.

1127. $\sin 3x_2-\sin 3x_1=3(x_2-x_1)\cos 3\xi$, où $x_1<\xi<x_2$.

1128. $a(1-\ln a)-b(1-\ln b)=(b-a)\ln\xi$, où $a<\xi<b$.

1129. $\arcsin[2(x_0+\Delta x)]-\arcsin 2x_0=\dfrac{2\Delta x}{\sqrt{1-4\xi^2}}$, où $x_0<\xi<x_0+\Delta x$.

1135. Lorsque $x\to 0$, $\xi$ tend vers zéro sans prendre toutes les valeurs intermédiaires mais seulement une suite de valeurs telle que $\cos\dfrac{1}{\xi}\to 0$.

1136. 0,833. 1137. 0,57. 1138. 1,0414. 1139. 0,1990. 1140. 0,8449.

1141. 1,7853.

1149*. L'inégalité cherchée découle de la croissance de la fonction $y=\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}$ dans l'intervalle $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

1150. Croît dans $]-\infty, -1[$, décroît dans $]-1, 3[$, croît dans $]3, \infty[$.

1151. Décroît dans $]-\infty, -1[$, croît dans $]-1, 0[$, décroît dans $]0, 1[$, croît dans $]1, \infty[$.

1152. Croît dans $]-\infty, -1/2[$, décroît dans $]-1/2, 11/18[$, croît dans $]11/18, \infty[$.

1153. Croît dans $]-\infty, \dfrac{2}{3}a[$, décroît dans $]\dfrac{2}{3}a, a[$, croît dans $]a, \infty[$.

1154. Croît dans $]-\infty, -1[$, décroît dans $]-1, 1[$, croît dans $]1, \infty[$.

1155. Décroît dans $]-\infty, 0[$, décroît dans $\left]0, \dfrac{1}{2}\right[$, croît dans $\left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$, décroît dans $]1, \infty[$.

1156. Croît dans $]-\infty, 0,[$, décroît dans $]0, \infty[$.

1157. Décroît dans $]-\infty, 0[$, croît dans $]0, 2[$, décroît dans $]2, \infty[$.
1158. Décroît dans $]0, 1[$, décroît dans $]1, e[$, croît dans $]e, \infty[$.
1159. Décroît dans $\left]0, \frac{1}{2}\right[$, croît dans $\left]\frac{1}{2}, \infty\right[$.

1160. Décroît dans $\left]0, \frac{\pi}{3}\right[$, croît dans $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right[$, décroît dans $\left]\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right[$.

1161. Croît dans $\left]0, \frac{\pi}{6}\right[$, décroît dans $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$, croît dans $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right[$, décroît dans $\left]\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right[$, croît dans $\left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$.

1162. Croît monotonément. 1163. Croît monotonément.
1164. Croît dans $]0, 3/4a[$, décroît dans $]3/4a, a[$.
1165. $y_{\max} = 0$ pour $x = 0$, $y_{\min} = -1$ pour $x = 1$.
1166. $y_{\max} = 17$ pour $x = -1$, $y_{\min} = -47$ pour $x = 3$.
1167. $y_{\max} = 4$ pour $x = 0$, $y_{\min} = 8/3$ pour $x = -2$.
1168. $y_{\max} = 2$ pour $x = 0$, $y_{\min} = \sqrt[3]{4}$ pour $x = 2$.
1169. $y_{\max} = \frac{1}{\ln 3}$ pour $x = -3$.
1170. $y_{\max} = 0$ pour $x = 0$.
1171. $y_{\max} = 0$ pour $x = 0$, $y_{\min} = -2/3$ pour $x = 1$.
1172. $y_{\min} = 2$ pour $x = 2/3$. 1173. $y_{\max} = \sqrt{205}/10$ pour $x = 12/5$.
1174. $y_{\max} = \sqrt[3]{a^4}$ pour $x = 0$, $y_{\min} = 0$ pour $x = \pm a$.
1175. $y_{\min} = 0$ pour $x = 0$. 1176. Croît monotonément.
1177. $y_{\max} = \frac{81}{8}\sqrt[3]{18}$ pour $x = \frac{1}{2}$, $y_{\min} = 0$ pour $x = -1$ et pour $x = 5$.
1178. $y_{\max} = 2{,}5$ pour $x = 1$, $y_{\min} = \frac{e(4-e)}{2} \approx 1{,}76$ pour $x = e$.
1179. $y_{\max} = 1/2$ pour $x = 0$, $y_{\min} = \pi/8$ pour $x = 1$.
1180. $y_{\max} = 0$ pour $x = 0$, $y_{\min} = \frac{3\sqrt{3} - 2\pi}{48}$ pour $x = \frac{1}{2}$.
1181. $y_{\max} = \frac{6\pi\sqrt{3} - \pi^2 + 18}{36} \approx 1{,}13$ pour $x = \pm\frac{\pi}{3}$, $y_{\min} = 1$ pour $x = 0$.
1182. $y_{\max} = \sin\frac{1}{2} + \frac{1}{16}$ pour $x = \frac{1}{2}$,

$$y_{\min} = \frac{36\sqrt{3} - 12\pi\sqrt{3} + 72 - \pi^2 + 6\pi}{144} \text{ pour } x = \frac{\pi}{6}.$$

1183. $y_{\max} = 1/\pi$ pour $x = 1$, $y_{\min} = -1/\pi$ pour $x = 3$.
1184. Si $ab \leqslant 0$ il n'y a pas d'extrémums. Si $ab > 0$ et $a > 0$, alors $y_{\min} = 2\sqrt{ab}$ pour $x = \frac{1}{2p}\ln\frac{b}{a}$; si $ab > 0$ et $a < 0$, alors $y_{\max} = -2\sqrt{ab}$ pour $x = \frac{1}{2p}\ln\frac{b}{a}$.

1185. 13 et 4. 1186. 8 et 0. 1187. 2 et $-10$. 1188. 2 et $-12$. 1189. 10 et 6. 1190. 1 et 3/5. 1191. 3/5 et $-1$.
1192. Minimum: $(a + b)^2$, pas de maximum.

1193. $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$.

1194. Maximum 1, pas de minimum.

1195. Minimum $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$, pas de maximum.

1196. $\sqrt[3]{9}$ et 0. 1197. $\frac{\pi}{4}$ et 0. 1208. 4 et 4. 1209. 1. 1210. 6 et 6.

1211. 3, 6 et 4 cm. 1212. 3 cm. 1213. 1 cm. 1214. $\sqrt[3]{4v}$.

1215. Le rayon de base est égal à la hauteur $\left(\sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}\right)$. 1216. $H=2R$.

1217. $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ cm. 1218. $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 293°56'$.

1219. Côté latéral $= 3p/4$, base $= p/2$. 1220. Côté latéral $= 3p/5$, base $= 4p/5$.

1221. $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$. 1222. $\frac{4}{3}R$. 1223. $\frac{2m_0}{3k}$, $\frac{2}{27}\frac{m_0^3g^2}{k^2}$. 1224. $\sqrt{\frac{2aP}{k}}$.

1225. 20 km/h, 720 roubles. 1226. Dans $1\frac{27}{43}$ h $\approx$ 1 h 38 mn.

1227. La distance de la corde au point $A$ doit être égale à $\frac{3}{4}$ du diamètre de la circonférence.

1228. $\frac{4R\sqrt{5}}{5}$ et $\frac{R\sqrt{5}}{5}$.

1229. La hauteur du rectangle est égale à $\frac{\sqrt{8R^2+h^2}-3h}{4}$, où $h$ est la distance du centre de la corde sous-tendant l'arc du segment et $R$ le rayon du cercle.

1230. Le rayon de base du cône est une fois et demie plus grand que le rayon du cylindre.

1231. $4R$. 1232. $\approx 49°$. 1233. 60°. 1234. $R\sqrt{3}$.

1235. $\frac{4}{3}R$. 1237. $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}=1$. 1238. $a\sqrt{2}$ et $b\sqrt{2}$.

1239. Aire du rectangle $= \frac{2}{\pi} \times$ aire de l'ellipse.

1240. Tangente au point (2, 3). 1241. $C(-\sqrt{6}, -\sqrt{6})$.
1242. $x = a - p$ si $a > p$; $x = 0$ si $a \leqslant p$.
1243. La section de la rainure a la forme d'un demi-cercle.

1244. Longueur de la poutre $13\frac{1}{3}$ m, côté de la section transversale $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ m.

1245. La valeur cherchée est égale à la moyenne arithmétique des résultats des mesures:

$$x = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

1246. A 3 km du camp. 1247. A une hauteur $R\sqrt{2}/2$.

1248. La distance à la source d'intensité $I_1$ est égale à $\frac{l\sqrt[3]{I_1}}{\sqrt[3]{I_1}+\sqrt[3]{I_2}}$, autrement dit le point cherché partage la distance $l$ dans le rapport $\sqrt[3]{I_1}/\sqrt[3]{I_2}$.

1249. 2,4 m. 1250. $F_{\min}=\frac{kP}{\sqrt{1+k^2}}$ pour $\varphi=\operatorname{arctg} k$.

1251. $\approx 4{,}5$. 1252. $2b+\sqrt{\frac{Sb}{a}}$ et $2a+\sqrt{\frac{Sa}{b}}$.

1253*. $\frac{RHL}{(L-R)(L+2R)}$, où $L$ est la génératrice du cône. On remarquera que la différence entre la distance du centre de la sphère au sommet du cône et le rayon de la sphère est égale à celle entre la hauteur du cône et la hauteur du segment immergé.

1254. $R/4$. 1255. $R/2$. 1256. $P\,(p,\ \pm p\sqrt{2})$.

1263*. 3/4. Cette fonction étant une constante ($y'=0$), on détermine sa valeur en un point quelconque, par exemple $x=0$.

1264. $\pi$. 1265. 0.

1267. $y_{\max}=\frac{4}{27}a^3$ pour $x=\frac{a}{3}$, $y_{\min}=0$ pour $x=a$.

1268. $y_{\max}=\frac{a^4}{16}$ pour $x=\frac{a}{2}$, $y_{\min}=0$ pour $x=0$ et pour $x=a$.

1269. $y_{\max}=-2a$ pour $x=-a$, $y_{\min}=2a$ pour $x=a$.
1270. $y_{\max}=5/4$ pour $x=3/4$.
1271. $y_{\max}=1$ pour $x=1$, $y_{\min}=-1$ pour $x=-1$.
1272. $y_{\min}=1$ pour $x=0$.
1273. $y_{\max}=4/e^2$ pour $x=2$, $y_{\min}=0$ pour $x=0$.

1274. $y_{\min}=e$ pour $x=e$. 1275. $y_{\max}=\sqrt[e]{e}$ pour $x=e$.
1276. Pour $a=2$ maximum. 1277. $a=-2/3$, $b=-1/6$.
1278. Convexe au voisinage du point (1, 11), concave au voisinage du point (3, 3).
1279. Convexe au voisinage du point $(1,\ \pi/4)$, concave au voisinage du point $(-1,\ -\pi/4)$.
1280. Convexe au voisinage du point $(1/e^2,\ -2/e^4)$, concave au voisinage du point (1, 0).
1287. Point d'inflexion (5/3, —250/27). Intervalles: de convexité $]-\infty,\ 5/3[$, de concavité $]-5/3,\ \infty[$.
1288. Pas de point d'inflexion. Graphe concave.
1289. Points d'inflexion (2, 62) et (4, 206). Intervalles: de concavité $]-\infty,\ 2[$, de convexité $]2,\ 4[$, de concavité $]4,\ \infty[$.
1290. Points d'inflexion (—3, 294) et (2, 114). Intervalles de convexité: $]-\infty,\ -3[$, de concavité $]-3,\ 2[$, de convexité $]2,\ \infty[$.
1291. Point d'inflexion (1, —1). Intervalles: de convexité $]-\infty,\ 1[$, de concavité $]1,\ \infty[$.
1292. Pas de point d'inflexion. Graphe concave.
1293. Points d'inflexion $(-3a,\ -9a/4)$ (0, 0), $(3a,\ 9a/4)$. Intervalles: de concavité $]-\infty,\ -3a[$, de convexité $]-3a,\ 0[$, de concavité $]0,\ 3a[$, de convexité $]3a,\ \infty[$.
1294. Point d'inflexion $(b,\ a)$. Intervalles de convexité $]-\infty,\ b[$, de concavité $]b,\ \infty[$.

1295. Point d'inflexion $\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)$. Intervalles : de concavité $\left]-\frac{\pi}{2},\ \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right[$, de convexité $\left]\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ \frac{\pi}{2}\right[$.

1296. Points d'inflexion $(\pm 1,\ \ln 2)$. Intervalles: de convexité $]-\infty,\ -1[$, de concavité $]-1,\ 1[$, de convexité $]1,\ \infty[$.

1297. Point d'inflexion $(ae^{3/2}, 3/2e^{-3/2})$. Intervalles de convexité $]0, ae^{3/2}[$, de concavité $]ae^{3/2}, \infty[$.

1298. Pas de point d'inflexion. Graphe concave.

1299. Point d'inflexion $(1/2, e^{\operatorname{arctg} 1/2})$. Intervalles: de concavité $]-\infty, 1/2[$, de convexité $]1/2, \infty[$.

1300. Point d'inflexion $(1, -7)$. Intervalles: de convexité $[0, 1]$, de concavité $]1, \infty[$.

1305. $a = -3/2$, $b = 9/2$.

1306. $\alpha = -20/3$, $\beta = 4/3$. Les points $(-2; -2{,}5)$ et $(0, 0)$ seront également des points d'inflexion.

1307. Pour $a \leqslant -e/6$ et pour $a > 0$.

1316. Points d'inflexion $(1, 4)$, $(1, -4)$.

1317. Points d'inflexion pour $t = 3\pi/4 \pm k\pi$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

1318. $\dfrac{\sin b - \sin a}{\ln \dfrac{b}{a}} = \xi \cos \xi$, où $a < \xi < b$.

1319. $e^b + e^a = 2e^{\xi}$, où $a < \xi < b$.

1324. $\dfrac{2}{3\sqrt[6]{a}}$. 1325. 0. 1326. 1. 1327. $\dfrac{\alpha}{\beta}$.

1328. $\dfrac{1}{3}$. 1329. $\dfrac{a}{\sqrt{b}}$.

1330. $-\dfrac{1}{2}$. 1331. 2. 1332. $\dfrac{m}{n} a^{m-n}$. 1333. $\dfrac{\ln \dfrac{a}{b}}{\ln \dfrac{c}{d}}$.

1334. $-2$. 1335. 2. 1336. $\ln \dfrac{a}{b}$. 1337. $\cos a$. 1338. 2. 1339. 1. 1340. 1.

1341. $\dfrac{1}{128}$. 1342. 16. 1343. 1. 1344. 1. 1345. $-2$. 1346. 0. 1347. 0.

1348. $a$. 1349. $\dfrac{1}{2}$. 1350. $\dfrac{4a^2}{\pi}$. 1351. $-1$. 1352. 0. 1353. $\infty$. 1354. $\dfrac{a+b+c}{3}$.

1355. 1. 1356. $\infty$. 1357. 1. 1358. 1. 1359. $e$. 1360. 1. 1361. $e^2$. 1362. $e^{\pi}$.

1363. 1. 1364. 1/2. 1366. $x^x$ est supérieur à $a^x x^a$.

1367. $f(x)$ est supérieure à $\ln f(x)$.

1374. $f(115) \approx 1\,520\,990$; $f(120) \approx 1\,728\,120$; $\delta_{\gamma\text{-}100} \approx 0{,}03$ (erreur absolue).

1375. $y = \pm \dfrac{b}{a} x$. 1376. $x = 0$, $y = 0$. 1377. $y = 0$.

1378. $x = b$, $y = c$. 1379. $x = -1$, $y = \dfrac{1}{2} x - 1$. 1380. $x + y = 0$.

1381. $y = x + 2$. 1382. $y = \pm x$. 1383. $x = 0$, $y = 0$; $x + y = 0$.

1384. $x = b$; $x = 2b$; $y = x + 3(b - a)$.

1385. $y + 1 = 0$; $2x + y + 1 = 0$. 1396. $x = -1/e$, $y = x + 1/e$.

1387. $x = 0$, $y = x$. 1388. $x = 0$, $y = x + 3$. 1389. $y = \dfrac{\pi}{2} x - 1$.

1390. $y = 2x \pm \pi/2$.

1391. $y = x$ si $f(x)$ n'est pas une constante identique.

1392. Si $\lim\limits_{t \to t_0} \varphi(t) = \infty$, et $\lim\limits_{t \to t_0} \psi(t) = b$, alors $y = b$ est une asymptote; si $\lim\limits_{t \to t_0} \varphi(t) = \infty$, et $\lim\limits_{t \to t_0} \varphi(t) = a$, alors $x = a$ est une asymptote.

1393. $x = -1$, $y = 0$. 1394. $y = \dfrac{1}{2} x + e$. 1395. $y = \pm \dfrac{1}{2} x - \dfrac{1}{2}$.

**1396.** $x + y + a = 0$. **1397.** $x = 2$; $2x + 8y + 1 = 0$; $6x - 40y + 9 = 0$.

**1398.** Partout définie. Le graphe est symétrique par rapport à l'origine des coordonnées. $y_{max} = 1/2$ pour $x = 1$, $y_{min} = -1/2$ pour $x = -1$. Points d'inflexion du graphe: $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}/4)$, $(0, 0)$, $(\sqrt{3}, \sqrt{3}/4)$. Asymptote $y = 0$.

**1399.** Partout définie sauf pour $x = \pm 1$. Le graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Pas de maximum. $y_{min} = 1$ pour $x = 0$. Pas de point d'inflexion. Asymptotes $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$.

**1400.** Partout définie sauf pour $x = \pm 1$. Le graphe est symétrique par rapport à l'origine. Pas d'extrémum. Point d'inflexion $(0, 0)$. Asymptotes $x = -1$, $x = +1$, $y = 0$.

**1401.** Partout définie sauf pour $x = 1$, $x = 2$ et $x = 3$. $y_{max} \approx -2{,}60$ pour $x \approx 2{,}58$. $y_{min} \approx 2{,}60$ pour $x \approx 1{,}42$. Pas de point d'inflexion. Asymptotes $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $y = 0$.

**1402.** N'est pas définie pour $x = \pm 1$. Le graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. $y_{max} = 0$ pour $x = 0$. Pas de minimum. Croît pour $x < -1$, décroît pour $x > 1$. Le graphe n'a pas de point d'inflexion. Asymptotes $x = \pm 1$, $y = 1$.

**1403.** Partout définie; le graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. $y_{min} = -1$ pour $x = 0$; points d'inflexion du graphe à tangente horizontale $(1, 0)$ et $(-1, 0)$; points d'inflexion $(\pm\sqrt{5}/5, -64/125)$. Pas d'asymptote.

**1404.** Partout définie; le graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. $y_{max} = 0$ pour $x = 0$, $y_{min} = -27/8$ pour $x = \pm 1/2$. Points d'inflexion du graphe à tangente horizontale $(\pm 1, 0)$. On a encore quatre points d'inflexion pour $x \approx \pm 0{,}7$ et $x \approx \pm 0{,}26$. Pas d'asymptote.

**1405.** Partout définie sauf pour $x = 0$. $y_{min} = 3$ pour $x = 1/2$. Pas de maximum. Point d'inflexion du graphe $(-\sqrt[3]{2}/2, 0)$. Asymptote $x = 0$.

**1406.** Partout définie sauf pour $x = 0$. Le graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. $y_{min} = 2$ pour $x = \pm 1$. Pas de maximum. Pas de points d'inflexion. Asymptote $x = 0$.

**1407.** Partout définie, sauf pour $x = 1$. $y_{min} = -1$ pour $x = 0$. Pas de maximum. Point d'inflexion du graphe $(-1/2, -8/9)$. Asymptotes $x = 1$, $y = 0$.

**1408.** Partout définie sauf pour $x = \pm\sqrt{3}$. Le graphe est symétrique par rapport à l'origine des coordonnées. $y_{max} = -4{,}5$ pour $x = 3$, $y_{min} = 4{,}5$ pour $x = -3$. Point d'inflexion du graphe $(0, 0)$. Asymptotes $x = \pm\sqrt{3}$ et $x + y = 0$.

**1409.** Partout définie sauf pour $x = -1$. Pas de minimum. $y_{max} = -3\frac{3}{8}$ pour $x = -3$. Point d'inflexion du graphe $(0, 0)$. Asymptotes $x = -1$, $y = \frac{1}{2}x - 1$.

**1410.** Partout définie sauf pour $x = 1$. Pas de maximum. $y_{min} = 27/4$ pour $x = 3/2$. Point d'inflexion du graphe $(0, 0)$. Asymptote $x = 1$.

**1411.** Partout définie sauf pour $x = 1$. $y_{max} = 0$ pour $x = 0$, $y_{min} = 4/3\sqrt[3]{4}$ pour $x = \sqrt[3]{4}$. Point d'inflexion du graphe $\left(-\sqrt[3]{2}, -\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}\right)$. Asymptotes $x = 1$, $y = x$.

**1412.** Partout définie sauf pour $x = -1$. $y_{max} = 2/27$ pour $x = 5$, $y_{min} = 0$ pour $x = 1$. Abscisses des points d'inflexion du graphe $5 \pm 2\sqrt{3}$. Asymptotes $x = -1$ et $y = 0$.

**1413.** Partout définie sauf pour $x = 0$. $y_{max} = 7/2$, pour $x = 1$, $y_{max} = -11/6$ pour $x = -3$, $y_{min} = 27/8$ pour $x = 2$. Abscisse du point d'inflexion du graphe 9/7. Asymptotes $x = 0$ et $y = 1/2x + 1$.

**1414.** Partout définie sauf pour $x = 0$. Pas de maximums. $y_{min} \approx -0{,}28$ pour $x \approx 1{,}46$. Abscisse du point d'inflexion du graphe $-\sqrt[3]{2}$. Asymptote $x = 0$.

**1415.** Partout définie sauf pour $x = 0$. $y_{max} = -2{,}5$ pour $x = -2$; pas de minimum. Le graphe n'a pas de points d'inflexion. Asymptotes $x = 0$ et $y = x$.

**1416.** Partout définie. $y_{max} = 1/e$ pour $x = 1$. Pas de minimum. Point d'inflexion du graphe $(2, 2/e^2)$. Asymptote $y = 0$.

**1417.** Partout définie. $y_{max} = 4/e^2$ pour $x = 2$, $y_{min} = 0$ pour $x = 0$. Abscisses des points d'inflexion du graphe $2 \pm \sqrt{2}$. Asymptote $y = 0$.

**1418.** Partout définie sauf pour $x = 0$. $y_{min} = e$ pour $x = 1$. Pas de maximum. Pas de point d'inflexion. Asymptotes $x = 0$, $y = 0$.

**1419.** Définie pour $x > -1$. $y_{min} = 0$ pour $x = 0$. Pas de maximum. Pas de point d'inflexion. Asymptote $x = -1$.

**1420.** Partout définie. Le graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. $y_{min} = 0$ pour $x = 0$. Pas de maximum. Points d'inflexion du graphe $(\pm 1, \ln 2)$. Pas d'asymptote.

**1421.** Partout définie. Le graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. $y_{max} = 1/e$ pour $x = \pm 1$, $y_{min} = 0$ pour $x = 0$. Abscisses des points d'inflexion du graphe $\pm \dfrac{\sqrt{5 \pm \sqrt{17}}}{2}$. Asymptote $y = 0$.

**1422.** Partout définie. $y_{max} = 27/e^3$ pour $x = 3$. Pas de minimum. Abscisses des points d'inflexion 0 et $3 \pm \sqrt{3}$. Asymptote $y = 0$.

**1423.** Partout définie. Le graphe est symétrique par rapport à l'origine. $y_{max} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ pour $x = 1$, $y_{min} = -\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ pour $x = -1$. Points d'inflexion du graphe $(0, 0)$, $(\sqrt{3}, \sqrt{3}\, e^{-\frac{3}{2}})$ et $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}\, e^{-3/2})$. Asymptote $y = 0$.

**1424.** Partout définie sauf pour $x = 0$. Pas d'extrémum. Le graphe ne possède pas de point d'inflexion. Asymptotes $x = 0$, $y = 0$ et $y = -1$.

**1425.** Définie pour $x > 0$. Pas d'extrémum. Point d'inflexion du graphe $(e^{3/2}, e^{3/2} + {}^3/_2 e^{-3/2})$. Asymptotes $x = 0$ et $y = x$.

**1426.** La fonction est définie pour $-\infty < x < -1$ et pour $0 < x < \infty$. Dans l'intervalle $]-\infty, -1[$, elle croît de $e$ à $\infty$, dans l'intervalle $]0, \infty[$ de 1 à $e$. Le graphe est composé de deux branches. Asymptotes $y = e$ et $x = -1$.

**1427.** Partout définie. Pas d'extrémum. Stationnaire pour $x = \pm k\pi$ ($k = 1, 3, 5, \ldots$). Le graphe est symétrique par rapport à l'origine, pas d'asymptote; point d'inflexion $(k\pi, k\pi)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$); le graphe coupe la droite $y = x$ en ses points d'inflexion.

**1428.** Partout définie. Le graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Les points d'extrémum vérifient l'équation $\operatorname{tg} x = -x$. Les abscisses des points d'inflexion vérifient l'équation $x \operatorname{tg} x = 2$. Pas d'asymptote.

**1429.** Définie dans les intervalles $]-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi[$ où $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Période $2\pi$. Le graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. $y_{max} = 0$ pour $x = 2k\pi$. Le graphe ne possède pas de point d'inflexion. Asymptotes $x = \pi/2 + k\pi$.

**1430.** Définie dans les intervalles $]-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi[$, où $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Période $2\pi$. Le graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées; $y_{min} = 1$ pour $x = 2k\pi$. Le graphe ne possède pas de point d'inflexion. Asymptotes $x = \pi/2 + k\pi$.

**1431.** Partout définie. Le graphe est symétrique par rapport à l'origine des coordonnées. $y_{max} = \pi/2 - 1$ pour $x = -1$, $y_{min} = 1 - \pi/2$ pour $x = 1$. Point d'inflexion $(0, 0)$. Asymptotes $y = x \pm \pi$.

**1432.** Partout définie sauf pour $x = 1$ et $x = 3$. $y_{max} = 1/e$ pour $x = 2$. Pas de minimum. Asymptotes $x = 1$, $x = 3$ et $y = 1$.

**1433.** Partout définie. Période $2\pi$. $y_{min} = 1$ pour $x = k\pi$, où $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $y_{max} = e - 1$ pour $x = \pi/2 + 2k\pi$ et $y_{max} = 1 + 1/e$ pour $x = 3\pi/2 + 2k\pi$. Pas d'asymptote.

**1434.** Partout définie; $y_{max} = 4/27$ pour $x = 8/27$, $y_{min} = 0$ pour $x = 0$. Le graphe ne possède pas de point d'inflexion ni d'asymptote.

**1435.** Partout définie. Le graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. $y_{max} = 0$ pour $x = 0$, $y_{min} = -3$ pour $x = \pm 1$. Le graphe ne possède pas de point d'inflexion ni d'asymptote.

**1436.** Partout définie. Le graphe est symétrique par rapport à l'origine des coordonnées; $y_{max} = 2/3$ pour $x = 1$, $y_{min} = -2/3$ pour $x = -1$. Point d'inflexion du graphe (0, 0). Pas d'asymptote.

**1437.** Partout définie. $y_{max} = 2$ pour $x = 0$, $y_{min} = 0$ pour $x = -1$. Point d'inflexion du graphe $(-1/2, 1)$. Asymptote $y = 1$.

**1438.** Partout définie. $y_{max} \approx 2{,}2$ pour $x = 7/11$, $y_{min} = 0$ pour $x = 1$. Abscisses des points d'inflexion du graphe $-1$ et $\frac{7 \pm 3\sqrt{3}}{11}$. Pas d'asymptote.

**1439.** Partout définie. $y_{max} = 2\sqrt[3]{4}$ pour $x = 4$, $y_{min} = 0$ pour $x = 0$. Point d'inflexion du graphe (6, 0). Asymptote $x + y = 2$.

**1440.** La fonction est définie pour $x \geqslant 0$, biunivoque. La fonction $y = x + \sqrt{x^5}$ (la branche supérieure du graphe) croît monotonement. La fonction $y = x - \sqrt{x^5}$ (la branche inférieure du graphe) possède un maximum pour $x = \sqrt[3]{20}/5$. Le graphe ne possède pas de point d'inflexion ni d'asymptote.

**1441.** Définie pour $x \geqslant 0$, biunivoque. La fonction $y = x^2 + \sqrt{x^5}$ (la branche supérieure du graphe) croît monotonement. La fonction $y = x^2 - \sqrt{x^5}$ (la branche inférieure du graphe) possède un maximum pour $x = 16/25$. Abscisse du point d'inflexion de la branche inférieure du graphe: 64/225. Pas d'asymptote.

**1442.** Définie pour $x \geqslant -1$, biunivoque. Pas d'extrémum. Le graphe est symétrique par rapport à l'axe des abscisses, possède deux points d'inflexion (0, 1) et (0, —1) et pas d'asymptote.

**1443.** Définie dans les intervalles $[-1, 0]$ et $]1, \infty[$, biunivoque. Le graphe est symétrique par rapport à l'axe des abscisses. $|y|_{max} = \sqrt[4]{12}/3$ pour $x = -\sqrt{3}/3$. Abscisse des points d'inflexion du graphe $\sqrt{1 + \frac{\sqrt{12}}{3}}$. Pas d'asymptote.

**1444.** Définie pour $x \geqslant 0$, biunivoque. Le graphe est symétrique par rapport à l'axe des abscisses. $|y|_{max} = \sqrt{12}/9$ pour $x = 1/3$. Le graphe ne possède pas de point d'inflexion ni d'asymptote.

**1445.** Définie pour $x = 0$ et $x \geqslant 1$. L'origine des coordonnées est un point isolé. Le graphe est symétrique par rapport à l'axe des abscisses. Pas d'extrémum. Points d'inflexion du graphe $\left(4/3, \pm\frac{4\sqrt{3}}{9}\right)$. Pas d'asymptote.

**1446.** Définie pour $x < 0$ et pour $x \geqslant \sqrt[3]{2}$, biunivoque. Le graphe est symétrique par rapport à l'axe des abscisses. $|y|_{max} = 1$ pour $x = -1$. Le graphe ne possède pas de point d'inflexion. Asymptotes $x = 0$ et $y = \pm x\sqrt{3}/3$.

**1447.** Définie pour $x \leqslant -2$ et $x > 0$, biunivoque. Le graphe est symétrique par rapport à la droite $y = x$. $y_{max} = -2$ pour $x = 1$. Le graphe ne possède pas de point d'inflexion. Asymptotes $x = 0$, $y = 0$ et $x + y = 0$.

**1448.** Définie pour $-a \leqslant x < a$, biunivoque. Le graphe est symétrique par rapport à l'axe des abscisses. $|y|_{max} = a\sqrt{\frac{5\sqrt{5} - 11}{2}}$ pour $x = -\frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Pas de point d'inflexion. Asymptote $x = a$.

**1449.** Définie pour $0 \leqslant x \leqslant 4$, biunivoque. Le graphe est symétrique par rapport à l'axe des abscisses. $|y|_{max} = \sqrt{3}$ pour $x = 3$. Abscisse du point d'inflexion du graphe $3 - \sqrt{3}$. Pas d'asymptote.

**1450.** Définie pour $-2 \leqslant x \leqslant 2$, biunivoque. Le graphe est symétrique par rapport aux axes des coordonnées. $|y|_{max} = 3\sqrt{3}/5$ pour $x \pm 1$. Points d'inflexion du graphe (0, 0) et $(\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{3}/5)$. Pas d'asymptote.

**1451.** Définie pour $-1 \leqslant x \leqslant 1$, biunivoque. Le graphe est symétrique par rapport aux axes de coordonnées. $|y|_{\max} = 1/2$ pour $x = \sqrt{2}/2$. Point d'inflexion du graphe (0, 0). Pas d'asymptote.

**1452.** Définie pour $x \geqslant 1$, biunivoque. Le graphe est symétrique par rapport à l'axe des abscisses; $|y|_{\max} = 1$ pour $x = 2$. Abscisse du point d'inflexion $\frac{6+2\sqrt{3}}{3}$. Asymptote $y = 0$.

**1453.** Définie pour $0 \leqslant x < 2a$, biunivoque. Le graphe est symétrique par rapport à l'axe des abscisses. Pas d'extrémum. Pas de point d'inflexion. Asymptote $x = 2a$.

**1454.** Définie pour $x < 0$, $0 < x \leqslant 1$ et pour $x \geqslant 2$, biunivoque. Le graphe est symétrique par rapport à l'axe des abscisses, possède les asymptotes $x = 0$ et $y = \pm 1$ et deux points d'inflexion. Pas d'extrémum.

**1455.** Définie pour $-a \leqslant x < 0$ et pour $0 < x \leqslant a$, biunivoque. Le graphe est symétrique par rapport à l'axe des abscisses. Pas d'extrémum. Point d'inflexion du graphe $\left[a(\sqrt{3}-1),\ \pm a\sqrt[4]{\frac{27}{4}}\right]$. Asymptote $x = 0$.

**1456.** Définie pour $-1 \leqslant x \leqslant 1$ et pour $x = \pm 2$, biunivoque. Le graphe est symétrique par rapport aux axes de coordonnées et possède deux points isolés: $(\pm 2, 0)$, $|y|_{\max} = 1$ pour $x = 0$. Pas de point d'inflexion ni d'asymptote.

**1457.** Définie pour $-1 \leqslant x \leqslant 1$, biunivoque. Le graphe est symétrique par rapport aux axes de coordonnées. $|y|_{\max} = 1$ pour $x = 0$. Points d'inflexion du graphe $(\pm\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2}/4)$. Pas d'asymptote.

**1458.** Définie pour $x \leqslant -1$ et $x \geqslant 1$, biunivoque. Le graphe est symétrique par rapport aux axes de coordonnées. Pas d'extrémum. Points d'inflexion du graphe $(\pm\sqrt{2}, \pm 1/2)$. Asymptotes $y = \pm x$.

**1459.** Définie pour $x \geqslant 0$, biunivoque. Le graphe est symétrique par rapport à l'axe des abscisses. $|y|_{\max} = 1$ pour $x = 1/2$. Abscisse du point d'inflexion du graphe $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$. Asymptote $y = 0$.

**1460.** Définie partout sauf pour $x = 0$. Pas d'extrémum. Point d'inflexion du graphe $(-1/2, e^{-2} + 1/2)$. Asymptotes $x = 0$ et $x + y = 1$.

**1461.** Partout définie sauf pour $x = \pi/2 + k\pi$, où $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Période $\pi$. Pas d'extrémum. Le graphe ne possède pas de point d'inflexion. Asymptotes $x = \pi/2 + k\pi$.

**1462.** Partout définie. Le graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Les points d'extrémum vérifient l'équation $x = \operatorname{tg} x$. Asymptote $y = 0$.

**1463.** Partout définie. Pas d'extrémum. Pas de point d'inflexion. Pour $x \leqslant 0$ la fonction est identiquement égale à la fonction linéaire $y = 1 - x$. Asymptote $x + y = 3$. Le point (0, 1) est un point anguleux à deux tangentes distinctes.

**1464.** Partout définie. Le graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. $y_{\max} = 3$ pour $x = 0$, $y_{\min} = -1$ pour $x = \pm 2$. Le graphe ne possède pas de point d'inflexion ni d'asymptote et sa partie de droite est la portion de parabole $y = x^2 - 4x + 3$ située à droite de l'axe des ordonnées. Le point (0, 3) est un point anguleux à deux tangentes différentes.

**1465.** $x(t)$ et $y(t)$ sont définies pour tous les $t$ et $y(x)$ pour tous les $x$. Point de maximum $(-3, 3)$, point de minimum $(5, -1)$, point d'inflexion $(1, 1)$. Pas d'asymptote. La pente de la courbe tend vers $45^\circ$ lorsque $x \to \infty$.

**1466.** $x(t)$ et $y(t)$ sont définies pour tous les $t$ et $y(x)$ pour tous les $x$. Asymptotes $y = x$ et $y = x + 6\pi$; point de maximum $(-1 - 3\pi, -1 + 3\pi/2)$, point de minimum $(1 - 3\pi, 1 - 3\pi/2)$, point d'inflexion $(-3\pi, 0)$.

**1467.** $x(t)$ et $y(t)$ sont définies pour tous les $t$ sauf pour $t = -1$. Asymptote $x + y + 1 = 0$. Le point (0, 0) est un point nodal. Les axes de coordonnées sont tangents en ce point. Pas de point d'inflexion. Boucle fermée dans le premier quadrant.

1468. $x(t)$ et $y(t)$ sont définies pour tous les $t$. La fonction $y(x)$ n'est pas définie pour $x < -1/e$, biunivoque pour $-1/e < x < 0$, univoque pour $x > 0$. La courbe est symétrique par rapport à la droite $y + x = 0$. Point de maximum $(e, 1/e)$. Deux points d'inflexion. Les axes des coordonnées sont des asymptotes.

1469. Ligne fermée, symétrique par rapport à l'axe des abscisses, avec point de rebroussement $(a, 0)$.

1470. Rosace à trois boucles fermée. La fonction est définie dans les intervalles $[0, \pi/3]$, $[2/3\pi, \pi]$, $[4/3\pi, 5/3\pi]$. Extrémums pour $\varphi = \pi/6$, $\varphi = 5\pi/6$ et $\varphi = 3\pi/2$.

1471. La fonction est définie dans les intervalles $[0, \pi/2[$, $[\pi, 3\pi/2[$. Le graphe de la fonction est symétrique par rapport au pôle. Les droites $x = a$ et $x = -a$ sont asymptotes.

1472. La fonction est définie dans les intervalles $[0, \pi/2[$, $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$, $[7\pi/4, 2\pi]$. Le graphe de la fonction est symétrique par rapport au pôle. Asymptotes $x = a$ et $x = -a$. La droite $\varphi = 3\pi/4$ est tangente à la courbe au pôle.

1473. Existe pour toutes les valeurs de $\varphi$. Maximum $2a$ pour $\varphi = 0$, minimum 0 pour $\varphi = \pi$. Courbe fermée, symétrique par rapport à l'axe polaire. Le pôle est un point de rebroussement.

1474. La fonction est définie dans les intervalles $[0, \pi/2 + \arccos 1/b]$, $[3\pi/2 - \arccos 1/b, 2\pi]$. Maximum $a(1 + b)$ pour $\varphi = 0$, minimum 0 pour $\varphi = \pi/2 + \arccos 1/b$ et $\varphi = 3\pi/2 - \arccos 1/b$. Le graphe de la fonction est symétrique par rapport à l'axe polaire.

1475. Existe pour $\varphi > 0$. Point d'inflexion $(\sqrt{2\pi}; 0.5)$. L'axe polaire est asymptote. La courbe s'enroule en spirale autour du pôle et tend asymptotiquement vers lui.

1476. Existe pour $\varphi \geqslant 0$. Le graphe est une spirale issue du pôle et tendant asymptotiquement vers la circonférence $\rho = 1$.

1477. Existe pour $-1 \leqslant t \leqslant 1$. Entièrement située à droite de l'axe des ordonnées. Courbe fermée, maximum pour $t = 0$ ($\varphi = 1$ radian, $\rho = 1$). Pas de point d'inflexion. Est tangente à l'axe des ordonnées pour $t = \pm 1$.

1478. Rosace à quatre boucles. L'origine des coordonnées est un point nodal double.

1479. La courbe est entièrement contenue dans la bande $-\frac{a\sqrt{2}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Symétrique par rapport à l'origine. Asymptote $x = 0$. Point d'inflexion $(0, 0)$. L'axe des $x$ est tangente en ce point. Il existe deux autres points d'inflexion.

1480. Symétrique par rapport aux axes $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$; courbe fermée avec quatre points de rebroussement: $(a, 0)$, $(0, a)$, $(-a, 0)$ et $(0, -a)$. L'origine des coordonnées est un point isolé.

1481. Symétrique par rapport aux axes de coordonnées et aux bissectrices des angles de coordonnées. Asymptotes $(x \pm y)^2 = 1/2$. L'origine des coordonnées est un point nodal d'ordre 4. Les branches de la courbe sont tangentes aux axes de coordonnées en ce point. La courbe a la forme d'« ailes » d'un moulin.

1485. Les autres racines sont simples.

1486. $0{,}1 < x < 0{,}2$. 1487. $-0{,}7 < x_1 < -0{,}6$ et $0{,}8 < x_2 < 0{,}9$.

1488. $0{,}32 < x < 0{,}33$.

1489. $-3{,}11 < x_1 < -3{,}10$, $0{,}22 < x_2 < 0{,}23$ et $2{,}88 < x_3 < 2{,}89$.

1490. $0{,}38 < x_1 < 0{,}39$ et $1{,}24 < x_2 < 1{,}25$. 1491. $-0{,}20 < x < -0{,}19$.

1492. $0{,}84 < x < 0{,}85$. 1493. $1{,}63 < x < 1{,}64$. 1494. $1{,}537 < x < 1{,}538$.

1495. $0{,}826 < x < 0{,}827$. 1496. $1{,}096 < x < 1{,}097$.

1497. $0{,}64 < x < 0{,}65$. Pour $0 < a < 1$ il existe un nombre réel et un seul égal à son logarithme et de plus il est inférieur à l'unité. Pour $1 < a <$

$< e^{1/e}$ il existe deux nombres distincts égaux à leurs logarithmes: l'un compris dans l'intervalle $]1, e[$, l'autre dans $]e, +\infty[$. Pour $a = e^{1/e}$ le seul nombre égal à son logarithme est $e$ (il est racine double de l'équation $\log_a x = x$). Pour $e^{1/e} < a < \infty$ il n'existe pas de nombres réels égaux à leurs logarithmes.

**1498.** $(x-4)^4 + 11(x-4)^3 + 37(x-4)^2 + 21(x-4) - 56.$

**1499.** $(x+1)^3 - 5(x+1) + 8.$

**1500.** $(x-1)^{10} + 10(x-1)^9 + 45(x-1)^8 + 120(x-1)^7 + 210(x-1)^6 + 249(x-1)^5 + 195(x-1)^4 + 90(x-1)^3 + 15(x-1)^2 - 5(x-1) - 1.$

**1501.** $x^6 - 9x^5 + 30x^4 - 45x^3 + 30x^2 - 9x + 1.$

**1502.** $f(-1) = 143;\ f'(0) = -60;\ f''(1) = 26.$

**1503.** $-1 - (x+1) - (x+1)^2 - \ldots - (x+1)^n + (-1)^{n+1}\dfrac{(x+1)^{n+1}}{[-1+\theta+(x+1)]^{n+2}}$, où $0<\theta<1$.

**1504.** $x + \dfrac{x^2}{1} + \dfrac{x^3}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{(n-1)!} + \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}(\theta x + n + 1)e^{\theta x}$, où $0<\theta<1$.

**1505.** $2 + \dfrac{x-4}{4} - \dfrac{(x-4)^2}{64} + \dfrac{(x-4)^3}{512} - \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{(2n-2)!\,(x-4)^n}{n!\,(n-1)!\,2^{4n-2}} + \dfrac{(-1)^n(2n)!\,(x-4)^{n+1}}{2^{2n+1}n!\,(n+1)!\sqrt{[4+\theta(x-4)]^{2n+1}}}$,

où $0<\theta<1$.

**1506.** $1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,\dfrac{e^{\theta x} - e^{-\theta x}}{2}$, où $0<\theta<1$.

**1507.** $(x-1) + \dfrac{5}{2!}(x-1)^2 + \dfrac{11}{3!}(x-1)^3 + \dfrac{6}{4!}(x-1)^4 + \ldots$

$\ldots + \dfrac{(-1)^n 6(x-1)^n}{(n-3)(n-2)(n-1)n} + \dfrac{(-1)^{n+1}6(x-1)^{n+1}}{(n-2)(n-1)n(n+1)[1+\theta(x-1)]^{n-2}}$,

où $0<\theta<1$.

**1508.** $\dfrac{2x^2}{2!} - \dfrac{2^3x^4}{4!} + \dfrac{2^5x^6}{6!} - \dfrac{2^7x^8}{8!} + \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!} + \dfrac{(-1)^n 2^{2n}x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin 2\theta x$, où $0<\theta<1$.

**1509.** $2 - (x-2) + (x-2)^2 - (x-2)^3 + \dfrac{(x-2)^4}{[1+\theta(x-2)]^5}$, où $0<\theta<1$.

**1510.** $x + \dfrac{x^3}{3}\cdot\dfrac{1+2\sin^3\theta x}{\cos^4\theta x}$, où $0<\theta<1$.

**1511.** $x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{4!}\,\dfrac{9\theta x + 6\theta^3x^3}{(1-\theta^2x^2)^{\frac{7}{2}}}$, où $0<\theta<1$.

**1512.** $1 - \dfrac{1}{2}(x-1) + \dfrac{1\cdot3}{2^2\cdot2}(x-1)^2 - \dfrac{1\cdot3\cdot5}{2^3\cdot3!}(x-1)^3 + \dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2^4\cdot4!}\,\dfrac{(x-1)^4}{\sqrt{[1+\theta(x-1)]^5}}$, où $0<\theta<1$.

**1513*.** En vertu de l'existence de la dérivée troisième l'on a

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f'''(a+\theta_1 h).$$

En comparant avec l'expression de l'énoncé on obtient :

$$\frac{h^2}{2!}[f''(a+\theta h)-f''(a)]=\frac{h^3}{3!}f'''(a+\theta_1 h),$$

i.e.

$$\frac{f''(a+\theta h)-f''(a)}{h}=\theta\frac{f''(a+\theta h)-f''(a)}{\theta h}=\frac{1}{3}f'''(a+\theta_1 h).$$

Il reste à passer à la limite pour $h \to 0$.

1514. La fonction décroît. Point d'inflexion (0, 3).
1515. La fonction possède un minimum égal à 1.
1516. La fonction possède un minimum égal à 2.
1517. La fonction possède un maximum égal à —11.
1518. La fonction croît. Point d'inflexion (0, 0).
1519. La fonction croit. Point d'inflexion (0, 4).
1520. $f(x) = 1 - 6(x-1) + (x-1)^2 + \ldots$; $f(1{,}03) \approx 0{,}82$.
1521. $f(x) = 321 + 1087(x-2) + 1648(x-2)^2 + \ldots$; $f(2{,}02) \approx \approx 343{,}4$; $f(1{,}97) \approx 289{,}9$.
1522. $f(x) = 1 + 60(x-1) + 2570(x-1)^2 + \ldots$; $f(1{,}005) \approx 1{,}364$.
1523. $f(x) = -6 + 21(x-2) + 50(x-2)^2 + \ldots$; $f(2{,}1) \approx -3{,}4$; $f(2{,}1) = -3{,}36399$; $\delta = 0{,}036$; $\delta' \approx 0{,}011 = 1{,}1\ \%$.
1524. 1,65. 1525. 0,78, $\delta < 0{,}01$. 1526. 0,342020. 1527. 0,985.

1528. 0,40, $\delta < 0{,}01$. 1529. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. 1530. $\frac{a}{b^2}$; $\frac{b}{a^2}$.

1531. 36. 1532. 0,128. 1533. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. 1534. 0.

1535. 1. 1536. $\frac{8\sqrt{2}}{3a}$. 1537. $\frac{6|x|}{(1+9x^4)^{\frac{3}{2}}}$.

1538. $\frac{a^4b^4}{(b^4x^2+a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}$. 1539. $|\cos x|$. 1540. $\frac{1}{3\sqrt[2]{a|xy|}}$.

1541. $\frac{|(m-1)(ab)^{2m}(xy)^{m-2}|}{(b^{2m}x^{2m-2}+a^{2m}y^{2m-2})^{\frac{3}{2}}}$. 1542. $\frac{1}{a\,\mathrm{ch}^2\frac{x}{a}}$.

1543. $\frac{1}{6}$. 1544. $\frac{2}{3a|\sin 2t_1|}$. 1545. $\frac{2}{\pi a}$.

1546. $\frac{3}{8a\left|\sin\frac{t}{2}\right|}$. 1547. $\frac{1}{\sqrt{1+\ln^2 a}}$.

1548. $\frac{2+\varphi^2}{a(1+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}$. 1549. $\frac{\varphi^2+k^2+k}{a\varphi^{k-1}(\varphi^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}$.

1550. $\frac{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}{2ab\sqrt{2}}$. 1554. $(x+4)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{125}{4}$.

1555. $(x-2)^2+(y-2)^2=2$. 1556. $(x+2)^2+(y-3)^2=8$.

1557. $\left(x-\frac{\pi-10}{4}\right)^2+\left(y-\frac{9}{4}\right)^2=\frac{125}{16}$.

1558. $\left(x+\frac{7}{3}a\right)^2+\left(y-\frac{8}{3}a\right)^2=\frac{125}{9}a^2$. 1559. $\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right)$.

1560. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{1}{2}\ln 2\right)$. 1561. $\left(-\frac{1}{2}\ln 2,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

1562. Pour $t=k\pi$. 1563. $\frac{3}{4}a$. 1566. $a=3$, $b=-3$, $c=1$.

1567. $y=-x^5-0{,}6x^4+4{,}5x^3+0{,}1x^2$.

1568. $\xi=x-\frac{[1+n^2x^{2(n-1)}]\,x}{n-1}$, $\eta=x^n+\frac{1+n^2x^{2(n-1)}}{n(n-1)\,x^{n-2}}$.

1569. $\xi=\frac{(a^2+b^2)\,x^3}{a^4}$, $\eta=-\frac{(a^2+b^2)\,y^3}{b^4}$; $(a\xi)^{\frac{2}{3}}-(b\eta)^{\frac{2}{3}}=(a^2+b^2)^{\frac{2}{3}}$.

1570. $\xi=x+3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$, $\eta=y+3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$; $(\xi+\eta)^{\frac{2}{3}}+(\xi-\eta)^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{2}{3}}$.

1571. $\xi=\pm\frac{4}{3}\sqrt{\frac{y}{a}}\,(3y+a)$, $\eta=-\frac{9y^2+2ay}{2a}$.

1572. $\xi=-\frac{4}{3}t^3$, $\eta=3t^2-\frac{3}{2}$, $\xi^2=\frac{16}{243}\left(\eta+\frac{3}{2}\right)^3$.

1573. $\left(\frac{3\eta}{8}\right)^4+6a^2\left(\frac{3\eta}{8}\right)^2+3a^3\xi=0$. 1574. $\xi^{\frac{2}{3}}+\eta^{\frac{2}{3}}=(2a)^{\frac{2}{3}}$.

1576. Oui. 1579. $2p\left[\sqrt{\left(\frac{x+p}{3p}\right)^3}-1\right]$. 1580. $\frac{4(a^3-b^3)}{ab}$.

1581. $6a$. 1582*. $16a$. Ecrire les équations paramétriques de la développée, puis changer de coordonnées et de paramètre en posant $x=-x_1$, $y=-y_1$, $t=t_1+\pi$.

1583*. Se servir de la relation entre la longueur de la développée et l'accroissement du rayon de courbure.

1584. 0,785. 1585. 0,073. 1586. (3,00; 2,46).

1587. (—0,773; —0,841). 1588. (1,38; 4,99).

1589. (0,57; —3,62). 1590. 0,78. 1591. (2,327; 0,845).

## Chapitre V

1592. 1) $\int_0^3 (x^2+1)\,dx$; 2) $\int_a^b (e^x+2)\,dx$; 3) $\int_0^\pi \sin x\,dx$;

4) $\int_{-2}^{2} (8-2x^2)\,dx$; 5) $\int_0^1 (\sqrt{x}-x^2)\,dx$; 6) $\int_1^e (\ln x-\ln^2 x)\,dx$.

1593. $20-\frac{4}{n}$ et $20+\frac{4}{n}$; $\alpha=\frac{4}{n}$; $\sigma=\frac{1}{5n}$.

1594. $\alpha=\frac{149}{600}\approx 0{,}248$, $\delta\approx 0{,}039$.

1595. 31,5. 1596. $10\frac{2}{3}$. 1597. $\frac{2}{3}ah=40$ cm². 1598. $10\frac{2}{3}$.

1599. 8. 1600. $21\frac{1}{3}$. 1601. $2\frac{7}{8}$. 1602. 140 cm.

1603. ≈122,6 m. 1604. $20\frac{5}{6}$ cm. 1605. 625 J.

1606. 4 cm.

1607. a) $m_n=\sum_{i=0}^{n-1} v(\xi_i)(t_{i+1}-t_i)$, $t_0=T_0$, $t_n=T_1$; b) $m=\int_{T_0}^{T_1} v(t)\,dt$. 1608. a) $\theta_n=\sum_{i=0}^{n-1} \psi(\xi_i)(t_{i+1}-t_i)$, $t_0=T_0$, $t_n=T_1$; b) $\theta=\int_{T_0}^{T_1} \psi(t)\,dt$.

1609. $Q_n=\sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i)(t_{i+1}-t_i)$, $t_0=0$, $t_n=T$; $Q=\int_0^T I(t)\,dt$.

1610. a) $A_n=\sum_{i=0}^{n-1} \varphi(\xi_i)\psi(\xi_i)(t_{i+1}-t_i)$, $t_0=T_0$, $t_n=T_1$; b) $A=\int_{T_0}^{T_1} \varphi(t)\psi(t)\,dt$.

1611. 1500 coulombs. 1612. $\approx$67 600 joules. 1613. 2880 joules.

1614. a) $P_n=\sum_{i=0}^{n-1} a\xi_i(x_{i+1}-x_i)$, $x_0=0$, $x_n=b$; b) $P=\int_0^b ax\,dx$.

1615. a) $\frac{ab^2}{2}=18{,}75$ kgf; b) la droite doit être menée à une distance $\frac{b}{\sqrt{2}}\approx 17{,}7$ cm de la surface.

1616. $e-1$. 1617. $\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}$. 1618. 1) 50; 2) $4a$; 3) $\frac{7a^3}{24}$; 4) $\frac{7}{3}ab^2$; 5) $a\left(a^2-\frac{a}{2}+1\right)$; 6) $\frac{4}{3}m$; 7) 31,5; 8) $\frac{(a-b)^3}{6}$; 9) $\frac{a^2}{3}$; 10) $\frac{a(a^2-3ab+3b^2)}{3(a-b)^2}$; 11) 4; 12) $16\frac{2}{15}$; 13) 0. 1619*. $\frac{1}{k+1}$; $\approx 1{,}67\cdot 10^{11}$. Ecrire l'expression dont on cherche la limite sous forme d'une somme intégrale d'une fonction.

1620. ln 2. 1621. ln 2. 1622*. ln $a$, ln 3 $\approx$ 1,1. Voir exercices 1620 et 1621.

1623*. 1) $ae^a-e^a+1$; 2) $a\ln a-a+1$; 3) $\frac{(\ln b)^2-(\ln a)^2}{2}$.

On obtient l'expression $q+2q^2+\ldots+nq^n$ par différentiation de la somme des termes d'une progression géométrique.

1624. $\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx=2\int_0^{\pi} \sin x\,dx$. 1625. $\frac{1}{2}$. 1626. $\frac{64}{3}$.

1627. $\frac{8}{5}$. 1630. $8<I<9{,}8$. 1631. $3<I<5$.

1632. $\pi<I<2\pi$. 1633. $\frac{20}{29}<I<1$. 1634. $\frac{\pi}{9}<I<\frac{2\pi}{3}$.

1635. $\frac{e^2-1}{e^{e^2-1}} < I < \frac{e^2-1}{e^2}$. 1636. 1) la première ; 2) la deuxième.

1637. 1) la première ; 2) la deuxième ; 3) la première ; 4) la deuxième.
1640. $0{,}85 < I < 0{,}90$.

1641. a) $1 < I < \sqrt{2} \approx 1{,}414$ ;

b) $1 < I < \frac{1+\sqrt{2}}{2} \approx 1{,}207$ ; c) $1 < I < \sqrt{\frac{6}{5}} \approx 1{,}095$.

1642. $y_{\text{moy}} = \frac{k(x_1+x_2)}{2} + b$ ; $\frac{x_1+x_2}{2}$.

1643. $y_{\text{moy}} = \frac{a}{3}(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$. Si $x_1x_2 \geqslant 0$, en un point ; si $x_1 < 0$ et $x_2 > 0$, et sous réserve que $-\frac{x_1}{2} \leqslant x_2 \leqslant -2x_1$ en deux points, dans le cas contraire en un point.

1644. 24,5. 1645. $\frac{\pi a}{4}$. 1646. 0. 1647. $\frac{2}{3}h = 1$ m.

1648. 11 $a$. 1649. ~1558 watts. 1650. 1) $\frac{x^3}{3}$ ; 2) $\frac{x^6-a^6}{6}$ ; 3) $\frac{x^4-x^5}{20}$.

1651. $s = \frac{2}{3}t^3$. 1652. $A = 100s + 25s^2$ joules, $s$—l'espace en m.

1653. $A = \frac{1}{R}\left(\frac{\alpha^2}{3}t^3 + \alpha\beta t^2 + \beta^2 t\right)$, où $\alpha = \frac{E_2-E_1}{t_2-t_1}$, $\beta = \frac{E_1t_2-E_2t_1}{t_2-t_1}$.

1654. $Q = c_0t + \frac{\alpha}{2}t^2 + \frac{\beta}{3}t^3$.

1655. $dS = 10$, $\Delta S = 10{,}10033\ldots$ 1656. $dS = 1$.

1657.

| $\Delta x$ | $\Delta S$ | $dS$ | $\alpha$ | $\delta$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 92,25 | 64 | 28,25 | 0,442 |
| 0,1 | 6,644 | 6,4 | 0,244 | 0,0382 |
| 0,01 | 0,6424 | 0,64 | 0,0024 | 0,00376 |

1658. $\frac{1}{3}$. 1659. 0 ; $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; 1. 1660. $\frac{d}{dx}\int_x^a f(x)\,dx = -f(x)$.

1661. $-1$, $-\frac{5}{4}$. 1662. $\frac{\sin 2x}{x}$. 1663. 1) $x$ ; 2) $-4x\ln x$.

1664*. $2\ln^2 2x - \ln^2 x$. Mettre l'intégrale $\int_x^{2x} \ln^2 x\,dx$ sous forme de la somme : $\int_x^a \ln^2 x\,dx + \int_a^{2x} \ln^2 x\,dx$, où $a > 0$.

1665. $y' = -\frac{\cos x}{e^y}$. 1666. 1) $\frac{dy}{dx} = \operatorname{ctg} t$ ; 2) $\frac{dy}{dx} = -t^2$. 1667. $-2$.

1668. Minimum pour $x = 0$. $I(0) = 0$. 1669. 1.

1670. $y_{\max} = 5/6$ pour $x = 1$, $y_{\min} = 2/3$ pour $x = 2$. Point d'inflexion (3/2, 3/4).

1672. 1) $\frac{3}{4}$ ; 2) $-\frac{15}{32}$ ; 3) 52 ; 4) $4\frac{5}{6}$ ; 5) $45\frac{1}{6}$ ; 6) $\approx 0{,}08$ ; 7) $2-\sqrt{2}$ ; 8) $6\frac{2}{3}$ ; 9) $3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}} - \frac{1}{\sqrt[3]{b}}\right)$ ; 10) $\frac{z_1^2-z_0^2}{2} - \frac{4}{3}(\sqrt{z_1^3} - \sqrt{z_0^3}) + z_1 - z_0$.

1673. 1) 2; 2) 0; 3) $e^3-1$; 4) 1; 5) $\pi/4$; 6) $\pi/6$. 1674. 0.
1675. $1-\sqrt{3}$; $-1$.

## Chapitre VI

1676. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$. 1677. $\frac{mx^{\frac{n}{m}+1}}{n+m}+C$. 1678. $C-\frac{1}{x}$.

1679. $\approx 0{,}4343\cdot 10^x+C$. 1680. $\frac{(ae)^x}{1+\ln a}+C$.

1681. $\sqrt{x}+C$. 1682. $\sqrt{\frac{2h}{g}}+C$. 1683. $\approx 4{,}1x^{0{,}83}+C$.

1684. $u-u^2+C$. 1685. $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+x+C$.

1686. $C-\frac{2}{3x\sqrt{x}}-e^x+\ln|x|$.

1687. $C-10x^{-0{,}2}+15x^{0{,}2}-3{,}62x^{1{,}38}$.

1688. $z-2\ln|z|-\frac{1}{z}+C$. 1689. $\frac{2x^2-12x-6}{3\sqrt{x}}+C$.

1690. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+\frac{18}{7}x\sqrt[6]{x}+\frac{9}{5}x\sqrt[3]{x^2}+\frac{6}{13}x^2\sqrt[6]{x}+C$.

1691. $\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}-\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C$. 1692. $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin x+C$.

1693. $3x-\frac{2(1{,}5)^x}{\ln 1{,}5}+C$. 1694. $\frac{1}{2}(\operatorname{tg} x+x)+C$.

1695. $C-\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x$. 1696. $\operatorname{tg} x-x+C$.

1697. $C-\operatorname{ctg} x-x$. 1698. $x-\sin x+C$.

1699. $\operatorname{arctg} x-\frac{1}{x}+C$. 1700. $\ln|x|+2\operatorname{arctg} x+C$.

1701. $\operatorname{tg} x+C$. 1702. $\frac{\pi}{2}x+C$. 1703. $\frac{\sin^2 x}{2}+C$.

1704. $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}+C$. 1705. $5\sqrt{1+x^2}+C$. 1706. $\frac{(x+1)^{16}}{16}+C$.

1707. $C-\frac{1}{8(2x-3)^4}$. 1708. $\frac{(a+bx)^{1-c}}{b(1-c)}+C$.

1709. $C-\frac{5}{33}(8-3x)^{\frac{11}{5}}$. 1710. $C-\frac{\sqrt{(8-2x)^3}}{3}$.

1711. $\frac{3m}{b}\sqrt[3]{a+bx}+C$. 1712. $\frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}+C$.

1713. $C-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}$. 1714. $\frac{5}{18}\sqrt[5]{(x^3+2)^6}+C$.

1715. $\sqrt{x^2+1}+C$. 1716. $\frac{2}{5}\sqrt{4+x^5}+C$.

1717. $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^4+1)^2}+C$. 1718. $\sqrt{3x^2-5x+6}+C$.

1719. $\frac{1}{4}\sin^4 x+C$. 1720. $\sec x+C$. 1721. $3\sqrt[3]{\sin x}+C$.

1722. $C-\frac{2}{5}\cos^5 x$. 1723. $\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3}+C$.

1724. $\frac{(\operatorname{arctg} x)^3}{3}+C$. 1725. $C-\frac{1}{2(\arcsin x)^2}$.

1726. $2\sqrt{1+\operatorname{tg} x}+C$. 1727. $\sin 3x+C$.

1728. $\operatorname{tg}(1+\ln x)+C$. 1729. $\frac{1}{3}\sin 3x+C$.

1730. $x\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin 2x+C$. 1731. $C-\frac{1}{2}\cos(2x-3)$.

1732. $C-\frac{1}{2}\sin(1-2x)$. 1733. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+C$ ou $\frac{1}{2}(\operatorname{tg} 4x-\sec 4x)+C$. 1734. $C-\cos(e^x)$.

1735. $\ln(1+x^2)+C$. 1736. $\ln|\arcsin x|+C$.

1737. $\ln(x^2-3x+8)+C$. 1738. $\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C$.

1739. $\frac{1}{c}\ln|cx+m|+C$. 1740. $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$;

1741. $\frac{1}{3}\ln|x^3+1|+C$. 1742. $\ln(e^x+1)+C$.

1743. $\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+a^2)+C$. 1744. $C-\ln|\cos x|$.

1745. $\ln|\sin x|+C$. 1746. $C-\frac{1}{3}\ln|\cos 3x|$.

1747. $\frac{1}{2}\ln|\sin(2x+1)|+C$. 1748. $C-\ln(1+\cos^2 x)$.

1749. $\ln|\ln x|+C$. 1750. $\frac{\ln^{m+1} x}{m+1}+C$, si $m\neq -1$ et $\ln|\ln x|+C$, si $m=-1$. 1751. $e^{\sin x}+C$.

1752. $e^{\sin x}+C$. 1753. $\frac{a^{3x}}{3\ln a}+C$. 1754. $C-\frac{a^{-x}}{\ln a}$.

1755. $C-\frac{e^{1-3x}}{3}$. 1756. $0{,}5\,e^{x^2}+C$. 1757. $C-\frac{1}{3}e^{-x^3}$.

1758. $\arcsin\frac{x}{3}+C$. 1759. $\frac{1}{5}\arcsin 5x+C$.

1760. $\frac{1}{3}\operatorname{arctg} 3x+C$. 1761. $\arcsin\frac{x}{2}+C$.

1762. $\frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{3}x+C$. 1763. $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{2}+C$.

1764. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2+C$. 1765. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{a}+C$.

1766. $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x^3}{2}+C$. 1767. $\frac{1}{4}\arcsin x^4+C$.

1768. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{e^x}{2}+C$. 1769. $\frac{\arcsin 2^x}{\ln 2}+C$.

1770. $\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{\sin\alpha}{a}+C$. 1771. $e^x+e^{-x}+C$.

1772. $\frac{1}{3}e^{3x}+\frac{3}{2}e^{2x}+3e^{x}+x+C$. 1773. $\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C$.

1774. $\frac{3}{2}\ln(x^2+9)-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C$. 1775. $\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$.

1776. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x^2-\frac{1}{4}\ln(x^4+1)+C$. 1777. $\arcsin x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+C$.

1778. $\frac{2}{3}[x^3-\sqrt{(x^2-1)^3}]-x+C$. 1779. $C-2\sqrt{1-x^2}-\frac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^3}$.

1780. $C-\frac{1}{9}[\sqrt{1-9x^2}+(\arccos 3x)^3]$. 1781. $x-4\ln|x+4|+C$.

1782. $\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}\ln|2x+1|\right]+C$. 1783. $\frac{A}{b}\left[x-\frac{a}{b}\ln|bx+a|\right]+C$.

1784. $C-x-6\ln|3-x|$. 1785. $1x+3\ln|x-2|+C$.

1786. $\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}\ln|2x-1|+C$. 1787. $x+\ln(x^2+1)+C$.

1788. $x-2\operatorname{arctg}x+C$. 1789. $C-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-x-\ln|1-x|$.

1790. $\frac{x^3}{3}-x+\operatorname{arctg}x+C$. 1791. $\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C$. 1792. $\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$.

1793. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{2x-3}{x+1}\right|+C$. 1794. $\frac{1}{b-a}\ln\left|\frac{b-x}{a-x}\right|+C$.

1795. $x+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$. 1796. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-5}{x-2}\right|+C$.

1797. $\frac{1}{7}\ln\left|\frac{x-2}{x+5}\right|+C$. 1798. $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+3}\right|+C$.

1799. $\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x\sqrt{3}}{\sqrt{2}-x\sqrt{3}}\right|+C$. 1800. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C$.

1801. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$. 1802. $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{1-2x}{3}+C$.

1803. $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{2}+C$. 1804. $\frac{1}{2}\arcsin(2x+3)+C$.

1805. $\arcsin(x-2)+C$. 1806. $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x-1}{3}+C$.

1807. $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x+1}{\sqrt{3}}+C$. 1808. $\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C$.

1809. $\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C$. 1810. $C-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

1811. $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+C$. 1812. $2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-x+C$.

1813. $2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-x+C$. 1814. $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C$.

1815. $\ln(2+\sin 2x)+C$.

1816. $C-\frac{1}{4}\left(\frac{\cos 4x}{2}+\cos 2x\right)$. 1817. $\frac{1}{10}\sin 5x+\frac{1}{2}\sin x+C$.

1818. $\frac{1}{6}\sin 3x-\frac{1}{14}\sin 7x+C$.

1819. $\frac{1}{8}\left(2x+\sin 2x+\frac{1}{2}\sin 4x+\frac{1}{3}\sin 6x\right)+C$.

1820. $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|+C$. 1821. $\ln(1+\sin x)+C$.

1822. $\frac{\cos^2 x}{2}-\ln|\cos x|+C$. 1823. $\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{3\sin^3 x}+C$.

1824. $2\sqrt{\cos\alpha}\left(\frac{\cos^2\alpha}{5}-1\right)+C$.

1825. $\operatorname{tg} x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C$. 1826. $\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C$.

1827. $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg} x+x+C$. 1828. $C-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x$.

1829. $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$. 1830. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\ln|\cos x|+C$.

1831. $C-\operatorname{ctg} x-\frac{2}{3}\operatorname{ctg}^3 x-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x$.

1832. $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{2}x\cos 2x+C$. 1833. $x\sin x+\cos x+C$.

1834. $C-e^{-x}(x+1)$. 1835. $\frac{3^x}{\ln^2 3}(x\ln 3-1)+C$.

1836. $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right)+C$. 1837. $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{x}{2}+C$.

1838. $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$.

1839. $x\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$.

1840. $2\sqrt{x+1}\arcsin x+4\sqrt{1-x}+C$.

1841. $x\operatorname{tg} x-\frac{x^2}{2}+\ln|\cos x|+C$.

1842. $\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C$. 1843. $C-\frac{1}{2x^2}\lg(x\sqrt{e})$.

1844. $\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg} x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$.

1845. $2(\sqrt{x}-\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x})+C$.

1846. $x\ln(x^2+1)-2x+2\operatorname{arctg} x+C$.

1847. $C-\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$.

1848. $x^2\sqrt{1+x^2}-\frac{2}{3}\sqrt{(1+x^2)^3}+C$.

1849. $\frac{(x^3+1)\ln(1+x)}{3}-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{6}-\frac{x}{3}+C$.

1850. $C-e^{-x}(2+2x+x^2)$. 1851. $e^x(x^3-3x^2+6x-6)+C$.

1852. $a^x\left(\frac{x^2}{\ln a}-\frac{2x}{\ln^2 a}+\frac{2}{\ln^3 a}\right)+C$.

1853. $C-x^3\cos x+3x^2\sin x+6x\cos x-6\sin x$.

1854. $\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}x^2\sin 2x+\frac{1}{4}x\cos 2x-\frac{1}{8}\sin 2x+C$.

1855. $x(\ln^2 x-2\ln x+2)+C$. 1856. $C-\frac{1}{x}(\ln^3 x+3\ln^2 x+6\ln x+6)$.

1857. $C-\frac{8}{27\sqrt{x^3}}\left(\frac{9}{4}\ln^2 x+3\ln x+2\right)$.

1858. $x(\arcsin x)^2+2\arcsin x\cdot\sqrt{1-x^2}-2x+C$.

1859. $\frac{x^2+1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 - x \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$

1860. $\frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}+C.$ 1861. $\frac{e^{3x}}{13}(\sin 2x - 5\cos 2x)+C.$

1862. $\frac{e^{ax}}{a^2+n^2}(n\sin nx + a\cos nx)+C.$

1863. $\frac{x}{2}(\sin\ln x - \cos\ln x)+C.$ 1864. $\frac{x}{2}(\cos\ln x + \sin\ln x)+C.$

1865*. $C - \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x.$ $\left(\text{Poser } dv = \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\text{, puis ramener}\right.$ $\left.\int\sqrt{1-x^2}\,dx \text{ à la forme } \int\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.\right)$

1866*. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+C.$ (Poser $u=\sqrt{a^2+x^2}$).

1867. $\frac{x-2}{x+2}e^x+C.$

1868. $\frac{1}{2}[(x^2-1)\sin x - (x-1)^2\cos x]\,e^x+C.$

1869. $2[\sqrt{x+1} - \ln(1+\sqrt{x+1})]+C.$

1870. $\frac{2\sqrt{x-1}}{35}(5x^3+6x^2+8x+16)+C.$

1871. $C - \frac{11}{2(x-2)^2} - \frac{4}{x-2}.$ 1872. $\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C.$

1873. $2\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-2}{2}}+C.$

1874. $2[\sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x})]+C.$ 1875. $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C.$

1876. $2(\sqrt{x} - \operatorname{arctg}\sqrt{x})+C.$

1877. $\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}} - 3(x+1)^{\frac{1}{3}} + 3\ln|1+\sqrt[3]{x+1}|+C.$

1878. $\frac{2}{a}[\sqrt{ax+b} - m\ln|\sqrt{ax+b}+m|]+C.$

1879. $x + \frac{6\sqrt[6]{x^5}}{5} + \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} + 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\ln|\sqrt[6]{x}-1|+C.$

1880. $3\sqrt[3]{x} + 3\ln|\sqrt[3]{x}-1|+C.$

1881. $2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\ln(1+\sqrt[4]{x})+C.$

1882. $\frac{6}{5}[\sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt[12]{x^5} + 2\ln|\sqrt[12]{x^5}-1|]+C.$

1883. $\frac{4}{21}(3e^x-4)\sqrt[4]{(e^x+1)^3}+C.$ 1884. $\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C.$

1885. $2\sqrt{1+\ln x} - \ln|\ln x| + 2\ln|\sqrt{1+\ln x}-1|+C.$

1886. $0{,}4\sqrt{(1+\cos^2 x)^3}(3-2\cos^2 x)+C.$

1887. $\frac{1}{2}\ln^2\operatorname{tg} x + C.$ 1888. $C - \frac{2}{9}\sqrt{a^3-x^3}(2a^3+x^3).$

1889. $\frac{x^2-4}{2}+\frac{8}{x^2-4}+4\ln|x^2-4|+C.$

1890. $C-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}$. 1891. $\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$

1892. $C-\frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{|x|}$. 1893. $C-\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}$.

1894. $C-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\arcsin x$. 1895. $\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}+C.$

1896. $C-\frac{\sqrt{(9-x^2)^5}}{45x^5}$. 1897. $\frac{\sqrt{x^2-9}}{9x}+C.$

1898. $\ln\frac{|x|}{1+\sqrt{x^2+1}}+C$. 1899. $C-\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}}$.

1900. $\frac{x}{4}(x^2-2)\sqrt{4-x^2}+2\arcsin\frac{x}{2}+C.$

1901. $\frac{1}{4\sqrt{15}}\ln\left|\frac{x\sqrt{15}+2\sqrt{4x^2+1}}{x\sqrt{15}-2\sqrt{4x^2+1}}\right|+C.$

1902*. $\arccos\frac{1}{|x|}-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C.$ $\left(\text{Faire le changement } x=\frac{1}{z}.\right)$

1903*. $\arcsin\sqrt{x}+C$. (Faire le changement $x=\sin^2 z$.)

1904*. $\ln\left|\frac{xe^x}{1+xe^x}\right|+C$. (Multiplier le numérateur et le dénominateur par $e^x$ et poser $xe^x=z$.)

1905. $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C.$

1906. $3[(2-\sqrt[3]{x^2})\cos\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x}\sin\sqrt[3]{x}]+C.$

1907. $\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln(1-x^2)+C.$

1908. $x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2+C.$

1909. $\ln\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{x}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2+C.$

1910. $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+2x)^3}+C$. 1911. $\frac{1}{9}(1+e^{3x})^3+C.$

1912. $2e^{\sqrt{x}}+C$. 1913. $e^{-\cos x}+C$. 1914. $C-\frac{2}{3}(1-e^x)^{\frac{3}{2}}$.

1915. $\frac{1}{2}\sin x^2+C$. 1916. $C-\frac{5}{24}(2-3x^{\frac{4}{3}})^{\frac{6}{5}}$.

1917. $C-\frac{1}{3}\ln|1+3x^3-x^6|$.

1918. $\frac{2}{3}\ln(1+x^{\frac{3}{2}})+C$. 1919. $C-\ln(3+e^{-x})$.

1920. $C-\arcsin e^{-x}$.

1921. $2\sqrt{1+x^2}+3\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C.$

1922. $\frac{1}{9}[2\sqrt{9x^2-4}-3\ln|3x+\sqrt{9x^2-4}|]+C.$

1923. $2\sin\sqrt{x}+C$. 1924. $\arcsin\frac{\ln x}{\sqrt{3}}+C$. 1925. $C-\frac{1}{2}\ln|1-\ln^2 x|$.

1926. $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$.

1927. $\frac{(\operatorname{arctg} x)^{n+1}}{n+1}+C$, si $n\neq-1$. et $\ln|\operatorname{arctg} x|$, si $n=-1$. 1928. $C-$ $-2\operatorname{cotg} 2\varphi$. 1929. $2x-\operatorname{tg} x+C$.

1930. $\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x+C$. 1931. $\frac{2}{45}\sqrt{\operatorname{tg}^5 x}\,(5\operatorname{tg}^2 x+9)+C$.

1932. $\frac{1}{3}(\operatorname{tg} 3x+\ln\cos^2 3x)+C$. 1933. $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln|x+1|+C$.

1934. $C-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2(x-1)^2}$. 1935. $\frac{\sqrt{2+4x}\,(x-1)}{6}+C$.

1936. $x\sqrt{1+2x}-\frac{1}{3}\sqrt{(1+2x)^3}+C$.

1937. $\frac{2}{15}(3x-2a)\sqrt{(a+x)^3}+C$.

1938. $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{4}{3}\sqrt{\sin^3 x}-\cos x+C$. 1939. $\frac{a^{mx}b^{nx}}{m\ln a+n\ln b}+C$.

1940. $C-\ln[1-x+\sqrt{5-2x+x^2}]$.

1941. $\frac{1}{3}\ln(3x-1+\sqrt{9x^2-6x+2})+C$. 1942. $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x-2}{\sqrt{2}}+C$.

1943. $C-8\sqrt{5+2x-x^2}-3\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}}$.

1944. $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+\operatorname{arctg}(x+1)+C$.

1945. $C-\sqrt{3-2x-x^2}-4\arcsin\frac{x+1}{2}$.

1946. $\frac{3}{8}\left[\ln(4x^2-4x+17)+\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{4}\right]+C$.

1947. $3\sqrt{x^2+2x+2}-4\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})+C$.

1948. $\ln\frac{(x-4)^2}{|x-3|}+C$.

1949. $\frac{2}{9}\sqrt{9x^2+6x+2}+\frac{13}{9}\ln(3x+1+\sqrt{9x^2+6x+2})+C$.

1950. $C-\ln|2x^2-3x+1|$.

1951. $\frac{29}{45}\operatorname{arctg}\frac{5x+3}{9}-\frac{3}{10}\ln(5x^2+6x+18)+C$.

1952. $\frac{61}{16}\ln|8x+9+4\sqrt{4x^2+9x+1}|-\frac{5}{4}\sqrt{4x^2+9x+1}+C$.

1953. $\frac{1}{3}\sqrt{3x^2-11x+2}+\frac{11}{6\sqrt{3}}\ln\left|x-\frac{11}{6}+\sqrt{x^2-\frac{11}{3}x+\frac{2}{3}}\right|+C$.

1954. $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+3x}-\frac{3}{4\sqrt{2}}\ln\left(x+\frac{3}{4}+\sqrt{x^2+\frac{3x}{2}}\right)+C$.

1955. $\sqrt{(a-x)(x-b)}-(a-b)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a-x}{x-b}}+C$.

1956. $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$. 1957. $\frac{1}{8} \sin 2x - \frac{1}{4} x \cos 2x + C$.

1958. $\frac{1}{\omega^3} [(\omega^2 x^2 - 2) \sin \omega x + 2\omega x \cos \omega x] + C$.

1959. $e^{2x} \left( \frac{1}{2} x^3 - \frac{3}{4} x^2 + \frac{3}{4} x - \frac{3}{8} \right) + C$.

1960. $\operatorname{tg} x \cdot \ln(\cos x) + \operatorname{tg} x - x + C$. 1961. $\ln|\ln \sin x| + C$.

1962. $\frac{1}{4} \left[ \ln(1+x^4) + \frac{1}{1+x^4} \right] + C$.

1963. $\frac{1}{3} \left( \ln \left| \operatorname{tg} \frac{3x}{2} \right| + \cos 3x \right) + C$. 1964. $\frac{1}{3} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{3x}{2} \right) + C$.

1965. $C - \frac{1}{8} \ln \frac{2+\cos 2x}{2-\cos 2x}$. 1966. $\ln \frac{e^x}{e^x+1} + C$.

1967. $2 \ln(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}) + C$. 1968. $e^{e^x} + C$. 1969. $\frac{1}{4} e^{2x^2} + C$.

1970. $\frac{1}{\sqrt{2}} \left[ 3 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \frac{1}{3}(x^2-2)\sqrt{1+x^2} \right] + C$.

1971. $x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x + C$. 1972. $C - \frac{1}{2} \left( \frac{x}{\sin^2 x} + \operatorname{cotg} x \right)$.

1973. $\frac{e^x}{2} \left( 1 - \frac{2 \sin 2x + \cos 2x}{5} \right) + C$.

1974. $\frac{1}{2} (\operatorname{tg} x + \ln|\operatorname{tg} x|) + C$. 1975. $\ln|\sin x + \cos x| + C$.

1976. $\frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \right| + C$.

1977. $\sec x - \operatorname{tg} x + x + C$. 1978. $\sin x - \operatorname{arctg} \sin x + C$.

1979. $\sqrt{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{4} \right| + C$. 1980. $\ln x \cdot \ln \ln x - \ln x + C$.

1981. $\frac{e^{x^2}(x^2-1)}{2} + C$. 1982. $C - \frac{1}{2} e^{-x^2} (x^4 + 2x^2 + 2)$.

1983. $\frac{1}{6} (x^2-1) \sqrt{1+2x^2} + C$. 1984. $C - \frac{x(x^2-3)}{2\sqrt{1-x^2}} - \frac{3}{2} \arcsin x$.

1985. $\frac{1}{5} \sqrt{(x^2-a^2)^5} - \frac{a^2}{3} \sqrt{(x^2-a^2)^3} + a^4 \sqrt{x^2-a^2} + a^5 \arcsin \frac{a}{|x|} + C$.

1986. $\frac{\sqrt{4+x^2}(x^2-2)}{24x^3} + C$. 1987. $\frac{\sqrt{(x^2-8)^3}}{24x^3} + C$.

1988. $\frac{\sqrt{(4+x^2)^3}(x^2-6)}{120x^5} + C$. 1989. $\frac{\sqrt{x^2-3}(2x^2+3)}{27x^3} + C$.

1990. $\frac{4}{3} [\sqrt[4]{x^3} - \ln(\sqrt[4]{x^3}+1)] + C$.

1991. $x + 4\sqrt{x+1} + 4 \ln(\sqrt{1+x} - 1) + C$.

1992. $2 \operatorname{arctg} \sqrt{1+x} + C$. 1993. $\ln \frac{x}{(\sqrt[6]{x}+1)^6} + C$.

1994. $\sqrt{x^2+2x} + \ln|x+1+\sqrt{x^2+2x}| + C$.

1995*. $\frac{x^8}{8(1-x^2)^4}+C$. (Il est commode de poser $x=\sin u$.)

1996. $\frac{2}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{ax}{b}}+C$. 1997. $C\frac{(1+x^8)^{\frac{3}{2}}}{12x^{12}}$.

1998. $\frac{x^2}{2\sqrt{1-x^4}}+C$. 1999. $\frac{1}{4}x^2\sqrt{x^4+4}-\ln(x^2+\sqrt{x^4+4})+C$.

2000. $\ln\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right|+C$ 2001. $C-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1-x^3}{x^3}}-\frac{2}{3}\arcsin\sqrt{x^3}$.

2002. $C-\frac{x^3}{4(1+x^2)^2}-\frac{3x}{8(1+x^2)}+\frac{3\operatorname{arctg}x}{8}$.

2003. $\frac{(x^2+1)\operatorname{arctg}x}{\sqrt{x}}-2\sqrt{x}+C$. 2004. $\arcsin e^x-\sqrt{1-e^{2x}}+C$.

2005. $2\sqrt{e^x-1}-2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}+C$. 2006*. $C-\frac{1}{2}\ln^2\left(1+\frac{1}{x}\right)$ $\left(\text{poser } u=1+\frac{1}{x}\right)$. 2007. $\operatorname{arctg}x+\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+C$.

2008. $x\arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}}+\sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$.

2009. $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C$.

2010. $\frac{3}{55}\sqrt[3]{\operatorname{tg}^5 x}\,(5\operatorname{tg}^2 x+11)+C$.

2011. $\frac{\sqrt{2}}{5}(\operatorname{tg}^2 x+5)\sqrt{\operatorname{tg}x}+C$. 2012. $\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{2x+1}}+C$.

2013. $\frac{1}{5}\ln[(x-2)^2\sqrt{2x+1}]+C$. 2014. $\ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right|+C$.

2015. $\frac{3}{11}\ln|3x+1|+\frac{2}{33}\ln|2x-3|-\frac{1}{3}\ln|x|+C$.

2016. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C$.

2017. $\frac{1}{4}x+\ln|x|-\frac{7}{16}\ln|2x-1|-\frac{9}{16}\ln|2x+1|+C$.

2018. $\ln|2x-1|-6\ln|2x-3|+5\ln|2x-5|+C$.

2019. $\ln\sqrt{\frac{x^2-2}{x^2-1}}+C$.

2020. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|+C$.

2021. $\frac{x^2}{2}+\ln\left|\frac{x(x-2)\sqrt{(x-1)(x+1)^3}}{x+2}\right|+C$.

2022. $\ln\left|\frac{x^2}{x+1}\right|+\frac{6}{x+1}+C$.

2023. $4\ln|x|-3\ln|x-1|-\frac{9}{x-1}+C$.

2024. $\frac{4}{x+2}+\ln|x+1|+C$. 2025. $x+\frac{1}{x}+\ln\frac{(x-1)^2}{|x|}+C$.

2026. $C-\frac{1}{3(x-2)^3}+\frac{1}{2(x-2)^2}+\ln|x-2|$.

2027. $\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$. 2028. $2\ln\left|\frac{x+4}{x+2}\right|-\frac{5x+12}{x^2+6x+8}+C$.

2029. $\frac{3}{2(x-2)^2}+\ln|x-5|+C$.

2030. $\frac{x}{8}-\ln|x+1|-\frac{9x^2+12x+5}{3(x+1)^3}+C$.

2031. $\frac{(x+2)^2}{2}-\frac{1}{4(x-1)^2}-\frac{9}{4(x-1)}+\frac{31}{8}\ln|x-1|+\frac{1}{8}\ln|x+1|+C$.

2032. $\frac{1}{x-1}+\ln\frac{\sqrt{(x-1)(x-3)}}{|x|}+C$.

2033. $\frac{3}{2x}-\frac{5}{4}\ln|x|+20\ln|x-3|-\frac{47}{4}\ln|x-2|+C$.

2034. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right|-\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{2x}\right)+\frac{2}{2(x-2)}+C$.

2035. $C-\frac{x}{(x^2-1)^2}$. 2036. $\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}+C$.

2037. $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$.

2038. $\frac{1}{3}\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

2039. $\ln\frac{\sqrt{(x^2-2x+5)^3}}{|x-1|}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C$.

2040. $\frac{(x+1)^2}{2}+\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}}-\operatorname{arctg}x+C$.

2041. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$.

2042. $\frac{1}{4}\ln\frac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$.

2043. $\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2(x+1)}+C$.

2044. $\frac{1}{4}\left[\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x-1|}+\operatorname{arctg}x-\frac{7}{(x-1)^2}\right]+C$.

2045. $\frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+2\ln(x^2+2x+2)-2\operatorname{arctg}(x+1)+C$.

2046. $\ln\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}}+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{2}+C$.

2047*. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+C$. (Ajouter puis retrancher $2x^2$ au dénominateur de l'intégrande.)

2048. $\frac{2-x}{4(x^2+2)}+\frac{\ln(x^2+2)}{2}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

2049. $\frac{1}{16}\ln|x|-\frac{1}{18}\ln(x^2+1)+\frac{7}{288}\ln(x^2+4)-\frac{1}{24(x^2+4)}+C$.

2050. $\frac{13x-159}{8(x^2-6x+13)}+\frac{53}{16}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2}+C$.

2051. $\frac{3}{8}\operatorname{arctg}(x+1)-\frac{5x^3+15x^2+18x+8}{8(x^2+2x+2)^2}+C.$

2052. $\frac{x}{216(x^2+9)}+\frac{x}{36(x^2+9)^2}+\frac{1}{648}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C.$

2053. $\frac{x-1}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{4}\ln(1+x^2)+C.$

2054. $\frac{15x^5+40x^3+33x}{48(1+x^2)^3}+\frac{15}{48}\operatorname{arctg}x+C.$

2055. $\frac{1}{4}\left(\frac{2x^6-3x^2}{x^4-1}+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|\right)+C.$

2056. $\frac{x}{x^2+x+1}+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-2\ln(x^2+x+1)+\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+$
$+\frac{x^2}{2}+2x+C.$

2057. $\frac{3x^2-x}{(x-1)(x^2+1)}+\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1}+\operatorname{arctg}x+C.$

2058. $C-6\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|-\frac{12x^2-5x-1}{2(x^3-x^2)}.$

2059. $\frac{1}{x^2(x^2+1)}+\ln\sqrt{x^2+1}+C.$

2060. $\frac{1}{2}\cdot\frac{1+x}{(1+x^2)^2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{x-2}{x^2+1}+\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x+C.$

2061. $\frac{2}{3}\ln\left|\frac{x^3+1}{x^3}\right|-\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{3(x^3+1)}+C.$

2062. $\frac{1}{648}\left[\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}+\frac{3(x+1)}{x^2+2x+10}+\frac{18(x+1)}{(x^2+2x+10)^2}\right]+C.$

2063. $\frac{3}{8}\operatorname{arctg}(x+1)+\frac{3}{8}\cdot\frac{x+1}{x^2+2x+2}+\frac{x}{4(x^2+2x+2)^2}+C.$

2064. $C-\frac{x}{8(x^2+4)}-\frac{2x+5}{2(x^2+4x+5)}-\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\operatorname{arctg}(x+2).$

2065. $C-\frac{57x^4+103x^2+32}{8x(x^2+1)^2}-\frac{57}{8}\operatorname{arctg}x.$

2066. $\frac{3-7x-2x^2}{2(x^3-x^2-x+1)}+\ln\frac{|x-1|}{(x+1)^2}+C.$

2067. $\left(-\frac{1}{2}x^4+\frac{5}{4}x^2-\frac{3}{5}\right)\frac{1}{x(3-2x^2)^2}+\frac{1}{8\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+x\sqrt{2}}{\sqrt{3}-x\sqrt{2}}\right|+C.$

2068. $\ln\frac{x}{(1+\sqrt[10]{x})^{10}}+\frac{10}{\sqrt[10]{x}}-\frac{5}{\sqrt[5]{x}}+\frac{10}{3\sqrt[10]{x^3}}-\frac{5}{2\sqrt[5]{x^2}}+C.$

2069. $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}-8\sqrt[4]{x}+6\sqrt[6]{x}+48\sqrt[12]{x}+3\ln(1+\sqrt[12]{x})+$
$+\frac{33}{2}\ln(\sqrt[6]{x}-\sqrt[12]{x}+2)-\frac{171}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[12]{x}-1}{\sqrt{7}}+C.$

2070. $6\left[\frac{1}{9}(x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{8}(x+1)^{\frac{4}{3}}+\frac{1}{7}(x+1)^{\frac{7}{6}}-\frac{1}{6}(x+1)+\right.$
$\left.+\frac{1}{5}(x+1)^{\frac{5}{6}}-\frac{1}{4}(x+1)^{\frac{2}{3}}\right]+C.$

2071. $\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C.$

2072. $(\sqrt{x}-2)\sqrt{1-x}-\arcsin\sqrt{x}+C.$

2073. $6\sqrt[3]{(1+x)^2}\left[\frac{(1+x)^2}{16}-\frac{1+x}{5}+\frac{\sqrt{1+x}}{7}+\frac{1}{4}\right]+C.$

2074. $\ln\frac{|u^2-1|}{\sqrt{u^4+u^2+1}}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{1+2u^2}{\sqrt{3}}+C$, où $u=\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$.

2075*. $\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}+C$. Multiplier le numérateur et le dénominateur de la fraction par $\sqrt[4]{x-1}$, puis sortir les facteurs du radical.

2076. $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{24}{11}x\sqrt[6]{x^5}+\frac{36}{13}x^2\sqrt[6]{x}+\frac{8}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{6}{17}x^2\sqrt[6]{x^5}+C.$

2077. $3\left[\ln\left|\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right|+\frac{2\sqrt[3]{x}+3}{2(1+\sqrt[3]{x})^2}\right]+C.$

2078. $\frac{1}{2}\ln(\sqrt[3]{x^2+1}-1)-\frac{1}{4}\ln[\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}+1]+$

$$+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{x^2+1}+1}{\sqrt{3}}+C.$$

2079. $\frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8}-\frac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5}+C.$

2080. $\frac{1}{6}\ln\frac{u^2+u+1}{(u-1)^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2u+1}{\sqrt{3}}+C$, où $u=\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}$.

2081. $\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}+C.$

2082. $\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{1-x^4}+1}{x^2}-\frac{1}{4}\frac{\sqrt{1-x^4}}{x^4}+C.$

2083. $\frac{3}{7}(4\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-3)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}+C.$

2084. $6u+2\ln\frac{u-1}{\sqrt{u^2+u+1}}-2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2u+1}{\sqrt{3}}+C$, où $u=\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}$.

2085. $\frac{1}{5}\ln\frac{|u-1|}{\sqrt{u^2+u+1}}+\frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{arctg}\frac{1+2u}{\sqrt{3}}+C$, où $u=\sqrt[3]{1+x^5}$.

2086. $C-\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{1+x^3}+x}{x\sqrt{3}}-$

$$-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt[3]{1+x^3}+x}{\sqrt{\sqrt[3]{(1+x^3)^2}+x\sqrt[3]{1+x^3}+x^2}}\right|.$$

2087. $C-\frac{1}{10}\sqrt{\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^5}+\frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^3}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x^4}{x^4}}.$

2088. $\frac{u}{2(u^3+1)}-\frac{1}{6}\ln\frac{u+1}{\sqrt{u^2-u+1}}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2u-1}{\sqrt{3}}+C$, où $u=$
$=\sqrt[3]{\frac{1-x^2}{x^2}}$.

2089. $12\left[\frac{\sqrt[3]{u^{13}}}{13}-\frac{3\sqrt[3]{u^{10}}}{10}+\frac{3\sqrt[3]{u^{7}}}{7}-\frac{\sqrt[3]{u^{4}}}{4}\right]+C$, où $u=1+\sqrt[4]{x}$.

2090. $\frac{1}{15}\cos^3 x\,(3\cos^2 x-5)+C$. 2091. $\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}+C$.

2092. $\ln|\operatorname{tg} x|-\frac{1}{2\sin^2 x}+C$. 2093. $\operatorname{tg} x+\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{3}{2}x+C$.

2094. $\frac{1}{2}(\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{cotg}^2 x)+2\ln|\operatorname{tg} x|+C$.

2095. $\frac{(\operatorname{tg}^2 x-1)(\operatorname{tg}^4 x+10\operatorname{tg}^2 x+1)}{3\operatorname{tg}^3 x}+C$. 2096. $\frac{1}{\cos x-1}+C$.

2097. $\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{x}{2}-\frac{1}{6}\operatorname{cotg}^3\frac{x}{2}+C$.

2098. $\frac{5}{16}x+\frac{1}{12}\sin 2x\left(\cos^4 x+\frac{5}{4}\cos^2 x+\frac{15}{8}\right)+C$.

2099. $x-\frac{1}{3}\operatorname{cotg}^3 x+\operatorname{cotg} x+C$.

2100. $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x-\ln|\cos x|+C$.

2101. $x-\frac{1}{7}\operatorname{cotg}^7 x+\frac{1}{5}\operatorname{cotg}^5 x-\frac{1}{3}\operatorname{cotg}^3 x+\operatorname{cotg} x+C$.

2102. $C-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$.

2103. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}\right|+\frac{1}{2}\sin x\cos x+C$.

2104. $C-\frac{1}{1+\operatorname{tg} x}$. 2105. $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)\right|+C$.

2106. $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x+\operatorname{arctg}\frac{a}{b}}{2}\right|+C$.

2107. $\ln\frac{|C\cdot\sin x|}{\sqrt{\cos 2x}}$. 2108. $\ln\frac{|C\cdot\sin x|}{\sqrt{1-4\sin^2 x}}$.

2109. $\frac{1}{2}[x+\ln|\sin x+\cos x|]+C$.

2110. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C$. 2111. $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3}+C$.

2112. $\ln(2+\cos x)+\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C$.

2113. $\frac{\cos x(\cos x-\sin x)}{4}-\frac{1}{4}\ln|\cos x-\sin x|+C$.

2114. $\frac{4}{25}x-\frac{3}{25}\ln|\operatorname{tg} x+2|+\frac{2}{5(\operatorname{tg} x+2)}-\frac{3}{25}\ln|\cos x|+C$.

2115. $\frac{\cos 2x-15}{15(4+\sin 2x)}+\frac{4}{15\sqrt{15}}\arcsin\frac{4\sin 2x+1}{4+\sin 2x}+C$.

2116. $\frac{1}{2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C$. 2117. $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(3\operatorname{tg} x)+C$.

2118. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}x)+C.$

2119. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}x)+C.$ 2120. $\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{a\operatorname{tg}x}{b}+C.$

2121. $C-\frac{1}{2}\left[\operatorname{cotg}x+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right)\right].$

2122. $\ln\frac{|\sqrt[3]{\operatorname{tg}x-1}|}{\sqrt[6]{\operatorname{tg}^2x+\operatorname{tg}x+1}}-\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}x+1}{\sqrt{3}}+C.$

2123. $2\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)+C$ pour les $x$ tels que $\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\geqslant 0$, et $-2\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)+C$ pour les $x$ tels que $\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\leqslant 0$.

2124. $2\sqrt{\operatorname{tg}x}+C.$ 2125*. $C-\frac{4\sqrt{2}}{5}\sqrt{\operatorname{cotg}^5x}.$ (Poser $u=\operatorname{cotg}x$.)

2126. $4\sqrt[4]{\operatorname{tg}x}+C.$ 2127. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}\operatorname{tg}x+\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2x})+C.$

2128. $2\arcsin\sqrt{\sin x}+C.$ 2129. $C-\frac{1}{3}\operatorname{tg}x(2+\operatorname{tg}^2x)\sqrt{4-\operatorname{cotg}^2x}.$

2130. $\frac{4}{\sqrt{\cos\frac{x}{2}}}+2\operatorname{arctg}\sqrt{\cos\frac{x}{2}}-\ln\frac{1+\sqrt{\cos\frac{x}{2}}}{1-\sqrt{\cos\frac{x}{2}}}+C.$

2131. $\frac{1}{\sqrt{2}}[\ln(\sin x+\cos x-\sqrt{\sin 2x})+\arcsin(\sin x-\cos x)]+C.$

2132. $\operatorname{sh}x+C.$ 2133. $\operatorname{ch}x+C.$ 2134. $\operatorname{th}x+C.$

2135. $x+C.$ 2136. $\frac{1}{2a}\operatorname{sh}2ax+C.$ 2137. $\frac{\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{ch}x-x}{2}+C.$

2138. $x-\operatorname{th}x+C.$ 2139. $x-\operatorname{cth}x+C.$

2140. $\frac{1}{3}\operatorname{ch}^3x-\operatorname{ch}x+C.$ 2141. $\operatorname{sh}x+\frac{1}{3}\operatorname{sh}^3x+C.$

2142. $x-\operatorname{th}x-\frac{1}{3}\operatorname{th}^3x+C.$ 2143. $\frac{1}{3}\operatorname{sh}^3x+\frac{1}{5}\operatorname{sh}^5x+C.$

2144. $\ln|\operatorname{sh}x|-\frac{1}{2}\operatorname{cth}^2x-\frac{1}{4}\operatorname{cth}^4x+C.$ 2145. $\ln|\operatorname{th}x|+C.$

2146. $\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|+C.$ 2147. $\frac{1}{2}\operatorname{th}\frac{x}{2}-\frac{1}{6}\operatorname{th}^3\frac{x}{2}+C.$

2148. $\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{\operatorname{th}x}}{|1-\sqrt{\operatorname{th}x}|}-\operatorname{arctg}\sqrt{\operatorname{th}x}+C.$

2149. $x\operatorname{th}x-\ln\operatorname{ch}x+C.$ 2150. $C-\frac{e^{3x}}{3\operatorname{sh}^3x}.$

2151*. $\ln\frac{|cx|}{2+x+2\sqrt{x^2+x+1}}.$ $\left(\text{On peut poser par exemple } x=\frac{1}{z}.\right)$

2152. $\frac{1}{2}\arccos\frac{2-x}{x\sqrt{2}}+C.$ 2153. $\arcsin\frac{x-1}{x\sqrt{2}}+C.$

2154. $C-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2+x-x^2}+\sqrt{2}}{x}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right|.$

2155. $\ln\left|x+1+\sqrt{2x+x^2}\right|-\frac{4}{x+\sqrt{2x+x^2}}+C.$

2156. $C-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{3+3x+2\sqrt{3(x^2+x+1)}}{x-1}\right|.$

2157. $C-\frac{1}{\sqrt{15}}\ln\left|\frac{x+6+\sqrt{60x-15x^2}}{2x-3}\right|.$

2158. $\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x-1}-\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x-1}\right|+C.$

2159. $\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{3x^2-3x+1}+$

$$+\frac{1}{8\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3x^2-3x+1}+\frac{\sqrt{3}}{2}(2x-1)\right|+C.$$

2160. $\frac{1}{2}\left[(x+2)\sqrt{1-4x-x^2}+5\arcsin\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right]+C.$

2161. $C-\frac{3}{2(2x-1-2\sqrt{x^2-x+1})}-\frac{3}{2}\ln\left|2x-1-2\sqrt{x^2-x+1}\right|+$

$$+2\ln\left|x-\sqrt{x^2-x+1}\right|.$$

2162. $\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x}\right|-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C.$

2163. $\frac{1-\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}+\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)+C.$

2164. $\frac{1}{2}(3-x)\sqrt{1-2x-x^2}+2\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$

2165. $x\sqrt{x^2-2x+5}-5\ln\left(x-1+\sqrt{x^2-2x+5}\right)+C.$

2166. $C-\frac{1}{2}(3x-19)\sqrt{3-2x-x^2}+14\arcsin\frac{x+1}{2}.$

2167. $(x^2-5x+20)\sqrt{x^2+4x+5}-15\ln\left(x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right)+C.$

2168. $\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}\right)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{5}{2}\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)+C.$

2169. $(x^2+5x+36)\sqrt{x^2-4x-7}+112\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x-7}\right|+C.$

2170. $\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{7}{6}x^2+\frac{95}{24}x-\frac{145}{12}\right)\sqrt{x^2+4x+5}+$

$$+\frac{35}{8}\ln\left(x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right)+C.$$

2171. $\frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{8(x+1)^2}+\frac{1}{16}\arccos\frac{2}{x+1}+C.$

2172. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2+2x^2}-x}{\sqrt{2+2x^2}+x}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C.$

2173. $\frac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}+C.$

2174. $\ln\frac{\sqrt{x^2+2x+4}-1}{\sqrt{x^2+2x+4}+1}-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2(x^2+2x+4)}}{x+1}+C.$

2175. $C-\frac{1}{8(x-1)^8}-\frac{1}{3(x-1)^9}-\frac{3}{10(x-1)^{10}}-\frac{1}{11(x-1)^{11}}$.

2176. $\frac{1}{3}[x^3+\sqrt{(x^2-1)^3}]+C$. 2177. $\frac{3(4x-3a)\sqrt[3]{(a+x)^4}}{28}+C$.

2178. $\frac{1}{m\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\left(e^{mx}\sqrt{\frac{a}{b}}\right)+C$.

2179. $\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{x+2}{2}\sqrt{1-x^2}+C$.

2180. $\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{6}\ln\frac{|x-1|(x+2)^{32}}{|x+1|^3}+C$.

2181. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$.

2182. $\frac{3}{8}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{4(x^4-1)}-\frac{3}{16}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$.

2183. $2\sqrt{x+1}[\ln|x+1|-2]+C$.

2184. $\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\right)\cos 2x+\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}\right)\sin 2x+C$

2185. $x^2\operatorname{ch}x-2x\operatorname{sh}x+2\operatorname{ch}x+C$.

2186. $x\operatorname{arctg}(1+\sqrt{x})-\sqrt{x}+\ln|x+2\sqrt{x}+2|+C$.

2187. $\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|-\frac{\arcsin x}{x}+C$.

2188. $3e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2)+C$.

2189. $3e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^5}-5\sqrt[3]{x^4}+20x-60\sqrt[3]{x^2}+120\sqrt[3]{x}-120)+C$.

2190. $e^{3x}\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{2}{3}x+\frac{13}{9}\right)+C$.

2191. $2(\sin\sqrt{x}-\sqrt{x}\cos\sqrt{x})+C$.

2192. $\frac{\sqrt{x-1}(3x+2)}{4x^2}+\frac{3}{4}\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}+C$.

2193. $\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C$.

2194. $\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\frac{\sqrt{(1+x^2)^5}}{5x^5}-\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$.

2195. $\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{8}x\right)\sqrt{x^2+1}+\frac{3}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$.

2196. $3[\ln|u|-\ln(1+\sqrt{1-u^2})-\arcsin u]+C$, où $u=\sqrt[3]{x}$.

2197. $\frac{15x^2+5x-2}{4x^2\sqrt{1+x}}+\frac{15}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right|+C$.

2198. $C-\frac{\sqrt{2x+1}}{x}+\ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right|$.

2199. $\frac{1}{15}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{(z-1)^2}{z^2+z+1}-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right]+C$, où $z=x^5$.

2200. $C-\frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{8\sin^2\frac{x}{2}}$. 2201. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}+C$.

2202. $\frac{2}{b^2 \sin 2\alpha} \ln \left| \frac{\sin(\alpha - x)}{\sin(\alpha + x)} \right| + C$, où $\alpha = \arccos \frac{a}{b}$, si $a^2 < b^2$;

$\frac{1}{a^2 \sin \alpha} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin \alpha} + C$, où $\alpha = \arccos \frac{b}{a}$, si $a^2 > b^2$.

2203. $\frac{1}{2} x^2 \ln(1 + x^3) - \frac{3}{4} x^2 + \frac{1}{4} \ln(x^2 - x + 1) - \frac{1}{2} \ln(x + 1) +$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C.$$

2204. $\frac{x}{\ln x} + C$. 2205. $\operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1} - \frac{\ln x}{\sqrt{x^2 - 1}} + C$.

2206. $\frac{1}{2} e^x [(x^2 - 1) \cos x + (x - 1)^2 \sin x] + C$.

2207. $\frac{x^2 e^{x^2}}{2} + C$. 2208. $\frac{2}{3} \frac{\operatorname{tg}^2 x - 3}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} + C$.

2209. $\frac{1}{4} (\operatorname{tg}^4 x - \operatorname{cotg}^4 x) + 2 (\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{cotg}^2 x) - 6 \ln |\operatorname{tg} x| + C$.

2210. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x) + C$. 2211. $\ln \left| 1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$.

2212. $\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2 + \operatorname{tg}^2 x}} + \ln(\sqrt{2 + \operatorname{tg}^2 x} + \operatorname{tg} x) + C$.

2213. $\ln \frac{x^2 + 1 + \sqrt{x^4 + 3x^2 + 1}}{x} + C$.

2214. $C - \frac{1}{\sqrt{15}} \ln \left| \frac{x + 6 + \sqrt{60x - 15x^2}}{2x - 3} \right|$. 2215. $\frac{e^x}{1 + x} + C$.

2216. $2x \sqrt{1 + e^x} - 4 \sqrt{1 + e^x} - 2 \ln \frac{\sqrt{1 + e^x} - 1}{\sqrt{1 + e^x} + 1} + C$.

2217. $\frac{1}{6} \ln \frac{1 + x^2}{x^2} - \frac{\operatorname{arctg} x}{3x^3} - \frac{1}{6x^2} + C$.

2218. $C - \frac{\operatorname{arctg} x}{2(1 + x^2)} + \frac{\operatorname{arctg} x}{4} + \frac{x}{4(1 + x^2)}$.

2219. $\frac{1}{4} \ln \frac{|x + 1|}{\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{\operatorname{arctg} x}{2(1 + x)^2} - \frac{1}{4(x + 1)} + C$.

2220. $x - \log_2 |1 - 2^x| + \frac{1}{\ln 2} \left[ \frac{1}{1 - 2^x} + \frac{1}{2(1 - 2^x)^2} + \frac{1}{3(1 - 2^x)^3} \right] + C$,

2221. $\operatorname{arctg}(e^x - e^{-x}) + C$. 2222. $\ln \frac{1 + e^x - \sqrt{1 + e^x + e^{2x}}}{1 - e^x + \sqrt{1 + e^x + e^{2x}}} + C$.

2223. $x - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1 + 2 \operatorname{tg} x}{\sqrt{3}} + C$.

2224. $\frac{35}{128} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{7}{128} \sin 4x + \frac{1}{24} \sin^3 2x + \frac{1}{1024} \sin 8x + C$.

2225. $\frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{2} \ln(1 + x^2) + \frac{1}{(1 + x^2)^2} + C$.

2226. $\frac{8}{49(x - 5)} - \frac{27}{49(x + 2)} + \frac{30}{343} \ln \left| \frac{x - 5}{x + 2} \right| + C$.

2227. $C-\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{cotg}2x)$. 2228. $x\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C$.

2229*. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\frac{x\sqrt{2}}{x^2+1}+C$. (Diviser le numérateur et le dénominateur par $x^2$, puis poser $x+\frac{1}{x}=z$.)

2230. $e^{\sin x}(x-\sec x)+C$.

## Chapitre VII

2231. $\frac{2}{3}(\sqrt{8}-1)$. 2232. $\frac{7}{72}$. 2233. $-5(\sqrt[5]{16}-1)$.

2234. $7\frac{2}{3}$. 2235. $\frac{T}{\pi}\cos\varphi_0$. 2236. 12. 2237. $0{,}2\,(e-1)^5$.

2238. $3\ln\frac{b}{b-a}$. 2239. $\frac{1}{4}$. 2240. $\frac{\pi}{2}$.

2241. $1+\frac{1}{2}\lg e$. 2242. $e-\sqrt{e}$. 2243. $\frac{\pi}{6n}$.

2244. 2. 2245. $\frac{4}{3}$. 2246. $\ln\frac{3}{2}$. 2247. $0{,}2\ln\frac{4}{3}$.

2248. $\operatorname{arctg}\frac{1}{7}$. 2249. $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$. 2250. $\frac{\pi}{6}$. 2251. 2.

2252. $\frac{2}{7}$. 2253. $\frac{4}{3}$. 2254. $\frac{\pi}{2\omega}$. 2255. $-0{,}083\ldots$

2256. $\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}-\alpha+\frac{\operatorname{cotg}^3\alpha}{3}-\operatorname{cotg}\alpha$.

2257. 1. 2258. $-\sqrt{2}/3$. 2259. $1-2/e$. 2260. $\pi/2-1$.

2261. $\frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. 2262. $\pi^3-6\pi$.

2263. $2-\frac{3}{4\ln 3}$. 2264. 1. 2265. $\frac{141a^3\sqrt[3]{a}}{20}$.

2266. $\frac{\pi a^2}{4}$. 2267. $\frac{e^{\pi}-2}{5}$. 2268. $6-2e$.

2269. a) $\frac{8}{15}$; b) $\frac{7\cdot5\cdot3\cdot1}{8\cdot6\cdot4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}\approx0{,}429$; c) $\frac{10\cdot8\cdot6\cdot4\cdot2}{11\cdot9\cdot7\cdot5\cdot3}=\frac{256}{693}$.

2270. $J_{m,n}=\frac{n-1}{m+n}J_{m,n-2}=\frac{m-1}{m+n}J_{m-2,n}$.

Si $n$ est pair on a

$$J_{m,n}=\frac{(n-1)(n-3)\ldots4\cdot2}{(m+n)(m+n-2)\ldots(m+3)(m+1)};$$

si $m$ est impair

$$J_{m,n}=\frac{(m-1)(m-3)\ldots4\cdot2}{(m+n)(m+n-2)\ldots(n+3)(n+1)};$$

si $m$ est pair et $n$ pair

$$J_{m,n}=\frac{(n-1)(n-3)\ldots3\cdot1\cdot(m-1)(m-3)\ldots3\cdot1}{(m+n)(m+n-2)(m+n-4)\ldots4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

2271. $(-1)^n n!\left[1-\frac{1}{e}\left(\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n-1)!}+\ldots+\frac{1}{1!}+1\right)\right]$.

2272. $\frac{11}{48}+\frac{5\pi}{64}$. 2274*. $\frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}$. Poser $x=\sin^2 z$ et utiliser le résultat de l'exercice 2270.

2275. $7+2\ln 2$. 2276. $2-\frac{\pi}{2}$. 2277. $\frac{32}{3}$.

2278. $\frac{5}{3}-2\ln 2$. 2279. $\ln\frac{e+\sqrt{1+e^2}}{1+\sqrt{2}}$. 2280. $8+\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$.

2281*. $\frac{5}{16}\pi$, Poser $x=2z$, puis transformer l'intégrale donnée en $2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 z\,dz$. 2282*. $\frac{8}{35}$. Poser $x=\frac{z}{2}$.

2283. $\frac{\pi}{32}$. 2284. $\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}+\ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$. 2285. $\frac{8}{15}$.

2286. $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$. 2287. $\frac{1}{32}\left(\pi+\frac{7\sqrt{3}}{2}-8\right)$. 2288. $\frac{3}{16}\pi$.

2289. $\frac{\pi}{16}$. 2290. $\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln(2-\sqrt{3})$. 2291. $\frac{\pi}{4}$.

2292. $\frac{\sqrt{3}}{24}$. 2293. $\frac{\pi}{3}$. 2294. $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

2295. $\frac{\sqrt{6}}{27}+\frac{\pi\sqrt{2}}{48}$. 2296. $\frac{20}{9}$. 2297. $2\ln\frac{6}{5}\approx 0{,}365$.

2298. $\frac{2}{\pi}$; $\frac{1}{2}$. 2299. $2+\ln\frac{2}{e^2+1}$. 2300. Pour $a=e$.

2301. $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$. 2302. $\frac{4}{45}$.

2303. $8\ln 3-15\ln 2+\frac{13}{8}$. 2304. $\frac{5}{192}(5+7\sqrt[5]{5^3})$.

2305. $\frac{\pi}{6}$. 2306. $a^2[\sqrt{2}-\ln(\sqrt{2}+1)]$.

2307. $\sqrt{3}-\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3})$. 2308. $\frac{848}{105}$. 2309. $4-\pi$.

2310. $\ln\frac{7+2\sqrt{7}}{9}$. 2311. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$. 2312. $\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$.

2313. $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{6}{7}}$. 2314. $\frac{\pi^4}{16}-3\pi^2+24$.

2315. $\frac{16\pi}{3}-2\sqrt{3}$. 2316. $\frac{19}{27}-\frac{5}{6\sqrt{6}}$. 2317. $\frac{1}{a^2-b^2}\ln\left|\frac{a}{b}\right|$.

2319. $x=2$. 2320. $x=\ln 4$. 2322*. Utiliser la relation $4-x^2\geqslant 4-x^2-x^3\geqslant 4-2x^2$ qui est valable pour $0\leqslant x\leqslant 1$.

2323*. Appliquer les inégalités

$$\sqrt{1-x^2}\leqslant\sqrt{1-x^{2n}}\leqslant 1,\ \text{où}\ -1\leqslant x\leqslant 1\ \text{et}\ n\geqslant 1.$$

2324. $1{,}098<I<1{,}110$.

**2325*.** Pour la minoration utiliser l'inégalité $1 + x^4 < (1 + x^2)^2$ et pour la majoration l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski.

**2326.** Maximum $I(1) \approx 1{,}66$, minimum $I(-1/2) \approx -0{,}11$.

**2327.** Minimum pour $x = 1$ ($y = -17/12$), points d'inflexion $(2, -4/3)$ et $(4/3, -112/81)$.

**2332*.** a) Faire le changement de variable $t = -x$, partager l'intervalle $[-a, -x]$ en deux intervalles: $[-a, a]$ et $[a, -x]$ et se souvenir que l'intégrale d'une fonction impaire est nulle sur l'intervalle $[-a, a]$. b) Non si $a \neq 0$; oui si $a = 0$.

**2333*.** Poser $t = 1/z$. **2338.** Chaque intervalle est égal à $\pi/4$.

**2339*.** Poser $x = \pi - z$. L'intégrale est égale à $\pi^2/4$.

**2340*.** Partager l'intervalle d'intégration $[a, a + T]$ en trois intervalles: $[a, 0]$, $[0, T]$ et $[T, a + T]$, puis utiliser la propriété $f(x) = f(x + T)$ pour prouver que

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_T^{a+T} f(x)\,dx.$$

**2341*.** L'égalité à démontrer équivaut à l'égalité

$$\int_x^{x+T} f(z)\,dz = 0.$$

Vérifier que l'intégrale du premier membre ne dépend pas de $x$, puis poser $x = -T/2$. **2342.** $\dfrac{2\cdot4\cdot6\ldots2n}{1\cdot3\cdot5\ldots(2n+1)}$.

**2343.** On ne peut faire le changement $z = \operatorname{tg} x/2$ étant donné que la fonction $\operatorname{tg} x/2$ est discontinue pour $x = \pi$.

**2344*.** Pour évaluer $I_n$ utiliser le fait que $I_n$ décroît lorsque $n$ croît.

**2345*.** Faire le changement de variable $z = \dfrac{x + t}{2}$ et se servir de la propriété de l'intégrale d'une fonction paire.

**2346*.** Faire le changement de variable $z = k\omega^2x^2$, puis appliquer la règle de L'Hôpital.

**2347.** D'après la règle des rectangles $\pi \approx 2{,}904$ par défaut et $\pi \approx 3{,}305$ par excès. D'après la formule des trapèzes $\pi \approx 3{,}104$. D'après la formule de Simpson $\pi \approx 3{,}127$.

**2348.** D'après la règle des rectangles $\pi \approx 3{,}04$ par défaut et $\pi \approx 3{,}24$ par excès. D'après la formule des trapèzes $\pi \approx 3{,}140$. D'après la formule de Simpson $\pi \approx 3{,}1416$ (toutes les décimales sont vraies).

**2349.** $\ln 10 \approx 2{,}31$, $M = \dfrac{1}{\ln 10} \approx 0{,}433$. **2350.** $\approx 0{,}837$. **2351.** $\approx 1{,}09$. **2352.** $\approx 2{,}59$. **2353.** $\approx 0{,}950$. **2354.** $\approx 1{,}53$. **2355.** $\approx 0{,}985$. **2356.** $\approx 0{,}957$. **2357.** $\approx 239$ m² (d'après la formule de Simpson). **2358.** $\approx 5{,}7$ m² (d'après la formule de Simpson). **2359.** $\approx 1950$ mm². **2360.** $\approx 10{,}9$. **2361.** $\approx 36{,}2$. **2362.** $\approx 98{,}2$. **2363.** $\approx 9{,}2$. **2364.** $\approx 569$ mm². **2365.** $\approx 138$ mm². **2366.** $1/3$. **2367.** Diverge. **2368.** $1/a$. **2369.** Diverge. **2370.** $\pi$. **2371.** Diverge. **2372.** $1 - \ln 2$. **2373.** $\dfrac{1}{2}$. **2374.** $\dfrac{\pi}{4}$. **2375.** $\ln \dfrac{\sqrt{a^4+1}+1}{a^2}$. **2376.** $1/2$. **2377.** $1/2$. **2378.** Diverge. **2379.** 2. **2380.** $1/2$. **2381.** $\dfrac{a}{a^2+b^2}$, si $a > 0$, diverge si $a \leqslant 0$. **2382.** $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\ln 2$. **2383.** $\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. **2384.** $\dfrac{\pi}{2}$. **2385.** $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi}{4}$. **2386.** Converge. **2387.** Diverge. **2388.** Converge. **2389.** Diverge. **2390.** Converge. **2391.** Diverge. **2392.** Diverge. **2393.** Converge. **2394.** $\pi/2$. **2395.** Diverge. **2396.** $8/3$.

2397. $-1/4$. 2398. 1. 2399. Diverge. 2400. 2. 2401. $\pi$.

2402. $\frac{1}{2}\pi(a+b)$. 2403. $\frac{33\pi}{2}$. 2404. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. 2405. $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

2406. $14\frac{4}{7}$. 2407. $\frac{10}{7}$. 2408. Diverge. 2409. $6-\frac{9}{2}\ln 3$.

2410. $-2/e$. 2411. Diverge. 2412. Converge. 2413. Diverge.
2414. Converge. 2415. Converge. 2416. Diverge. 2417. Converge.
2418. Non. 2419. Converge pour $k < -1$ et diverge pour $k \geqslant -1$.
2420. 1) Converge pour $k > 1$ et diverge pour $k \leqslant 1$;

2) $I = \frac{1}{(k-1)(\ln 2)^{k-1}}$ pour $k > 1$; diverge pour $k \leqslant 1$.

2421. Converge pour $k < 1$, diverge pour $k \geqslant 1$.
2422. Diverge quel que soit $k$.
2423. Converge si l'on a simultanément $k > -1$ et $t > k+1$.
2424. Converge pour $m < 3$. diverge pour $m \geqslant 3$.
2425. Converge pour $k < 1$, diverge pour $k \geqslant 1$.
2426. $\pi$. 2427*. $5\pi/3$. Poser $x = \cos\varphi$, puis intégrer par parties.

2428. $\frac{3+2\sqrt{3}}{4}\pi - \frac{3}{2}\ln 2$. 2429. $\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n-2)}\frac{\pi}{2n^{2n-1}}$.

2430. $n!$. 2431. $n!/2$. 2432. $(-1)^n n!$.

2433*. a) $\frac{(m-1)(m-3)\ldots 3\cdot 1}{m(m-2)\ldots 4\cdot 2}\frac{\pi}{2}$;

b) $\frac{(m-1)(m-3)\ldots 4\cdot 2}{m(m-2)\ldots 3\cdot 1}$. Poser $x = \sin\varphi$.

2434*. $2\frac{2n(2n-2)\ldots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 3\cdot 1}$. Poser $x = \sin^2\varphi$.

2435. $\frac{\pi-\alpha}{\sin\alpha}$ ($I = 1$ pour $\alpha = \pi$).

2436*. Pour démontrer l'égalité des intégrales poser dans l'une d'elles $x = 1/z$, puis calculer leur somme en se servant de l'identité

$$\frac{1+x^2}{1+x^4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x^2+x\sqrt{2}} + \frac{1}{1+x^2-x\sqrt{2}}\right).$$

2437*. Mettre l'intégrale sous forme d'une somme de deux intégrales $\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$; poser dans la seconde intégrale $x = 1/y$.

2438. 0. 2439. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$. 2440. $\sqrt{\pi}$. 2441*. $\sqrt{\pi}/4$. Intégrer par parties.

2442. $\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 2443. $\frac{\pi}{2}$.

2444. $\pi/2$, si $a > 0$; 0, si $a = 0$; $-\pi/2$, si $a < 0$.
2445. $\pi/2$, si $a > b$; $\pi/4$, si $a = b$; 0, si $a < b$.
2446*. $\pi/2$. Intégrer par parties.
2447*. $\pi/4$. Mettre le numérateur sous forme d'une différence de sinus d'arcs multiples.
2448*. $\pi/4$. Appliquer les méthodes de résolution des exercices 2446 et 2447.

2449*. En posant $y=\frac{\pi}{2}-z$ on ramène $\varphi(x)$ à la forme $\varphi(x)=$ $=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-x} \ln\sin z\,dz$. En vertu de la formule $\sin z=2\sin z/2\cos z/2$ on décompose l'intégrale en trois: l'une d'elles se calcule immédiatement, les deux autres se ramènent par un changement de variable à des intégrales du type initial; $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\ln 2$.

2450. $-\frac{\pi}{2}\ln 2$. 2451. $-\frac{\pi^2}{2}\ln 2$. 2452*. $\frac{\pi}{2}\ln 2$. Intégrer par parties.

2453*. $\frac{\pi}{2}\ln 2$. Ramener cet exercice au précédent par un changement de variable.

2454. $-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

## Chapitre VIII

2455. $\frac{16}{3}$. 2456. $\frac{9}{4}$. 2457. $\frac{16}{3}p^2$. 2458. $\frac{1}{3}$. 2459. $\frac{32}{3}\sqrt{6}$.

2460. $2\frac{1}{4}$. 2461. $2\pi+\frac{4}{3}$ et $6\pi-\frac{4}{3}$.

2462. $\frac{4}{3}(4\pi+\sqrt{3})$ et $\frac{4}{3}(8\pi-\sqrt{3})$.

2464. $\frac{b^2c}{a}-ab\ln\frac{c+b}{a}=b\left[\varepsilon b-a\ln\left(\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2-1}\right)\right]$, où $\varepsilon$ est l'excentricité.

2465. $a^2\left[\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\right]$; $a^2\left[\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\right]$ et $a^2\left[\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\right]$.

2466. $S_1=S_3=\pi-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 3-2\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}\approx 0{,}46$; $S_2=2(\pi-S_1)$.

2467. $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$. 2468. $\frac{1}{12}$. 2469. $\frac{1}{12}$.

2470. $\left|\frac{m-n}{m+n}\right|$; $4\left|\frac{m-n}{m+n}\right|$, si $m$ et $n$ sont pairs; $2\left|\frac{m-n}{m+n}\right|$, si $m$ et $n$ sont impairs; $\left|\frac{m-n}{m+n}\right|$, si $m$ et $n$ sont de parité différente. 2471. a) $\frac{3}{14}$; b) $73\frac{1}{7}$. 2472. 1 (la figure est composée de deux parties d'aires égales).

2473. $\frac{8}{15}$. 2474. $\frac{3}{4}\pi$. 2475. $\frac{4}{3}$.

2476. $\frac{\pi a^2}{8}$. 2477. $8\left(\sqrt{1+\frac{2}{3}\sqrt{3}}-\operatorname{arctg}\sqrt{1+\frac{2}{3}\sqrt{3}}\right)$.

2478. $e+\frac{1}{e}-2$. 2479. 4. 2480. $\frac{3}{e}(e^3-4)$. 2481. $\frac{18}{e^2}-2$.

2482. a) $b(\ln b-1)-a(\ln a-1)$; b) $b-a$. 2483. $3-e$.

2484. $\frac{3-2\ln 2-2\ln^2 2}{16}$. 2485. $2-\sqrt{2}$. 2486. $\frac{1}{3}+\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2487. $\frac{5}{3}\sqrt{2}$. 2488. $\sqrt{2}-1$. 2489. $\frac{\pi}{4}$. 2490. $3\pi a^2$.

2491. $\frac{3}{8}\pi a^2$. 2492. $6\pi a^2$.

2493. 1) $\frac{\pi R^2}{n^2}(n+1)(n+2)$; 2) $\frac{\pi R^2}{n^2}(n-1)(n-2)$.

2494. 1) $\frac{72}{5}\sqrt{3}$; 2) $\frac{8}{15}$. 2495. $\frac{4}{3}\pi^3 a^2$; 2) $\frac{76a^2\pi^3}{3}$.

2496. $\frac{\pi a^2}{4}$ (roses à deux branches). 2497. $\frac{\pi a^2}{4}$.

2498. $18\pi a^2$. 2499. $\frac{a^2}{8}(4-\pi)$. 2500. $\frac{37\pi}{6}-5\sqrt{3}$.

2501. $\frac{51\sqrt{5}}{16}$. 2502. $a^2$. 2505*. $a^2\frac{5\pi+18\sqrt{3}}{32}$. Pour construire cette courbe il importe d'étudier les variations de $\varphi$ de 0 à $3\pi$. 2506. $\frac{\pi}{4}$.

2507. $a^2$. 2508. $a^2\left(1+\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2509. $\frac{\pi}{2}(a^2+b^2)$. 2510. $a^2$. 2511. $\pi\sqrt{2}$. 2512. $\pi$.

2513. 2. 2514. $3\pi a^2$. 2515. $4\pi$. 2516*. 1) $\sqrt{\pi}/2$; 2) $\sqrt{\pi}$. Se servir de l'égalité $\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (intégrale de Poisson). 2517. $\frac{\pi a^2}{2}$. 2518. $2-\frac{\pi}{2}$ et $2+\frac{\pi}{2}$. 2519. $a\,\mathrm{sh}\frac{b}{a}$. 2520. $\frac{y}{2p}\sqrt{y^2+p^2}+\frac{p}{2}\ln\frac{y+\sqrt{y^2+p^2}}{p}$.

2521. $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

2522. $\ln 3-\frac{1}{2}$. 2523. $\ln\frac{e^b-e^{-b}}{e^a-e^{-a}}$. 2524. $\frac{8}{9}\left(\frac{5}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}-1\right)$.

2525. $4\frac{26}{27}$. 2526. $4a\sqrt{3}$. 2527. $\frac{\pi}{2}+2\ln\mathrm{tg}\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}+2\ln(\sqrt{2}+1)$.

2528. $\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\ln 3$. 2529. 2.

2530. 8. 2531. Pour $t=\frac{2\pi}{3}$; $\left[x=a\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ y=\frac{3a}{2}\right]$.

2532. Pour $t=\frac{\pi}{6}$, $\left(x=\frac{3\sqrt{3}}{8}R,\ y=\frac{R}{8}\right)$.

2533*. $4\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$. Poser $x=a\cos^3 t$, $t$, $y=b\sin^3 t$.

2534. $5a\left[1+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})\right]$. 2535. $a\ln\frac{a}{y}$. 2536. $\frac{\pi^2}{2}R$.

2537. $\pi^3/3$. 2538. $4\sqrt{3}$. 2541. $2(e^t-1)$.

2543. $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$.

2545. $\ln\frac{3}{2}+\frac{5}{12}$. 2546. $8a$. 2547. $\frac{3}{2}\pi a$.

2549. $k$ doit être de la forme $\frac{2N+1}{2N}$ ou $\frac{2N}{2N-1}$, où $N$ est un entier.

2550. 4. 2551. $\ln\frac{\pi}{2}$. 2554 *. Montrer que la longueur de l'ellipse peut s'écrire $L=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}(\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}+\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t})\,dt$, et majorer cette intégrale.

2555. $2\pi$. 2556. 1) $\frac{4}{3}\pi ab^2$; 2) $\frac{4}{3}\pi a^2 b$.

2557. $\frac{8}{15}\pi h^2 a$. 2558. $\frac{\pi h^2}{3}(3a+h)$. 2559. $\frac{\pi}{4}(e^2-1)$.

2560. $\frac{\pi}{4}\left[\frac{e^{2b}-e^{-2b}}{2}-\frac{e^{2a}-e^{-2a}}{2}+2(b-a)\right]$. 2561. $\frac{3\pi}{10}$.

2562. $\frac{\pi}{2}(15-16\ln 2)$. 2563. $\pi\left(\frac{\pi^2}{4}-2\right)$. 2564. $\frac{8\pi}{3}$.

2565. $2\pi^2$. 2566. $\frac{\pi a^3}{4}\left[\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})-\frac{2}{3}\right]$.

2567. 1) $\frac{2}{3}\pi a^3$; 2) $\frac{\pi^2}{16}$. 2568. $5\pi^2 a^3$.

2569. $\pi a^3\left(\frac{3\pi^2}{2}-\frac{8}{3}\right)$. 2570. $\frac{32}{105}\pi a^3$. 2571. $\frac{16\pi c^6}{105ab^2}$.

2572. $\frac{\pi^2}{2}$. 2573. $\frac{\pi e}{2}$. 2574 *. 1) $\pi$; 2) $\pi\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Voir indication de l'exercice 2516. 2575 *. $\frac{3\pi\sqrt{2\pi}}{32}$. Voir indication de l'exercice 2516.

2576 *. $\pi^2$. Se servir de l'égalité $\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}$ (intégrale de Dirichlet).

2577 *. $2\pi^2 a^3$. Il est plus commode de passer à la forme paramétrique moyennant le changement $x=2a\sin^2 t$, $y=\frac{2a\sin^3 t}{\cos t}$. 2578. $\frac{2}{3}\pi a^3$.

2579 *. $\frac{4}{3}\pi abc$. Appliquer la formule $V=\int\limits_{x_1}^{x_2}S(x)\,dx$, où $S(x)$ est l'aire de la section transversale. 2580. 1) $\pi\sqrt{2}$; 2) $36\pi$.

2581. $v_1=\pi\sqrt{2}\left(2\sqrt{6}-\frac{11}{3}\right)$, $v_2=\pi\sqrt{2}\left(2\sqrt{6}+\frac{11}{3}\right)$.

2582. $v_1=v_3=4\pi(\sqrt{6}+\sqrt{3}-4)$, $v_2=8\pi(4-\sqrt{3})$.

2583. $\frac{8\pi\sqrt{6}}{3}$. 2584. $8\pi$.

2585 *. $\frac{2}{3}R^2H=400$ cm³. Prendre l'axe de symétrie de la base pour axe des abscisses. 2586. $\frac{4}{15}ahH=128$ cm³.

2587. $\frac{2}{3}abH=133\frac{1}{3}$ cm³. 2588 *. $\frac{2}{3}\pi R^2H$. L'aire du segment parabolique symétrique est égale à $\frac{2}{3}ah$, où $a$ est la base du segment et $h$ la flèche.

2589 *. $\frac{R^2H}{6}\left(\pi+\frac{4}{3}\right)$ et $\frac{R^2H}{6}\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$. (Voir indication de l'exercice 2588). 2590. $\frac{8}{3}a^3$. 2591. $\frac{8}{3}\pi r^3$. 2592. $\frac{16}{3}R^3$.

2593. $\frac{4}{3}R^2H$. 2594. $\frac{56}{3}\pi a^2$. 2595. $\frac{\pi}{9}(\sqrt{(1+a^4)^3}-1)$.

2596. $\frac{\pi a^2}{4}(e^2-e^{-2}+4)$.

2597. $2\pi b^2+\frac{2\pi ab}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon$ et $2\pi a^2+\frac{\pi b^2}{\varepsilon}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$, où $\varepsilon$ est l'excentricité de l'ellipse. 2598. $2\pi[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$. 2599. $\pi\left[\sqrt{5}-\sqrt{2}+\right.$ $\left.+\ln\frac{2\sqrt{2}+2}{\sqrt{5}+1}\right]$. 2600. $3\pi a^2$.

2601. $\pi a^2\sqrt{2}\left(2-\frac{\pi}{2}\right)$. 2602. $\frac{2\pi\sqrt{2}}{5}(e^{\pi}-2)$.

2603. $\frac{12}{5}\pi a^2$. 2604. $8\pi a^2\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$. 2605. $\frac{32}{5}\pi a^2$.

2606. $4\pi^2r^2$. 2607. $2\pi a^2(2-\sqrt{2})$.

2608. $\pi[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$. 2609. $4\pi a^2$. 2610. $\frac{ah^2}{2}$.

2611. $\frac{a^3}{6}$, $\frac{a^3}{6}$, $\frac{a^2\sqrt{2}}{12}$. 2613. Le centre de gravité est situé sur l'axe de symétrie du segment à une distance $\frac{2}{5}h$ de la base.

2614. Pour $S_1$: $\xi=\frac{3}{5}a$, $\eta=\frac{3}{8}b$; pour $S_2$: $\xi=\frac{3}{10}a$, $\eta=\frac{3}{4}b$.

2615. $\xi=0$, $\eta=\frac{2r}{\pi}$. 2616. $\xi=0$, $\eta=\frac{4r}{3\pi}$.

2617. Le centre de gravité est situé sur la bissectrice de l'angle au centre qui intercepte l'arc, à une distance $2r\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha}$ du centre.

2618. $\xi=\frac{a}{5}$, $\eta=\frac{a}{5}$, 2619. $\xi=\frac{4a}{3\pi}$, $\eta=\frac{4b}{3\pi}$.

2620. $\frac{b^2}{2}+\frac{ab}{2\varepsilon}\arcsin\varepsilon$, où $\varepsilon$ est l'excentricité de l'ellipse.

2621. $\xi=\frac{\pi}{2}$, $\eta=\frac{\pi}{8}$. 2622. $\frac{\pi}{2}+\frac{4}{5}$.

2623. $\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{3}$. 2624. $\frac{3}{20}$. 2625. $\xi=\frac{5}{8}a$, $\eta=0$.

2626. $\xi=0$, $\eta=a\frac{e^4+4e^2-1}{4e(e^2-1)}$. 2628. $\xi=\pi a$, $\eta=\frac{4}{3}a$.

2629. $\xi=\pi a$, $\eta=\frac{5}{6}a$. 2630. $\xi=\frac{2}{5}a$, $\eta=\frac{2}{5}a$.

2631. $\xi=\frac{256a}{315\pi}$, $\eta=\frac{256a}{315\pi}$. 2633. $\xi=\frac{6a(4-\pi^2)}{\pi^3}$, $\eta=\frac{2a(\pi^2-6)}{\pi^2}$.

2634. Le centre de gravité est situé sur l'axe de symétrie du secteur à une distance $\frac{2}{3}\frac{r\sin\alpha}{\alpha}$ du centre du cercle.

2635. $\xi=\frac{5}{6}a$, $\eta=0$. 2636. $\xi=\frac{\sqrt{2}}{8}\pi a$, $\eta=0$.

2638. $\xi=-\frac{a}{5}\frac{2e^{2\pi}+e^{\pi}}{e^{\pi}-e^{\frac{\pi}{2}}}$, $\eta=\frac{a}{5}\frac{e^{2\pi}-2e^{\pi}}{e^{\pi}-e^{\frac{\pi}{2}}}$.

2639. $\xi=\frac{4}{5}a$, $\eta=\frac{4}{5}a$. 2640. $\frac{3}{8}R$.

2641. Le centre de gravité est situé sur l'axe de symétrie à une distance $R/2$ du centre.

2642. $\frac{H}{3}$, $\frac{H\sqrt{R^2+H^2}}{3(R+\sqrt{R^2+H^2})}$, $\frac{H}{4}$. 2643. $\frac{h}{3}$.

2644. $\frac{l}{3}(a^2+ab+b^2)$. 2645. $\frac{\pi R^3}{2}=M\frac{R^2}{2}$ ($M$ est la masse du demi-cercle). 2646. $\frac{\sqrt{(1+e)^3}-2\sqrt{2}}{3}$.

2647. $I_x=\frac{256}{15}a^3$; $I_y=16a^3\left(\pi^2-\frac{128}{45}\right)$.

2648. $\frac{ab^3}{3}$. 2649. 1) $\frac{bh^3}{12}$; 2) $\frac{bh^3}{4}$; 3) $\frac{bh^3}{36}$. 2650. $\frac{\pi R^4}{8}$.

2651. $\frac{\pi R^4}{2}$. 2652. $\frac{\pi}{4}ab^3$ et $\frac{\pi}{4}ba^3$. 2653. $\frac{1}{2}\pi R^4H$.

2654. $\frac{1}{10}\pi R^4H$. 2655. $\frac{8}{15}\pi R^5$. 2656. $\frac{8}{15}\pi ab^4$, où $2a$ est la longueur de l'axe de rotation. 2657. $\frac{1}{6}\pi R^4H$.

2658. $\frac{56\pi}{15}$. 2659. 1) $I_x=\frac{\pi(e^4-1)}{8}$; 2) $I_y=4\pi(3-e)$.

2660. $MR^2$, où $M$ est la masse de la surface latérale du cylindre.

2661. $\frac{1}{2}MR^2$. 2662. $\frac{2}{3}MR^2$. 2663. $\frac{9}{2}\pi a^3$. 2664. $6\pi^2ab^2$.

2665. Volume: $\frac{3\sqrt{2}}{8}\pi^2a^3$, surface: $-6\sqrt{2}\pi a^2$.

2666. Volume: $12\pi^3a^3$, surface: $32\pi^2a^2$.

2667. L'axe de rotation doit être perpendiculaire à la diagonale du carré; l'axe de rotation doit être perpendiculaire à la médiane.

2668. $\approx 23{,}7$ m. 2669. $x_2 = x_1 + \sin\left(\frac{2\pi t_2}{T} + \varphi_0\right) - \sin\left(\frac{2\pi t_1}{T} + \varphi_0\right)$.

2670. $\frac{kmM}{a(a+l)}$, $\frac{a+l}{a}M$, $\frac{kmM}{l}\ln\frac{r_1(r_2+l)}{r_2(r_1+l)}$.

2671. $\frac{2kmM}{\pi r^2}$. 2672. $\frac{kmMa}{\sqrt{(R^2+a^2)^3}} = \frac{kmM\cos^3\varphi}{a^2}$, où $\varphi$ est l'angle des droites joignant le point $C$ au centre de l'anneau et à un point quelconque de l'anneau ; $\frac{kmM}{R}$.

2673. $\frac{2kmM}{R^2}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}\right)$. 2674. $2\pi km\sigma$.

2675 *. $2\pi km\gamma h\left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2+(R-r)^2}} = 2\pi km\gamma h\,(1-\cos\alpha)\right.$, où $\alpha$ est l'angle de la génératrice et l'axe du cône. Utiliser la solution de l'exercice 2673.

2676. $2km\gamma$. 2678 *. $\frac{kM^2}{l^2}\ln\frac{4}{3}$. Calculer d'abord la force d'interaction de l'élément $ds$ de la première tige sur la seconde (utiliser le résultat de l'exercice 2670), puis calculer toute la force d'interaction.

2679. $\frac{g^2M^3}{6m^2}$. 2680. $\frac{\pi H^2 d}{12}(R^2+2Rr+3r^2)$.

2681. $\approx 1{,}63\cdot 10^{11}$ kgm. 2682. 353 250 kgm.

2683. $\frac{\pi dR^2H^2}{12}$, $\frac{\pi dR^2H^2}{4}$. Dans les exercices 2683-2686 on obtient le travail en kgm si la distance est exprimée en m et le poids spécifique en kgf/m³.

2684. $\frac{\pi dR^4}{4} \approx 101{,}8$ kgm. 2685. $\frac{\pi dR^2H^2}{6} \approx 26\,800$ kgm.

2686. $\frac{4}{15}d\,ab\,H^2 = 240$ kgm. 2687. $\frac{Sl^3\omega^2\gamma}{6} \approx 0{,}418$ kgm $\approx 4{,}2$ J.

2688. $\frac{ab^3 d\gamma\omega^2}{6} \approx 1{,}16$ kgm. 2689. $\frac{ah^3 d\omega^2\gamma}{24} \approx 0{,}05$ kgm.

2690. $\frac{ha^3 d\omega^2\gamma}{60} \approx 0{,}015$ kgm. 2691. $\frac{\pi R^4 H\omega^2\gamma}{4}$.

2692. $\frac{MR^2\pi^2n^2}{3600}$ ; $\frac{MR^2(3\pi-8)\pi n^2}{3600}$.

2693. a) $\frac{ah^2}{6}$ ; b) de deux fois. 2694. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. 2695. 22,2 m.

2696. $\frac{2}{3}da^2b$. 2697. $abd\left(h + \frac{b}{2}\sin\alpha\right)$.

2699. a) $\frac{d^2H^2S}{2} = 32$ kgm ; b) $\frac{1}{2}SH^2(1-d)^2 = 2$ kgm.

2700. $\frac{4}{3}\pi R^4$. 2701. $\approx 0{,}206$ cm².

2702. a) $\approx 33{,}2$ s ; b) $\approx 64{,}6$ s.

2703. $\approx 1$ h 6 mn 53 s. 2704. $\frac{2bL\sqrt{2a}}{3S\sqrt{g}}(2\sqrt{2}-1)$.

2705. $\frac{2b\sqrt{2g}}{3}\left[(H+h)^{\frac{3}{2}} - H^{\frac{3}{2}}\right]$ ; pour $H=0$ : $\frac{2b\sqrt{2g}}{3}h^{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{2g}}{3}S\sqrt{h}$, où $S$ est l'aire de la fente.

2706. a) $\approx 2{,}4$ s; b) $\approx 6{,}3$ s; c) $\approx 53$ s; d) pour $t \to \infty$.
2707. $\approx 3{,}4$ kgm. 2708. 1) a) $\approx 7{,}16$ kgm; b) $\approx 16{,}6$ kgm; c) $\approx 23{,}8$ kgm; 2) lorsque le gaz se dilate indéfiniment, le travail tend vers l'infini.
2709. $\approx 1600$ kgm. 2710. $\approx 82$ mn. 2711. Un peu plus de 5°.

2712. $\dfrac{\sigma}{2a\pi\varepsilon_0}$.

2713. a) $4 \cdot 10^{-6}$ J; b) $6 \cdot 10^{-6}$ J. 2714. 5 cm.
2715. $\approx 946$ coulombs. 2716. $\approx 1092$ coulombs. 2717. $\approx 5110$ coulombs.

2718. $\dfrac{E_0^2}{2}$. La tension efficace du courant alternatif est $\dfrac{E_0}{\sqrt{2}}$.

2719. $\dfrac{E_0 I_0}{2} T \cos \varphi_0$. 2720. $\approx 7$ mn. 2721. 2,915 l.

2722. a) $H_1 = H \dfrac{\ln a - \ln c}{\ln a - \ln b} \approx 15$ cm. b) $\approx 0{,}125$ %.

2723. $\dfrac{1}{1024}$ de la quantité initiale. 2724. $\approx 2{,}49$ g.

2725. $\dfrac{8}{9}$ g. 2726. $\approx 37{,}3$ mn.

## Chapitre IX

2727*. $S_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$, $S = 1$. Représenter chaque terme de la série par une somme de deux termes.

2728. $S_n = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2n+1}\right)$, $S = \dfrac{1}{2}$.

2729. $S_n = \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{3n+1}\right)$, $S = \dfrac{1}{3}$.

2730. $S_n = \dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+3}\right)$, $S = \dfrac{11}{18}$.

2731. $S_n = \dfrac{1}{6}\left(1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+3} - \dfrac{1}{2n+5}\right)$, $S = \dfrac{23}{90}$.

2732. $S_n = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$, $S = \dfrac{1}{4}$.

2733. $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{2 \cdot 3^n}$, $S = \dfrac{3}{2}$.

2734. $S_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$, $S = 1$.

2735. $S_n = \dfrac{1}{8}\left[1 - \dfrac{1}{(2n+1)^2}\right]$, $S = \dfrac{1}{8}$.

2736. $S = \operatorname{arctg} \dfrac{n}{n+1}$, $S = \dfrac{\pi}{4}$.

2737. Converge. 2738. Converge. 2739. Diverge.
2740. Converge. 2741. Diverge. 2742. Diverge.
2743. Converge. 2744. Diverge. 2745. Diverge.
2746. Converge. 2747. Converge. 2748. Diverge.
2749. Converge. 2750. Diverge. 2751. Converge.
2752. Converge. 2753. Diverge. 2767. Converge.
2768. Diverge. 2769. Converge. 2770. Converge.
2771. Converge. 2772. Diverge. 2773. Diverge.
2774. Converge. 2775. Diverge. 2776. Diverge.
2777. Diverge. 2778. Converge. 2779. Converge.

2780. Diverge. 2781. Converge. 2782. Diverge.
2783. Converge. 2784*. Diverge. Utiliser la formule

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\ldots+\sin k\alpha=\frac{\sin\frac{k+1}{2}\alpha\sin\frac{k}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

ou l'inégalité $\sin x>\frac{2}{\pi}x$, si $0<x<\frac{\pi}{2}$.

2790. Converge, mais pas absolument. 2791. Converge absolument.
2792. Converge, mais pas absolument. 2793. Converge absolument.
2794. Converge absolument. 2795. Diverge.
2796. Converge, mais pas absolument. 2797. Converge absolument.
2798. Converge, mais pas absolument. 2799. Diverge.

2802. $-1<x<1$. 2803. $\frac{1}{e}<x<e$. 2804. $-1<x<1$.
2805. $-1\leqslant x\leqslant 1$. 2806. $-1\leqslant x<1$. 2807. $x<-1$ et $x>1$.
2808. $-1<x<1$. 2809. $-1\leqslant x<1$.
2810. $x\neq\pm 1$. 2811. Pour tout $x$.
2812. $-2<x<2$. 2813. Pour tout $x$.
2814. $x>0$. 2815. $x>0$. 2816. $x\geqslant 0$. 2822. 11 termes.
2823*. Utiliser l'inégalité $\ln(1+\alpha)\leqslant\alpha$.

2825. $f(0)=\frac{1}{9}$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{101}$; $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{44}{1001}$; $f(1)=0{,}049$; $f(-0{,}2)=0{,}108$.

2827. $\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$. 2828. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}$.

2829. $(x+1)\ln(x+1)-x$. 2830. $\frac{1}{2}$. 2831. 0,2.

2832*. $\ln\frac{3}{2}$. Utiliser la relation $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^n}\ldots=\frac{\sin x}{x}$.

2833*. $\frac{\pi^3}{12}$. Utiliser la formule $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

2834. 1) $\frac{1}{3}\left(\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$; 2) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\ln(1+\sqrt{2})+\frac{\pi}{2}\right]$.

2835. $\ln 2$. 2836. $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

2837. Cette série ne peut être dérivée terme à terme dans aucun intervalle. En effet le terme général de la série des dérivées est de la forme $\pi\cos(2^n\pi x)$. Tout intervalle $(\alpha, \beta)$ aussi petit qu'il soit contient des nombres de la forme $\frac{k}{2^N}$, où $k$ est un entier et $N$ un entier positif suffisamment grand. Or pour $x=\frac{k}{2^N}$ la série des dérivées diverge puisque pour tous les $n>N$ ses termes deviennent égaux à $\pi$.

2838. $\frac{1}{(1-x)^2}$ et $\frac{1}{(1-x)^3}$.

2841. $(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{(x-n)^n}{n}+\ldots$

2842. $1+\frac{3}{2}\left[(x-1)+\frac{1}{2}\frac{(x-1)^2}{2!}-\frac{1}{2^2}\frac{(x-1)^3}{3!}+\ldots\right.$

$\left.\ldots+(-1)^n\frac{1\cdot 3\ldots(2n-5)}{2^{n-1}}\frac{(x-1)^n}{n!}+\ldots\right].$

2843. $\frac{1}{3}-\frac{x-3}{9}+\frac{(x-3)^2}{27}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{(x-3)^{n-1}}{3^n}+\ldots$

2844. $1-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\frac{(x-2)^2}{2!}+\ldots+(-1)^{n+1}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n-2}\frac{(x-2)^{2n-2}}{(2n-2)!}+\ldots$

2845. $1+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\ldots$

2846. $x^2+\frac{x^3}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\ldots+\frac{x^{n+1}}{(n-1)!}+\ldots$

2847. $\cos\alpha\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\ldots\right]-$

$-\sin\alpha\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots\right].$

2848. $x+x^2+\frac{2x^3}{3!}-\frac{4x^5}{5!}+\ldots+\sqrt{2^n}\sin\frac{\pi n}{4}\cdot\frac{x^n}{n!}+\ldots$

2849. $1-\frac{4x^4}{4!}+\frac{4^2x^8}{8!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{4^{n-1}x^{4(n-1)}}{(4n-4)!}+\ldots$

2850. $\ln 2+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}-\frac{x^4}{192}+\ldots$

2851. $e\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}-\ldots\right)$. 2852. $1-\frac{nx^2}{2}+\frac{3n^2-2n}{24}x^4+\ldots$

2853. $\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}+\ldots$ 2854. $1+x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{5x^4}{6}+\ldots$

2855. $1+2x+\frac{(2x)^2}{2!}+\ldots+\frac{(2x)^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots$

2856. $1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2(n-1)}}{(n-1)!}+\ldots$

2857. $1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{n!}+\ldots$

2858. $1+\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{12}}{5!}+\ldots+\frac{x^{6(n-1)}}{(2n-1)!}+\ldots$

2859. $\frac{x}{2}-\frac{x^3}{2^3\cdot 3!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2^{2n-1}(2n-1)!}+\ldots$

2860. $1-\left[x^2-\frac{(2x)^4}{2\cdot 4!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right].$

2861. $1-\frac{x^2}{3!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2(n-1)}}{(2n-1)!}+\ldots$

2862. $-\frac{2x^3}{3!}+\frac{4x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{2nx^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$

2863. $\ln 10+\left[\frac{x}{10}-\frac{x^2}{2\cdot 10^2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n\cdot 10^n}+\ldots\right].$

2864. $x^2-\frac{x^3}{2}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n}+\ldots$

2865. $1+\left[\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\ldots(2n-3)\,x^{2n}}{2\cdot 4\ldots(2n-2)\,2n}+\ldots\right].$

2866. $2-2\left[\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\frac{2}{3^2\cdot 2!}\left(\frac{x}{2}\right)^6+\ldots\right.$

$$\left.\ldots+\frac{2\cdot 5\ldots(3n-4)}{3^n\cdot n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{3n}+\ldots\right].$$

2867. $1-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1\cdot 4}{3^2 2!}x^6+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 4\ldots(3n-2)}{3^n\cdot n!}x^{3n}+\ldots\right].$

2868. $x^2+\left[\frac{1}{2}x^4+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^6+\ldots+\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n+2}+\ldots\right].$

2869. $1+2^2x+\ldots+n^2x^{n-1}+\ldots,\quad S=12.$

2870. 1) $-7!$, 2) $\frac{105}{16}$, 3) $\frac{10!}{4!}$ et 4) $\frac{8}{3}$.

2871. 1/6. 2872. 1/4. 2873. 1.
2874. 1/2. 2875. 2/3. 2876. 1/3. 2877. 1/60.
2878. $-1/10<x<1/10$. 2879. $-1<x\leqslant 1$.
2880. $-10\leqslant x<10$. 2881. $x=0$. 2882. $-\sqrt{2}/2<x<\sqrt{2}/2$.
2883. $-\infty<x<\infty$. 2884. $-1/3<x<1/3$. 2885. $-1\leqslant x\leqslant 1$.
2886. $-1/e\leqslant x<1/e$. 2887. $x=0$. 2888. $-1\leqslant x<1$.

2889. $-\frac{1}{e}<x<\frac{1}{e}$. 2890. $x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}-\ldots$

$$\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\ldots(2n-3)}{2^{n-1}(n-1)!}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots\ (-1\leqslant x\leqslant 1).$$

2891. $x+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots\ (-1<x<1).$

2892. $x^2+\frac{x^4}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{x^{2n}}{n(2n-1)}+\ldots\ (-1\leqslant x\leqslant 1).$

2893. $4\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{2x^5}{5!}+\ldots+\frac{nx^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots\right)\ (-\infty<x<\infty),\ \frac{1}{2e}.$

2894. 1,39, erreur 0,01. 2895. 0,3090, erreur 0,0001.
2896. 2,154, erreur 0,001.
2897. 7,389. 2898. 1,649. 2899. 0,3679.
2900. 0,7788. 2901. 0,0175. 2902. 1,000. 2903. 0,17365.
2904. 0,9848. 2905. 3,107. 2906. 4,121. 2907. 7,937.
2908. 1,005. 2909. 3,017. 2910. 5,053. 2911. 2,001.
2912. 1,0986. 2913. 0,434294. 2914. 0,6990.

2915. $1+2x+\frac{5}{2}x^2+\ldots+\left[2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}\right]x^{n-1}+\ldots$

2916. $x-\frac{3}{2}x^2+\frac{11}{6}x^3-\ldots+(-1)^{n+1}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right]x^n+\ldots$

2917. $1-\frac{x}{3}+\frac{x^3}{81}+\ldots$ 2918. $-\frac{x}{2}+\frac{5x^3}{32}+\ldots$ 2919. $x-x^2+2x^3+\ldots$

2920. $C+x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}+\ldots$

$$(-\infty<x<\infty).$$

2921. $C+\ln|x|-\frac{x^2}{2\cdot 2!}+\frac{x^4}{4\cdot 4!}-\ldots$

$$\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n\cdot(2n)!}+\ldots\quad(-\infty<x<0 \text{ et } 0<x<\infty).$$

2922. $C+\ln|x|+x+\frac{x^2}{2\cdot 2!}+\ldots+\frac{x^n}{n\cdot n!}+\ldots$

$$(-\infty<x<0 \text{ et } 0<x<\infty).$$

2923. $C-\frac{1}{x}+\ln|x|+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2\cdot 3!}+\ldots+\frac{x^n}{n(n+1)!}+\ldots$

$(-\infty<x<0$ et $0<x<\infty)$.

2924. $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(n-1)!}+\ldots$

$\ldots+(-\infty<x<\infty)$.

2925. $x-\frac{x^3}{3^2}+\frac{x^5}{5^2}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)^2}+\ldots \quad (-1\leqslant x\leqslant 1)$.

2926. $x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^9}{9}+\ldots$

$\ldots+\frac{1\cdot 3\ldots(2n-3)}{2^{n-1}(n-1)!}\frac{x^{4n-3}}{4n-3}+\ldots \quad (-1\leqslant x\leqslant 1)$.

2927. $x+\frac{1}{2}\frac{x^4}{4}-\frac{1}{2\cdot 4}\frac{x^7}{7}+\ldots$

$\ldots+(-1)^n\frac{1\cdot 3\ldots(2n-5)}{2^{n-1}(n-1)!}\frac{x^{3n-2}}{3n-2}+\ldots \quad (-1\leqslant x\leqslant 1)$.

2928. $x+\frac{x^{10}}{10}+\frac{x^{19}}{19}+\ldots+\frac{x^{9n-8}}{9n-8} \quad (-1\leqslant x\leqslant 1)$.

2929. $\frac{1}{4}\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{3}{4\cdot 8}\frac{x^7}{7}+\ldots$

$\ldots+(-1)^{n+1}\frac{3\cdot 7\ldots(4n-5)}{4^n\cdot n!}\frac{x^{4n-1}}{4n-1}+\ldots \quad (-1\leqslant x\leqslant 1)$.

2930. 0,3230, erreur 0,0001. 2931. 0,24488, erreur 0,00001.
2932. 0,4971, erreur 0,0001. 2933. 3,518, erreur 0,001.
2934. 0,012, erreur 0,001. 2935. 32,831. 2936. 0,487.
2937. 0,006. 2938. 0,494. 2940. 3,141592654.

2941. $x+\frac{2}{1\cdot 3}x^3+\frac{2^2}{1\cdot 3\cdot 5}x^5+\ldots+\frac{2^{n-1}}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}x^{2n-1}+\ldots$

2942*. $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^4}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n^n}+\ldots$ Mettre $x^x$ sous la forme $e^{x\ln x}$, développer en série suivant les puissances de $x\ln x$ et intégrer les expressions de la forme $x^n\ln^n x$.

2943. 0,6449. 2944. 0,511. 2945. 1,015.

2946*. 3,71. La formule $S=4\int\limits_0^1\sqrt[4]{1-x^4}\,dx$ est peu commode pour calculer l'aire car la série converge lentement pour $x=1$. Il importe de calculer l'aire du secteur limité par la courbe, l'axe des ordonnées et la bissectrice du premier angle de coordonnées. On obtient une série qui converge plus rapidement.

2947. 0,2505. 2948. 3,821. 2949. 0,119. 2950. 1,225.
2951. (0,347; 2,996). 2952. (1,71; 0,94).

## Chapitre X

2953. $z=\frac{\pi}{3}(x^2y-y^3)$.

2954. $S=\frac{1}{4}\sqrt{(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(y+z-x)}$.

2955.

| $y \backslash x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 |
| 1 | —2 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 |
| 2 | —5 | —3 | —1 | 1 | 3 | 5 |
| 3 | —8 | —6 | —4 | —2 | 0 | 2 |
| 4 | —11 | —9 | —7 | —5 | —3 | —1 |
| 5 | —14 | —12 | —10 | —8 | —6 | —4 |

2956.

| $y \backslash x$ | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,00 | 0,10 | 0,20 | 0,30 | 0,40 | 0,50 | 0,60 | 0,70 | 0,80 | 0,90 | 1,00 |
| 0,1 | 0,10 | 0,14 | 0,22 | 0,32 | 0,41 | 0,51 | 0,61 | 0,71 | 0,81 | 0,90 | 1,00 |
| 0,2 | 0,20 | 0,22 | 0,28 | 0,36 | 0,45 | 0,54 | 0,63 | 0,73 | 0,82 | 0,92 | 1,01 |
| 0,3 | 0,30 | 0,32 | 0,36 | 0,42 | 0,50 | 0,58 | 0,67 | 0,76 | 0,85 | 0,95 | 1,04 |
| 0,4 | 0,40 | 0,41 | 0,45 | 0,50 | 0,57 | 0,64 | 0,72 | 0,81 | 0,89 | 0,98 | 1,08 |
| 0,5 | 0,50 | 0,51 | 0,54 | 0,58 | 0,64 | 0,71 | 0,78 | 0,86 | 0,94 | 1,03 | 1,12 |
| 0,6 | 0,60 | 0,61 | 0,63 | 0,67 | 0,72 | 0,78 | 0,85 | 0,92 | 1,00 | 1,08 | 1,16 |
| 0,7 | 0,70 | 0,71 | 0,73 | 0,76 | 0,81 | 0,86 | 0,92 | 0,99 | 1,06 | 1,14 | 1,22 |
| 0,8 | 0,80 | 0,81 | 0,82 | 0,85 | 0,89 | 0,94 | 1,00 | 1,06 | 1,13 | 1,20 | 1,28 |
| 0,9 | 0,90 | 0,91 | 0,92 | 0,95 | 0,98 | 1,03 | 1,08 | 1,14 | 1,20 | 1,27 | 1,34 |
| 1 | 1,00 | 1,00 | 1,02 | 1,04 | 1,08 | 1,12 | 1,16 | 1,22 | 1,28 | 1,34 | 1,41 |

2957. 1) $\frac{9}{16}$; 2) 1; 3) 16; 2; 2.

2958. $\dfrac{\varphi(a)\,\psi\left(\frac{1}{a}\right)-\psi(a)\,\varphi\left(\frac{1}{a}\right)}{\varphi(1)\,\psi(1)}$; $a-\frac{1}{a}$.

2959. La deuxième fonction croît plus vite.
2960. Une parabole du deuxième degré; 1) non. 2) non.
2961. Poser $m = 1/x$. 2965. La fonction n'est pas univoque.
2966. 1) 1; 2) 1; 3) 1/5; 4) pas définie; 5) 1.
2967. $z = (x+y)^{x-y} + (x+y)^{y-x}$. $(x+y>0)$; $z$ est une fonction rationnelle de $u$ et $v$, mais pas de $w$, $t$, $x$ et $y$.

2968. $z = (x + y)^{xy} + (xy)^{2x}$.

2969. $u = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{4} [(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 3 (x + y + z)^4]$; $u$ est une fonction rationnelle entière en $\xi$ et $\eta$, $x$, $y$ et $z$, mais pas en $\omega$ et $\varphi$.

2970. $z = \left(\frac{u+v}{u-v}\right)^v + u$; $u = x^2 + y^2$; $y = xy$.

2971. $x =$ const est une parabole, $y =$ const une parabole, $z =$ const $\neq 0$ une hyperbole et $z = 0$ un couple de droites.

2972. $x =$ const et $y =$ const sont des droites, $z =$ const $\neq 0$ une hyperbole, $z = 0$ un couple de droites.

2973. $x =$ const est une parabole, $y =$ const une parabole cubique, $z =$ const $\neq 0$ une courbe du troisième degré, $z = 0$ une parabole semi-cubique.

2974. $z =$ const $> 0$ est une ellipse, $x =$ const et $y =$ const des courbes du troisième degré (pour $x = 0$ et $y = 0$ des paraboles semi-cubiques).

2975. $0 < y < 2$; $-1 < y - \frac{1}{2} x < 0$.

2976. $x^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}$.

2977. $0 < y < x\sqrt{3}$; $y < (a - x)\sqrt{3}$.

2978. $(x - a)^2 + (y - b)^2 < R^2$; $-\infty < z < \infty$.

2979. $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \leqslant R^2$.

2980. $x^2 + y^2 < 4R^2$.

2981. $v = \frac{1}{6} xy (2R \pm \sqrt{4R^2 - x^2 - y^2})$; la fonction n'est pas univoque. Domaine de définition de la fonction $x^2 + y^2 \leqslant 4R^2$; $x > 0$, $y > 0$.

2982.

| | | |
|---|---|---|
| Pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, | $0 \leqslant y \leqslant 1$ | $S = xy$; |
| pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, | $1 \leqslant y$ | $S = x$; |
| pour $1 \leqslant x$ | $0 \leqslant y \leqslant 1$ | $S = y$; |
| pour $1 \leqslant x \leqslant 2$; | $1 \leqslant y \leqslant 2$ | $S = xy - x - y + 2$; |
| pour $1 \leqslant x \leqslant 2$; | $2 \leqslant y$ | $S = x$; |
| pour $2 \leqslant x$, | $1 \leqslant y \leqslant 2$ | $S = y$; |
| pour $2 \leqslant x$, | $2 \leqslant y$ | $S = 2$. |

2983. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$. 2984. $y^2 > 4x - 8$.

2985. Le plan tout entier sauf les points de la circonférence $x^2 + y^2 = R^2$.

2986. L'angle des bissectrices des angles de coordonnées qui contient l'axe $Ox$: $x + y \geqslant 0$, $x - y \geqslant 0$ (les bissectrices comprises).

2987. Même région que dans l'exercice précédent mais sans les frontières.

2988. $1 - x \leqslant y \leqslant 1 + x$ $(x > 0)$, $1 + x \leqslant y \leqslant 1 - x$ $(x < 0)$. La région intérieure des angles délimités par l'intersection des droites $y = 1 + x$ et $y = 1 - x$ et contenant l'axe des abscisses (les droites comprises mais pas leur point d'intersection, car pour $x = 0$ la fonction n'est pas définie).

2989. La région du plan délimitée par le premier et le troisième angle de coordonnées (sans les frontières).

2990. $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$; $x^2 \geqslant y$. Le domaine fermé compris entre le demi-axe positif des abscisses et la parabole $y = x^2$ (frontière incluse).

2991. $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$. La couronne délimitée par les circonférences $x^2 + y^2 = 1$ et $x^2 + y^2 = 4$ (circonférences incluses).

2992. La région du plan interceptée à l'intérieur de la parabole $y^2 = 4x$ par la circonférence $x^2 + y^2 = 1$ y compris l'arc de la parabole sans le sommet, mais pas l'arc de circonférence.

2993. La région du plan extérieure aux circonférences de rayons unitaires centrées en $(-1, 0)$ et $(1, 0)$. N'appartiennent au domaine que les points de la première circonférence.

2994. Les points de la circonférence $x^2 + y^2 = R^2$.

2995. Le plan tout entier à l'exclusion des droites $x + y = n$ ($n$ est un entier arbitraire positif, négatif ou nul).

2996. Le cercle $x^2 + y^2 = 1$ et les couronnes $2n \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2n + 1$ ($n$ est un entier), y compris les frontières.

2997. $\left.\begin{array}{l}\text{Si } x \geqslant 0 \text{ alors } 2n\pi \leqslant y \leqslant (2n+1)\pi\,; \\ \text{si } x < 0 \text{ alors } (2n+1)\pi \leqslant y \leqslant (2n+2)\pi\end{array}\right\}$ $n$ est un entier.

2998. $x > 0$; $2n\pi < y < 2(n+1)\pi$ ($n$ est un entier).

2999. Le domaine ouvert hachuré (fig. 83).

$$\begin{cases}\text{Pour } x > 0,\ y > x + 1, \\ \text{pour } x < 0 \quad x < y < x + 1.\end{cases}$$

3000. La région du plan comprise entre la courbe $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$ et son asymptote, frontière incluse.

3001. $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

3002. La région de l'espace comprise entre les sphères $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ et $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. N'appartient au domaine que la sphère extérieure.

3003. 2. 3004. 0. 3005. 0. 3006. La fonction ne possède pas de limite pour $x \to 0$ et $y \to 0$. 3007. 0. 3008. 1.

3009. a) $y = 0$ ou $y = x^\alpha$ ($\alpha > 1$), $x \to 0$ arbitrairement; b) $y = \dfrac{x}{3}$, $x \to 0$ arbitrairement.

3010. Le point (0, 0); au voisinage de ce point la fonction peut prendre des valeurs positives aussi grandes que l'on veut.

3011. Tous les points de coordonnées entières. 3012. Sur la droite $y = x$.

3013. Sur les droites $x = m$, $y = n$ ($m$ et $n$ sont des nombres entiers).

3014. Sur la parabole $y^2 = 2x$.

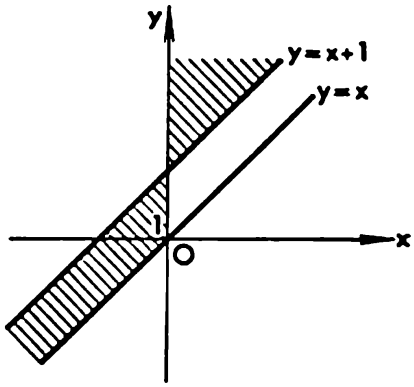

Fig. 83

3015. 1) continue; 2) discontinue; continue en $x$ et $y$ séparément; 3) continue; 4) discontinue; 5) discontinue; 6) discontinue. Passer aux coordonnées polaires.

3016. Les circonférences centrées en l'origine des coordonnées et respectivement de rayons 1, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\dfrac{1}{2}$.

3017. Les circonférences passant par les points $A$ et $B$.

3025. Les droites $y = ax + b$ où $a = \ln b$.

3026. Les sphères concentriques centrées en $A$ et respectivement de rayons 1, 2, 3, 4.

3027. Les ellipsoïdes de révolution de foyers $A$ et $B$:

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - (z - z_1)^2} + \\ + \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2} = \text{const.}$$

3028. Les sphères $x^2 + y^2 + z^2 = \left(\dfrac{c-1}{c+1}\right)^2$, où $c = e^u$.

3029. Les paraboloïdes de révolution $x^2 + y^2 = cz$.

3030. 1) Les plans $2x + 3y - z = C$; 2) les hyperboloïdes de révolution ou le cône $x^2 + y^2 - 2z^2 = C$.

3032. $\dfrac{1}{v}\dfrac{\partial v}{\partial T}$ pour $T = T_0$.

3033. $\dfrac{\partial \theta}{\partial t}$ est la vitesse de variation de la température au point considéré; $\dfrac{\partial \theta}{\partial x}$ la vitesse de variation de la température à l'instant $t$ donné le long de la tige.

3034. $\frac{\partial S}{\partial h}=b$ est la vitesse de variation de l'aire en fonction de la hauteur du rectangle ; $\frac{\partial S}{\partial b}=h$ est la vitesse de variation de l'aire en fonction de la base du rectangle.

3036. $\frac{\partial z}{\partial x}=1,\ \frac{\partial z}{\partial y}=-1.$

3037. $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y-y^3\ ;\ \frac{\partial z}{\partial y}=x^3-3y^2x.$

3038. $\frac{\partial \theta}{\partial x}=ae^{-t}\ ;\ \frac{\partial \theta}{\partial t}=-axe^{-t}+b.$

3039. $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{1}{v}-\frac{v}{u^2}\ ;\ \frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{u}{v^2}+\frac{1}{u}.$

3040. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y^4+3x^2y^2-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}.$

3041. $\frac{\partial z}{\partial x}=30xy\,(5x^2y-y^3+7)^2\ ;\ \frac{\partial z}{\partial y}=3\,(5x^2y-y^3+7)^2\,(5x^2-3y^2).$

3042. $\frac{\partial z}{\partial x}=\sqrt{y}-\frac{y}{3\sqrt[3]{x^4}}\ ;\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{2\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$

3043. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ;\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}.$

3044. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{x^2+y^2}\ ;\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{x^2+y^2}.$

3045. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{(x^2+y^2)\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)^2}\ ;\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{(x^2+y^2)\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)^2}.$

3046. $\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}\ ;\ \frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x.$

3047. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}\ ;\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}.$

3048. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ;\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2x}{y\sqrt{x^2+y^2}}.$

3049. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{xy\sqrt{2}}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}\ ;\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x^2\sqrt{2}}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}.$

3050. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2}{y\sin\frac{2x}{y}}\ ;\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2x}{y^2\sin\frac{2x}{y}}.$

3051. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}\ ;\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y^2}e^{-\frac{x}{y}}.$

3052. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x+\ln y}\ ;\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y\,(x+\ln y)}.$

3053. $\frac{\partial u}{\partial v}=-\frac{w}{v^2+w^2}\ ;\ \frac{\partial u}{\partial w}=\frac{v}{v^2+w^2}.$

3054. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x^2}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}\ ;$

$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}-\frac{1}{x}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}.$

3055. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{x^2}3^{-\frac{y}{x}}\ln 3$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{x}3^{-\frac{y}{x}}\ln 3$.

3056. $\frac{\partial z}{\partial x}=y^2(1+xy)^{y-1}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=xy(1+xy)^{y-1}+(1+xy)^y\ln(1+xy)$.

3057. $\frac{\partial z}{\partial x}=y\ln(x+y)+\frac{xy}{x+y}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=x\ln(x+y)+\frac{xy}{x+y}$.

3058. $\frac{\partial z}{\partial x}=x^{x^y}x^{y-1}(y\ln x+1)$; $\frac{\partial z}{\partial y}=x^yx^{x^y}\ln^2 x$.

3059. $\frac{\partial u}{\partial x}=yz$; $\frac{\partial u}{\partial y}=xz$; $\frac{\partial u}{\partial z}=xy$.

3060. $\frac{\partial u}{\partial x}=y+z$; $\frac{\partial u}{\partial y}=x+z$; $\frac{\partial u}{\partial z}=x+y$.

3061. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

3062. $\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+3y-1$; $\frac{\partial u}{\partial y}=z^2+3x$; $\frac{\partial u}{\partial z}=2yz+1$.

3063. $\frac{\partial w}{\partial x}=yz+vz+vy$; $\frac{\partial w}{\partial y}=xz+zv+vx$.

$\frac{\partial w}{\partial z}=xy+yv+vx$; $\frac{\partial w}{\partial v}=yz+xz+xy$.

3064. $\frac{\partial u}{\partial x}=(3x^2+y^2+z^2)e^{x(x^2+y^2+z^2)}$;

$\frac{\partial u}{\partial y}=2xye^{x(x^2+y^2+z^2)}$; $\frac{\partial u}{\partial z}=2xze^{x(x^2+y^2+z^2)}$.

3065. $\frac{\partial u}{\partial x}=2x\cos(x^2+y^2+z^2)$; $\frac{\partial u}{\partial y}=2y\cos(x^2+y^2+z^2)$;

$\frac{\partial u}{\partial z}=2z\cos(x^2+y^2+z^2)$.

3066. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{x+y+z}$.

3067. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x$; $\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x$.

3068. $\frac{\partial u}{\partial x}=y^zx^{y^z-1}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=zy^{z-1}x^{y^z}\ln x$; $\frac{\partial u}{\partial z}=y^zx^{y^z}\ln x\ln y$.

3069. $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{5}$. 3070. 0, $\frac{1}{4}$.

3071. $\frac{\partial z}{\partial x}=2(2x+y)^{2x+y}[1+\ln(2x+y)]$;

$\frac{\partial z}{\partial y}=(2x+y)^{2x+y}[1+\ln(2x+y)]$.

3072. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3}{x\ln y}\left(1+\frac{\ln x}{\ln y}\right)^2$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{3\ln x}{y\ln^2 y}\left(1+\frac{\ln x}{\ln y}\right)^2$.

3073. $\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{\sin\pi xy}(1+\pi xy\cos\pi xy)$; $\frac{\partial z}{\partial y}=xe^{\sin\pi xy}(1+\pi xy\cos\pi xy)$.

3074. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1-x^2-y^2-\sqrt{x^2+y^2}}{(1+\sqrt{x^2+y^2})^2}2x$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1-x^2-y^2-\sqrt{x^2+y^2}}{(1+\sqrt{x^2+y^2})^2}2y$.

3075. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y\sqrt{x^y}}{2x(1-x^y)}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\sqrt{x^y}\cdot \ln x}{2(1+x^y)}$.

3076. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{(1+\sqrt{xy})\sqrt{xy-x^2y^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{(1+\sqrt{xy})\sqrt{xy-x^2y^2}}$.

3077. $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y^2+2xy}{\sqrt{1+(xy^2+yx^2)^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2+2xy}{\sqrt{1+(xy^2+yx^2)^2}}$.

3078. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{xy-x-y}{xy+x+y}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}\sqrt{\frac{xy-x-y}{xy+x+y}}$.

3079. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y\left[\left(1+\operatorname{arctg}^2\frac{y}{x}\right)^2+2\operatorname{arctg}^3\frac{y}{x}\right]}{(x^2+y^2)\left(1+\operatorname{arctg}^2\frac{y}{x}\right)\left(1+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)^2}$;

$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x\left[\left(1+\operatorname{arctg}^2\frac{y}{x}\right)^2+2\operatorname{arctg}^3\frac{y}{x}\right]}{(x^2+y^2)\left(1+\operatorname{arctg}^2\frac{y}{x}\right)\left(1+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)^2}$.

3080. $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{4kx}{(x^2+y^2+z^2)^3}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{4ky}{(x^2+y^2+z^2)^3}$;

$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{4kz}{(x^2+y^2+z^2)^3}$.

3081. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$; $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{(x-y)^z\ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}$.

3082. $\frac{\partial u}{\partial x}=yz(\sin x)^{yz-1}\cos x$; $\frac{\partial u}{\partial y}=z(\sin x)^{yz}\ln\sin x$;

$\frac{\partial u}{\partial z}=y(\sin x)^{yz}\ln\sin x$.

3083. $\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{x}=\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{y}=\frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{z}=\frac{2}{r(r^2-1)}$, où $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

3084. $\frac{\partial w}{\partial x}=(2xy^2-yzv)\operatorname{tg}^3\alpha$; $\frac{\partial w}{\partial y}=(2x^2y-xzv)\operatorname{tg}^3\alpha$;

$\frac{\partial w}{\partial z}=(2zv^2-xyv)\operatorname{tg}^3\alpha$; $\frac{\partial w}{\partial v}=(2z^2v-xyz)\operatorname{tg}^3\alpha$,

où $\alpha=x^2y^2+z^2v^2-xyzv$.

3085. 4. 3086. $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{\substack{z=b\\t=a}}=\frac{3b}{2}\sqrt{\frac{ab}{b^2-a^2}}$; $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{\substack{z=b\\t=a}}=-\frac{3a}{2}\sqrt{\frac{ab}{b^2-a^2}}$.

3087. 1 et $-1$. 3088. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 3089. $\frac{3}{2}$. 3090. $-\frac{13}{22}$.

3091. 45°. 3092. 30°. 3093. $\operatorname{arctg}\frac{4}{7}$.

3094. $d_xz=(y^3-6xy^2)\,dx$; $d_yz=(3xy^2-6x^2y+8y^3)\,dy$.

3095. $d_xz=\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $d_yz=\frac{y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3096. $d_xz=\frac{y(y^2-x^2)\,dx}{(x^2+y^2)^2}$; $d_yz=\frac{x(x^2-y^2)\,dy}{(x^2+y^2)^2}$.

3097. $d_x u = \frac{3x^2\,dx}{x^3+2y^3-z^3}$; $d_y u = \frac{6y^2\,dy}{x^3+2y^3-z^3}$;

$d_z u = \frac{-3z^2\,dz}{x^3+2y^3-z^3}$.

3098. $\frac{1}{270}$. 3099. $\approx 0{,}0187$. 3100. $\frac{97}{600}$.

3101. $xy\,[(2y^3-2xy^2+4x^2y)\,dx+(4y^2x-3yx^2+2x^3)\,dy]$.

3102. $\frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}$. 3103. $\frac{2\,(x\,dy-y\,dx)}{(x-y)^2}$. 3104. $\frac{y\,dx-x\,dy}{y\sqrt{y^2-x^2}}$.

3105. $(x\,dy+y\,dx)\cos(xy)$. 3106. $\frac{dx}{1+x^2}+\frac{dy}{1+y^2}$.

3107. $\frac{4xy\,(x\,dy-y\,dx)}{(x^2-y^2)^2}$. 3108. $\frac{x\,dy+y\,dx}{1+x^2y^2}$.

3109. $x^{zy-1}\,(yz\,dx+zx\ln x\,dy+xy\ln x\,dz)$.

3110. 0,08. 3111. $0{,}25e$. 3112. $\frac{1}{36}$. 3113. $\approx 7{,}5$.

3114. $\approx 0{,}005$. 3115. $\approx 1{,}08$. 3116. 5.
3117. $1{,}8 \pm 0{,}2$. 3118. $4730 \pm 100$.

3119. $2\delta_a+\frac{\delta_B B\sin C}{\sin B\sin(B+C)}+\frac{\delta_C C\sin B}{\sin C\sin(B+C)}$.

3120. Croît à la vitesse de 444 cm²/s. 3121. De $\approx$ 2575 cm³.

3123. $dr=\frac{s}{p}\,ds+\left(\frac{1}{2}-\frac{s^2}{2p^2}\right)dp=0{,}16$ cm, i.e. environ 1 %.

3124. $e^{\sin t-2t^3}(\cos t-6t^2)$. 3125. $\sin 2t+2e^{2t}+e^t(\sin t+\cos t)$.

3126. $\frac{3-12t^2}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}$. 3127. $\frac{\partial z}{\partial u}=3u^3\sin v\cos v\,(\cos v-\sin v)$;

$\frac{\partial z}{\partial v}=u^3(\sin v+\cos v)(1-3\sin v\cos v)$.

3128. $\frac{\partial z}{\partial u}=2\frac{u}{v^2}\ln(3u-2v)+\frac{3u^2}{v^2(3u-2v)}$;

$\frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{2u^2}{v^3}\ln(3u-2v)-\frac{2u^2}{v^2(3u-2v)}$.

3129. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{e^x}{e^x+e^y}$; $\frac{du}{dx}=\frac{e^x+3e^{x^3}x^2}{e^x+e^{x^3}}$.

3130. $\frac{dz}{dx}=\frac{e^x(x+1)}{1+x^2e^{2x}}$. 3131. $\frac{du}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$.

3132. $\frac{dz}{dt}=\left(3-\frac{4}{t^3}-\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)\sec^2\left(3t+\frac{2}{t^2}-\sqrt{t}\right)$. 3133. $\frac{du}{dx}=e^{ax}\sin x$.

3134. $dz=\frac{y^2\,dx+x^2\,dy}{(x+y)^2}\operatorname{arctg}(xy+x+y)+\frac{xy\,[(y+1)\,dx+(x+1)\,dy]}{(x+y)\,[1+(xy+x+y)^2}$.

3135. $\frac{e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}}{x^2y^2}\,[(y^4-x^4+2xy^3)\,x\,dy+(x^4-y^4+2x^3y)\,y\,dx]$.

3136. $\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=2x\frac{\partial f}{\partial u}+ye^{xy}\frac{\partial f}{\partial v},\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=-2y\frac{\partial f}{\partial u}+xe^{xy}\frac{\partial f}{\partial v}\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}u&=x^2-y^2;\\ v&=e^{xy}.\end{aligned}$

3145. $\frac{3x^2y-y^3}{3xy^2-x^3}$. 3146. $\frac{x(y^2-2x^2)}{y(2y^2-x^2)}$. 3147. $\frac{ye^{xy}-ye^x-e^y}{xe^y+e^x-xe^{xy}}$.

3148. $-\frac{x}{y}\cdot\frac{2(x^2+y^2)-a^2}{2(x^2+y^2)+a^2}$. 3149. $\frac{y}{x}\cdot\frac{2x+e^{xy}-\cos xy}{\cos xy-e^{xy}-x}$.

3150. $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$. 3151. $\frac{y^2}{1-xy}$. 3152. $\frac{a^2}{(x+y)^2}$. 3153. $\frac{2y}{x(y-1)}$.

3154. $\frac{y}{y-1}$. 3155. $\frac{y^2}{x^2}\frac{\ln x-1}{\ln y-1}$.

3157. $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{x=6\\y=2}}=\frac{4}{3}$; $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{x=6\\y=8}}=-\frac{4}{3}$.

3158. $-1$. 3261. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c^2x}{a^2z}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c^2y}{b^2z}$.

3162. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2-x}{z+1}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{z+1}$.

3163. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{yz}{xy+z^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xz}{xy+z^2}$.

3164. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x(z-1)}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y(z-1)}$.

3167. $dz=-\frac{\sin 2x\,dx+\sin 2y\,dy}{\sin 2z}$. 3168. $z=\frac{x^2-y^2}{4}$.

3169. $z=\frac{3xy-x^3}{2}$. 3170. $z=k\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. 3171. $dz=\frac{x\,dx}{z}-\frac{y\,dy}{z}$.

3172. $dz=\frac{x\,dx}{a}+\frac{y\,dy}{a}$. 3173. $dz=\sqrt{z}\,(x\,dx-y\,dy)$.

3174. $2(x\,dx+y\,dy)$. 3175. $2(x\,dx+y\,dy)$.

3176. $dz=e^{-u}[(v\cos v-u\sin v)\,dx+(u\cos v+v\sin v)\,dy]$.

3185. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3186. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^3+(x^2-y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

3187. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2y}{(1+y^2)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=0$.

3188. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2a^2\cos 2(ax+by)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2b^2\cos 2(ax+by)$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=2ab\cos 2(ax+by)$.

3189. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^{xe^y+2y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x(1+xe^y)\,e^{xe^y+y}$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=(1+xe^y)\,e^{xe^y+y}$.

3190. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{4y}{(x+y)^3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{4x}{(x+y)^3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{2(x-y)}{(x+y)^3}$.

3191. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\ln y(\ln y+1)}{x^2}e^{\ln x\ln y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\ln x(\ln x-1)}{y^2}e^{\ln x\ln y}$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\ln x\ln y+1}{xy}e^{\ln x\ln y}$.

3192. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{xy^3}{\sqrt{(1-x^2y^2)^3}}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^3y}{\sqrt{(1-x^2y^2)^3}}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2y^2)^3}}$.

3193. $\frac{(x-z)\,y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2-2xz)^3}}$. 3194. $2y^3(2+xy^2)\,e^{xy^2}$.

3195. $\frac{4x(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}$. 3196. $-x(2\sin xy+xy\cos xy)$.

3197. $(x^2y^2z^2+3xyz+1)\,e^{xyz}$.

3198. $mn(n-1)(n-2)\,p(p-1)\,x^{m-1}y^{n-3}z^{p-2}$. 3204. $a=-3$.

3209. $$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3}=$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\begin{vmatrix}0 & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{vmatrix}.$$

3219. $-2y\,dx^2+4(y-x)\,dx\,dy+2x\,dy^2$. 3220. $-\frac{(dx-dy)^2}{(x-y)^2}$.

3221. $\frac{(3x^2-y^2)\,dx^2+8xy\,dx\,dy+(3y^2-x^2)\,dy^2}{(x^2+y^2)^3}$.

3222. $2\sin 2y\,dx\,dy+2x\cos 2y\,dy^2$. 3223. $e^{xy}[(y\,dx+x\,dy)^2+2\,dx\,dy]$.
3224. $2(z\,dx\,dy+y\,dx\,dz+x\,dy\,dz)$.
3225. $-\cos(2x+y)(2\,dx+dy)^3$; $(2\,dx+dy)^3$; 0.
3226. $-\sin(x+y+z)(dx+dy+dz)^2$.

3227. $-\frac{c^4}{z^3}\left[\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dx^2}{a^2}+\frac{2xy}{a^2b^2}dx\,dy+\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dy^2}{b^2}\right]$.

3228. $-\frac{2z[xy^3\,dx^2+(x^2y^2+2xyz^2-z^4)\,dx\,dy+x^3y\,dy^2]}{(z^2-xy)^3}$.

3229. $-31{,}5dx^2+206dx\,dy-306dy^2$. 3230. $\frac{d^2y}{dt^2}+y$.

3231. $y''-5y'+y$. 3232. $\frac{d^2y}{dt^2}+ay$. 3233. $y-x''$. 3234. $-\frac{x'''}{x'^5}$.

3235. $-\frac{v''+2v}{v^3}$. 3236. $\frac{d\rho}{d\varphi}=\rho$. 3237. $\frac{2\rho'^2-\rho\rho''+\rho^2}{(\rho'^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}$.

3238. $-\frac{\partial z}{\partial v}$. 3239. $\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}$.

3240. $\omega''(\rho)+\frac{1}{\rho}\omega'(\rho)+k\omega(\rho)$. 3241. $-4\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2$.

## Chapitre XI

3242. $x^3+2y^3-xy+h(3x^2-y)+k(6y^2-x)+3xh^2-hk+6yk^2+h^3+2k^3$.
3243. $\Delta z=15h^2-6hk+k^2+h^3$.

3244. $\Delta z = -2h + 7k - 4h^2 + 4hk + 2k^2 - 2h^3 - h^2k + \frac{5}{2}hk^2 + \frac{1}{4}k^3 -$

$$-h^3k + \frac{1}{2}h^2k^2 + \frac{1}{4}hk^3;\ f(1{,}02;\ 2{,}03) \approx 2{,}1726.$$

3245. $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx +$

$$+ (2Ax + Dy + Fz)h + (2By + Dx + Ez)k + (2Cz + Ey + Fx)l +$$

$$+ Ah^2 + Bk^2 + Cl^2 + Dhk + Ekl + Fhl.$$

3246. $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(y - \frac{\pi}{4}\right) -$

$$-\frac{1}{4}\left[\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left(y - \frac{\pi}{4}\right) + \left(y - \frac{\pi}{4}\right)^2\right] -$$

$$-\frac{1}{6}\left[\cos\xi\cos\eta\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + 3\sin\xi\cos\eta\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\left(y - \frac{\pi}{4}\right) +\right.$$

$$\left. + 3\cos\xi\sin\eta\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left(y - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \sin\xi\cos\eta\left(y - \frac{\pi}{4}\right)^3\right].$$

3247. $z = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2(y-1) + \ldots;\quad z_1 \approx 1{,}1021.$

3248. $e^x\left[\sin y + h\sin y + k\cos y + \frac{1}{2}(h^2\sin y + 2hk\cos y - k^2\sin y) +\right.$

$$\left. + \frac{1}{6}(h^3\sin y + 3h^2k\cos y - 3hk^2\sin y - k^3\cos y)\right] + \ldots;\ z_1 \approx 1{,}1051.$$

3249. $y + xy + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{6}y^3 + \ldots$

3250. $y + \frac{1}{2!}(2xy - y^2) + \frac{1}{3!}(3x^2y - 3xy^2 + 2y^3) + \ldots$

3251. $1 + (x+y) + \ldots + \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x - y} + \ldots$

3252*. $x - y - \frac{1}{3}(x^3 - y^3) + \frac{1}{5}(x^5 - y^5) - \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1}(x^{2n+1} - y^{2n+1}) + \ldots$

On remarquera que $\operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy} = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y$.

3253. $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^n y^m}{nm}.$

3254. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x+y)^n - x^n - y^n}{n}.$ 3255. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x^2+y^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$

3256. $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{y^{2n}}{(2n)!} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^m y^{2n}}{m!\,(2n)!}.$

3257. $z = 1 + (x-1) + \frac{1}{4}(y-1) - \frac{1}{8}(x-1)(y-1) + \frac{9}{64}(y-1)^2 + \ldots$

3259. $(0,\ 0)$, $(-5/3,\ 0)$, $(-1,\ 2)$, $(-1,\ -2)$.
3260. $(1/2,\ -1)$. 3261. $(0,\ 0)$, $(0,\ a)$, $(a,\ 0)$, $(a/3,\ a/3)$.
3262. $(0,\ 0)$, $(0,\ 2b)$, $(a,\ b)$, $(2a,\ 0)$, $(2a,\ 2b)$.
3263. $(\pi/6,\ \pi/6)$. 3264. $(b/a,\ c/a)$.
3265. $(-2/3,\ -2/3)$. 3266. $(2,\ 1,\ 7)$. 3267. $(6,\ 4,\ 10)$.

3268. $A$ et $C$ sont des points de maximum; $B$ — de minimum; au voisinage du point $D$ la surface a la forme d'une selle; la fonction est constante sur $EF$.

3269. $(-2, 0)$, $(16/7, 0)$ chaque point est stationnaire pour une branche de la fonction.

3270. $(1, 1)$, $(-1, -1)$.

3271*. $(0, 0)$. Pour s'assurer que le point trouvé est un point de maximum, il suffit de représenter la fonction sous la forme $z = 10 - (x - y)^2 - 2x^2 - y^2$.

3272. $(2, -2)$. 3273. $(-1, 1)$.

3277. Maximum au point $(6, 4)$.

3278. Pas d'extrémum au point $(0, 0)$. Minimum au point $(1, 1)$.

3279. Les extrémums sont situés sur la frontière du domaine; maximum $z = 4$ aux points $(2, 0)$ et $(-2, 0)$; minimum $z = -4$ aux points $(0, 2)$ et $(0, -2)$. Le point stationnaire $(0, 0)$ n'est pas un point d'extrémum.

3280. Maximum $z = 17$ au point $(1, 2)$; minimum $z = -3$ au point $(1, 0)$; le point stationnaire $(-4, 6)$ est situé à l'extérieur du domaine donné.

3281. Maximum $z = 4$ au point stationnaire $(2, 1)$ (ce point est donc un point de maximum). Minimum $z = -64$ au point frontière $(4, 2)$.

3282. Minimum $z = 0$ au point $(0, 0)$. Maximum $z = 3/e$ aux points $(0, \pm 1)$.

3283. Maximum $z = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ au point $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$; minimum $z=0$ au point frontière $(0, 0)$.

3284. Tous les termes sont égaux entre eux.

3285. Tous les facteurs sont égaux entre eux.

3286. $\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$. 3287. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=3$.

3288. $x=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}$, $y=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n}$.

3289. $(3, \sqrt{39}, 0)$; $(3, -\sqrt{39}, 0)$.

3290. Un cube. 3291. Minimum $z = 2$ au point $(1, 1)$.

3292. Maximum $z = a^2$ au point $(a, a)$ ou $(-a, -a)$; minimum $z = -a^2$ au point $(a, -a)$ ou $(-a, a)$.

3293. Minimum $z = -\sqrt{2}/a$ au point $(-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2})$, maximum $z = \sqrt{2}/a$ au point $(a\sqrt{2}, a\sqrt{2})$.

3294. Points stationnaires $x = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg} b/a$, $y = 1/2 \operatorname{arctg} a/b$.

3295. Minimum $u = 9$ au point $(3, 3, 3)$.

3296. Deux variables sont égales à 2, la troisième à 1 (minimum égal à 4); deux variables sont égales chacune à $\frac{4}{3}$, la troisième à $\frac{7}{3}$ $\left(\text{maximum égal à } \frac{112}{27}\right)$.

3297*. Chercher le minimum de la fonction $\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}$ pour $x_1+x_2+\ldots+x_n=A$. En général on a la relation $\frac{\sum x_i^k}{n} \geqslant \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^k$ si $k \geqslant 1$ et $x_i \geqslant 0$.

3299. $u_{\min}=\frac{abc}{bc+ca+ab}$ pour $x=\frac{bc}{bc+ca+ab}$; $y=\frac{ac}{bc+ac+ab}$;

$z=\frac{ab}{bc+ac+ab}$. 3300. $u_{\max}=1$, $u_{\min}=-\frac{1}{2}$. 3301. $\left(\frac{21}{13}, 2, \frac{63}{26}\right)$.

3302. (3, —1, 1).

3303. a) (—2, 0, 0); b) (2, 0, 0). 3304. Le cube. 3305. Le cube. 3306. $\frac{8abc}{3\sqrt{3}}$.

3307. Si $R$ est le rayon de base de la tente, $H$ la hauteur de la partie cylindrique, $h$ la hauteur de la coiffe conique, on doit avoir les relations suivantes:

$$R=\frac{h\sqrt{5}}{2}, \qquad H=\frac{h}{2}.$$

3308. Si $l$ est le côté latéral du trapèze, $b$ la base et $\alpha$ la pente du côté latéral, on doit avoir les relations suivantes: $i = b = \frac{2\sqrt{A}}{\sqrt[4]{3^3}}$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$ où $A$ est l'aire de la section donnée. La surface mouillée est $u = 2\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{A} \approx \approx 2{,}632\sqrt{A}$.

3309. Le cube. 3310. La base est carrée et de côté $2\alpha + \sqrt[3]{2v}$, la hauteur est égale à la moitié du côté: $\left(\alpha + \frac{1}{2}\sqrt[3]{2v}\right)$.

3311. $a^3$ (le cube). 3312. L'aire minimale est égale à $3\sqrt{3}\,ab$.

3313. $\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$ et $\left(-\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{3}{\sqrt{5}}\right)$. 3314. $\left(-\frac{15}{9}, -\frac{1}{9}\right)$.

3315. (3, 5). 3316. $z_{max} = 2$.

3317. Les côtés du triangle $\sqrt{2S}$, $\sqrt{2S}$ et $2\sqrt{S}$.

3318. Hauteur $\frac{H}{3}$, côtés de la base $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$ et $\frac{2b\sqrt{2}}{3}$, volume $V=\frac{8}{27}abH$.

3319. Le tétraèdre.

3320. La normale à l'ellipse au point cherché doit être perpendiculaire à la droite joignant les deux points donnés.

3321. Mener la normale au point de coordonnées

$$\left(\pm a\sqrt{\frac{a}{a+b}}, \ \pm b\sqrt{\frac{b}{a+b}}\right).$$

3322. $\left(9, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right)$; $\left(-9, -\frac{1}{8}, -\frac{3}{8}\right)$. 3323. $2\sqrt{2}$.

3324. $x + y = 2$; $y = x$. 3325. $x - y + a = 0$; $x + y - 3a = 0$.

3326. $x + 2y - 1 = 0$; $2x - y - 2 = 0$.

3327. $x - y + 2 = 0$; $x + y - 2 = 0$. 3328. (0, 0). 3329. (0, 0).

3330. (0, 0). 3331. $(a, 0)$. 3332. $(0, a)$, $(0, -a)$, $(a, 0)$, $(-a, 0)$.

3333. (2, 0), (—2, 0). 3334. (0, 3), (—3, 0), (—6, 3).

3335. (0, 0) — point double. 3336. (0, 0) — point isolé.

3337. (0, 0) — point d'arrêt.

3338. $k\pi$; $k = 0, 1, 2, \ldots$ — points de rebroussement.

3339. $(a, 0)$ — point de rebroussement. 3340. (0, 0).

3341. $x = -f'(a)$, $y = f(a) - af'(a)$; $y = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$.

3342. $16y^3 + 27x^4 = 0$. 3343. $y^2 = 4ax$. 3344. $y = x/2$ et $y = -x/2$.

3345. $y = -x^4/4$. 3346. $y = 0$ et $16y = x^4$.

3347. $y = x$ et $y = x - 4/27$. La première est le lieu géométrique des points singuliers, la seconde — l'enveloppe.

3348. $x^2+\frac{2}{3\sqrt{3}}y^2=0$ et $x^2-\frac{2}{3\sqrt{3}}y^3=0$.

3349. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = d^{\frac{2}{3}}$. 3350. Les 4 droites $x \pm \cdot = \pm R$.

3351. $2by(x^2 + y^2) + x^2 = 0$.

3352. La parabole $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$.

3353. La cycloïde $x=\frac{R}{2}(t-\sin t)$, $y=\frac{R}{2}(1-\cos t)$.

3354. L'ellipse $x^2+\frac{y^2}{2}=R^2$. 3355. L'hyperbole $xy=\frac{a}{4}$.

3357. La développée de la parabole $y^2=\frac{8}{27p}(x-p)^3$.

3359. Les hyperboles $xy=\frac{1}{2}$ et $xy=-\frac{1}{2}$.

3361. a) $2r\cdot\frac{dr}{dt}=2|r|\cdot\frac{d|r|}{dt}$; b) $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r\frac{d^2r}{dt^2}$;

c) $r\times\frac{d^2r}{dt^2}$; d) $\left(r\,\frac{dr}{dt}\,\frac{d^3r}{dt^3}\right)$.

3362. L'égalité $\frac{dr}{dt}=\alpha(t)\,r$ entraîne :

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{d\alpha}{dt}r+\alpha\frac{dr}{dt}=\left(\frac{d\alpha}{dt}+\alpha^2\right)r=\beta(t)\cdot r,\ \text{etc.}$$

3363. Une dérivation de l'égalité $r^2=\text{const}$ (voir exercice 3361) donne: $r\cdot\frac{dr}{dt}=0$. La tangente à la courbe sphérique (i.e. à la courbe située sur la sphère) est perpendiculaire au rayon de la sphère qui aboutit au point de contact. La réciproque est également vraie.

3368. $\frac{dr}{dx}=\frac{dr}{du}\varphi'$; $\frac{d^2r}{dx^2}=\frac{d^2r}{du^2}\varphi'^2+\frac{dr}{du}\varphi''$;

$$\frac{d^3r}{dx^3}=\frac{d^3r}{du^3}\varphi'^3+3\frac{d^2r}{du^2}\varphi'\varphi''+\frac{dr}{du}\varphi'''.$$

3370. L'égalité $a\frac{dr(\tau)}{dt}=0$, où $t_1<\tau<t_2$, entraîne que sur la courbe fermée (en vertu de l'égalité $r(t_1)=r(t_2)$) il existe un point en lequel la tangente est perpendiculaire à toute direction donnée à l'avance.

3371. L'hodographe de la vitesse $v\{a\cos t,\ a\sin t,\ 2bt\}$ est une spirale; l'hodographe de l'accélération $w\{-a\sin t,\ a\cos t,\ 2b\}$ est une circonférence.

3372. Le produit scalaire de $a$ par $r$ donne: $a\frac{dr}{dt}=0$, $r\frac{dr}{dt}=0$. D'où il vient $ar=\text{const}$ est l'équation d'un plan et $r^2=\text{const}$ celle d'une sphère. La trajectoire cherchée est une circonférence dont le plan est perpendiculaire au vecteur $a$.

3374. Une ellipse. La vitesse sera maximale au moment où le point matériel sera à l'extrémité du petit axe et minimale au moment où il se trouvera à l'extrémité du grand axe. L'accélération sera maximale (resp. minimale) au moment où la vitesse sera minimale (resp. maximale).

3375. Composantes de la vitesse $\frac{d\rho}{dt}$; $\rho\frac{d\varphi}{dt}$; $\rho\sin\varphi\frac{d\theta}{dt}$. *Indication.* Trouver les produits scalaires $\frac{dr}{dt}e_\rho$; $\frac{dr}{dt}e_\varphi$; $\frac{dr}{dt}e_\theta$.

3376. $\frac{x-\frac{t^4}{4}}{t^2}=\frac{y-\frac{t^3}{3}}{t}=\frac{z-\frac{t^2}{2}}{1}$; $t^2x+ty+z=\frac{t^6}{4}+\frac{t^4}{3}+\frac{t^2}{2}$.

3377. $\dfrac{x-\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{-a\sqrt{2}}=\dfrac{y-\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}}=\dfrac{z-\dfrac{k}{8}}{\dfrac{k}{\pi}}$; $-x+y+\dfrac{k}{\pi a\sqrt{2}}z=\dfrac{k^2}{8\pi a\sqrt{2}}$.

3378. $x-6a=\dfrac{y-18a}{6}=\dfrac{z-72a}{36}$; $x+6y+36z=2706a$.

3379. $\dfrac{x-\dfrac{\pi}{2}+1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$; $x+y+\sqrt{2}\cdot z=\dfrac{\pi}{2}+4$.

3380. $\dfrac{x-1}{12}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z-4}{3}$; $12x-4y+3z-12=0$.

3381. $\dfrac{x+2}{27}=\dfrac{y-1}{28}=\dfrac{z-6}{4}$; $27x+28y+4z+2=0$.

3382. $\dfrac{x-x_0}{z_0}=\dfrac{y-y_0}{z_0}=\dfrac{z-z_0}{y_0+x_0}$; $\dfrac{x+y}{x_0+y_0}+\dfrac{z}{z_0}=2$.

3383. $\dfrac{x-x_0}{y_0^2z_0^2}=\dfrac{y-y_0}{x_0^2z_0^2}=\dfrac{z-z_0}{-x_0^2y_0^2}$; $\dfrac{x-x_0}{x_0^2}+\dfrac{y-y_0}{y_0^2}-\dfrac{z-z_0}{z_0^2}=0$.

3384. $r_0\left\{\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2},\ e^{\frac{\pi}{6}}\right\}$.

3385. $6x-8y-z+3=0$; $\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y-1}{-8}=\dfrac{z-1}{-1}$;

$\dfrac{x-1}{31}=\dfrac{y-1}{26}=\dfrac{z-1}{-22}$.

3386. $\sqrt{b}(x-x_0)-\sqrt{a}(y-y_0)=0$; $\dfrac{x-x_0}{\sqrt{b}}=\dfrac{y-y_0}{-\sqrt{a}}=\dfrac{z-z_0}{0}$;

$\dfrac{x-x_0}{\sqrt{2az_0}}=\dfrac{y-y_0}{\sqrt{2bz_0}}=\dfrac{z-z_0}{-(a+b)}$. 3387. $\dfrac{1}{e}x-ey-\sqrt{2}z+2=0$;

$\dfrac{x-e}{-\dfrac{1}{e}}=\dfrac{y-\dfrac{1}{e}}{e}\ \dfrac{z-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$; $\dfrac{x-e}{1}=\dfrac{y-\dfrac{1}{e}}{1}=\dfrac{z-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}\,\mathrm{sh}\,1}$.

3389. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{3}$; $2x-y+3z-5=0$; $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{-1}$;

$3x+3y-z-2=0$; $\dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y}{-11}=\dfrac{z-1}{-9}$; $8x-11y-9z+1=0$.

3390. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{0}$; $x-y=0$; $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z-1}{1}$;

$z=1$; $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{0}$: $x+y-2=0$.

3391. $\dfrac{x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\dfrac{y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{-\sqrt{2}}=\dfrac{z-1}{4}$; $\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+4z=4$; $\dfrac{x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}}=$

$=\dfrac{y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{3\sqrt{2}}=\dfrac{z-1}{1}$; $\sqrt{2}x+3\sqrt{2}y+z-5=0$; $\dfrac{x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{13}=\dfrac{y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{-3}=$

$=\dfrac{z-1}{-4\sqrt{2}}$; $-13x+3y+4\sqrt{2}z+\sqrt{2}=0$.

3392. $\frac{x+1}{2}=\frac{y-13}{3}=\frac{z}{6}$; $2x+3y+6z=37$; $\frac{x+1}{6}=\frac{y-13}{2}=\frac{z}{-3}$; $6x+2y-3z=20$; $\frac{x+1}{3}=\frac{y-13}{-6}=\frac{z}{2}$; $3x-6y+2z=-81$.

3393. Pour tout point de la courbe l'équation du plan osculateur est $3x-2y-11=0$, i.e. la courbe est entièrement contenue dans ce plan.

3394. Le plan osculateur est le même pour tous les points de la courbe. Il a pour équation:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

3395. $\frac{\operatorname{ch}^2 t}{\operatorname{sh} t}$. 3396. $R=\sqrt{2}\operatorname{cosec} 2t$.

3398. $k=\sqrt{\frac{(y'z''-z'y'')^2+y''^2+z''^2}{(1+y'^2+z'^2)^3}}$.

3399. $\tau_1=\frac{r'}{|r'|}$, $\beta_1=\frac{r'\times r''}{|r'\times r''|}$, $\nu_1=\frac{(r'\times r'')\times r'}{|r'|\cdot|r'\times r''|}$.

3400. $\tau_1=\nu_1\times\beta_1$; $\nu_1=\beta_1\times\tau_1$; $\beta_1=\tau_1\times\nu_1$.

3401. Le vecteur $\omega$ cherché (s'il existe) peut être mis sous la forme

$$\omega=(\omega\tau_1)\tau_1+(\omega\nu_1)\nu_1+(\omega\beta_1)\beta_1. \qquad (1)$$

On a par hypothèse (et compte tenu de la formule de Fresnel)

$$\omega\times\tau_1=k\nu_1; \quad \omega\times\nu_1=-k\tau_1+T\beta_1; \quad \omega\times\beta_1=-T\nu_1. \qquad (2)$$

En multipliant scalairement ces égalités par $\nu_1$, $\beta_1$, $\tau_1$ respectivement, on obtient $\omega\tau_1=T$, $\omega\nu_1=0$, $\omega\beta_1=k$, d'où $\omega=T\tau_1+k\beta_1$. En portant ce vecteur dans la formule (2) on constate qu'il remplit les conditions du problème.

3402. $99+\ln 10\approx 101{,}43$. 3403. $a\ln(1+\sqrt{2})=a\ln\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$.

3404. $\sqrt{3}(e^t-1)$. 3405. 5. 3406. $4a$. 3407. $z\sqrt{2}$.

3408. $a\ln\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{x}}{\sqrt{2a}-\sqrt{x}}$. 3409. $\frac{a}{2}\left(1+\frac{1}{2}\ln 3\right)$.

3410. $8x-8y-z=4$; $\frac{x-2}{8}=\frac{y-1}{-8}=\frac{z-4}{-1}$.

3411. $x+y-z-1=0$; $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-1}$.

3412. $z+a=0$, $x=a$, $y=a$. 3413. $17x+11y+5z=60$; $\frac{x-3}{17}=\frac{y-4}{11}=\frac{z+7}{5}$. 3414. $x-y+2z-\frac{\pi}{2}=0$: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-\frac{\pi}{2}}{2}$.

3415. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\sqrt{3}$; $a\left(x-\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)=b\left(y-\frac{b\sqrt{3}}{3}\right)=c\left(z-\frac{c\sqrt{3}}{3}\right)$.

3416. $x+11y+5z-18=0$; $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{11}=\frac{z+1}{5}$.

3417. $3x-2y-2z+1=0$; $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{-2}$.

3418. $2x+y+11z-25=0$; $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{11}$.

3419. $5x+4y+z-28=0$; $\frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-6}{1}$.

3421. $x-y+2z=\sqrt{\frac{11}{2}}$ et $x-y+2z=-\sqrt{\frac{11}{2}}$.

3422. $x+y+z=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

3424. Tous les plans passent par l'origine des coordonnées.

3425. $x_0x+y_0y+z_0z=a^2$; $\frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z}{z_0}$.

3426. $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=2(z+z_0)$; $\frac{a(x-x_0)}{bx_0}=-\frac{b(y-y_0)}{ay_0}=\frac{z-z_0}{-2ab}$.

3428. $\frac{9}{2}a^2$. 3430. $2x+y-z=2$. 3434. $4x-2y-3z=3$.

3435. Deux plans sont tangents au plan $xOy$ aux points (0, 3, 3) et (0, 3, —7); deux autres au plan $yOz$ aux points (5, 3, —2) et (—5, 3, —2) et, enfin, deux autres au plan $xOz$ aux points (0, —2, —2) et (0, 8, —2).

3436. a) $6u_0v_0x-3(u_0+v_0)y+2z+(u_0+v_0)(u_0^2-4u_0v_0+v_0^2)=0$;
b) $3(x_0^2-y_0)x-3x_0(y+y_0)+2z+4z_0=0$.

3437. $2z(x^2+y^2+z^2)+p(x^2+y^2)=0$.

3438. $(x^2+y^2+z^2)^3=27a^3xyz$.

3439. 1) $\{-2, 1\}$; 2) $\{10xy-3y^3, 5x^2-9xy^2+4y^3\}$.

3440. 1) $6\mathbf{i}+4\mathbf{j}$; 2) $\frac{1}{3}(2\mathbf{i}+\mathbf{j})$; 3) $\frac{-y_0\mathbf{i}+x_0\mathbf{j}}{x_0^2+y_0^2}$.

3441. 1) $\operatorname{tg}\varphi\approx 0{,}342$, $\varphi\approx 18°52'$; 2) $\operatorname{tg}\varphi\approx 4{,}87$, $\varphi\approx 78°24'$.

3442. Le demi-axe négatif $y$. 3443. 1) $\cos\alpha\approx 0{,}99$, $\alpha=8°$;
2) $\cos\alpha\approx -0{,}199$, $\alpha\approx 101°30'$. 3444. 1) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right)$; $\left(\frac{7}{3}; -\frac{3}{4}\right)$;
2) $x^2+y^2=\frac{2}{3}$.

3447. 1) $\{3x_0^2y_0^2z_0, 2x_0^3y_0z_0, x_0^3y_0^2\}$;
2) $\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$, où $\mathbf{r}$ est un rayon vecteur.

3450. 1) $2\mathbf{r}$, 2) $2\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$; 3) $2F'(r^2)\mathbf{r}$; 4) $\mathbf{a}(\mathbf{b}\mathbf{r})+\mathbf{b}(\mathbf{a}\mathbf{r})$; 5) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.

3451. 1) 0; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $-\sqrt{5}$; 4) $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{2}$. 3452. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

3453. $\frac{1}{2}$. 3455. 1) 5; 2) $\frac{98}{13}$. 3456. —22. 3459. $\frac{1}{r^2}$.

## Chapitre XII

3460. $M=\iint\limits_D \gamma(x, y)\,d\sigma$. 3461. $E=\iint\limits_D \sigma(x, y)\,d\sigma$.

3462. $T=\frac{1}{2}\omega^2\iint\limits_D y^2\gamma(x, y)\,d\sigma$.

3463. $Q=(t_2-t_1)\iint\limits_D c(x, y)\gamma(x, y)\,d\sigma$.

3464. $M=\int\int\int\limits_{\Omega}\gamma(x, y, z)\,dv$. 3465. $E=\int\int\int\limits_{\Omega}\delta(x, y, z)\,dv$.

3466. $8\pi(5-\sqrt{2})<I<8\pi(5+\sqrt{2})$.

3467. $36\pi<I<100\pi$.

3468. $2<I<8$. 3469. $-8<I<\frac{2}{3}$. 3470. $0<I<64$.

3471. $4<I<36$. 3472. $4<I<8(5-2\sqrt{2})$. 3473. $4\pi<I<22\pi$.

3474. $0<I<\frac{4}{3}\pi R^5$. 3475. $24<I<72$.

3476. $28\pi\sqrt{3}<I<52\pi\sqrt{3}$. 3477. 1. 3478. $(e-1)^2$.

3479. $\frac{\pi}{12}$. 3480. $\ln\frac{4}{3}$. 3481. $\ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$.

3482. $\pi-2$. 3483. 2. 3484. $-\frac{\pi}{16}$.

3485. $\int\limits_{3}^{5}dx\int\limits_{\frac{3x+1}{2}}^{\frac{3x+4}{2}}f(x, y)\,dy$. 3486. $\int\limits^{2}dx\int\limits_{0}^{2-x}f(x, y)\,dy$.

3487. $\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}}f(x, y)\,dy$. 3488. $\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{x-1}^{1-x}f(x, y)\,dy$.

3489. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}dx\int\limits_{x^2}^{4-x^2}f(x, y)\,dy$. 3490. $\int\limits_{-2}^{2}dx\int\limits_{-\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}}f(x, y)\,dy$.

3491. $\int\limits_{0}^{4}dx\int\limits_{-2\sqrt{4x-x^2}}^{3+\sqrt{4x-x^2}}f(x, y)\,dy$. 3492. $\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}}f(x, y)\,dy$.

3493. $\int\limits_{0}^{2}dx\int\limits_{x}^{2x}f(x, y)\,dy+\int\limits_{2}^{3}dx\int\limits_{x}^{6-x}f(x, y)\,dy$.

3494. $\int\limits_{-\frac{2}{3}}^{\frac{1}{3}}dx\int\limits_{1-2x}^{x+3}f(x, y)\,dy+\int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}dx\int\limits_{x}^{x+3}f(x, y)\,dy+\int\limits_{\frac{2}{3}}^{\frac{5}{3}}dx\int\limits_{x}^{5-2x}f(x, y)\,dy$.

3495. $\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{\frac{x}{2}}^{2x}f(x, y)\,dy+\int\limits_{1}^{2}dx\int\limits_{\frac{x}{2}}^{\frac{2}{x}}f(x, y)\,dy$.

3496. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-2\sqrt{2x}}^{2x} f(x, y)\,dy + \int\limits_2^{\frac{9}{2}} dx \int\limits_{-2\sqrt{2x}}^{2\sqrt{2x}} f(x, y)\,dy +$

$$+ \int\limits_{\frac{9}{2}}^{8} dx \int\limits_{-2\sqrt{2x}}^{24-4x} f(x, y)\,dy.$$

3497. $\int\limits_{-3}^{-2} dx \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y)\,dy + \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x, y)\,dy +$

$$+ \int\limits_{2}^{3} dx \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y)\,dy.$$

3498. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} f(x, y)\,dy.$ 3499. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx.$

3500. $\int\limits_0^r dy \int\limits_{r-\sqrt{r^2-y^2}}^{y} f(x, y)\,dx.$ 3501. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} f(x, y)\,dx.$

3502. $\int\limits_1^2 dy \int\limits_1^y f(x, y)\,dx + \int\limits_2^4 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{2} f(x, y)\,dx.$

3503. $\int\limits_0^4 dy \int\limits_0^{\frac{y}{2}} f(x, y)\,dx + \int\limits_4^6 dy \int\limits_0^{6-y} f(x, y)\,dx.$

3504. 1) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{2-y} f(x, y)\,dx$; 2) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x, y)\,dx$;

3) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^{\frac{3}{2}}}^{2-\sqrt{2y-y^2}} f(x, y)\,dx.$

3505. 1) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{2y} f(x, y)\,dx + \int\limits_2^4 dy \int\limits_{2y-3}^{\frac{y+6}{2}} f(x, y)\,dx$;

2) $\int\limits_1^3 dy \int\limits_{\frac{y+1}{2}}^{\frac{9-y}{2}} f(x, y)\,dx.$

3) $\int\limits_{-1}^{3} dx \int\limits_{0}^{1+\sqrt{3+2x-x^2}} f(x, y)\, dy$;

4) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{1-\sqrt{1-y^2}}^{3+\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\, dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{2-\sqrt{2y-y^2}}^{2+\sqrt{2y-y^2}} f(x, y)\, dx$.

3506. 1) $\frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}}$; 2) 9; 3) $\frac{1}{2}$. 3507. 0.

3508. $\frac{33}{140}$. 3509. $\frac{9}{4}$. 3510. $-2$. 3511. $\frac{\pi}{6}$.

3512. $\frac{4}{135}$. 3513. 4. 3514. 3. 3515. $12\frac{2}{3}$.

3516. $\frac{2}{3} R$. 3517. 6. 3518. $\frac{abc(a+b+c)}{2}$.

3519. $\frac{a^6}{48}$. 3520. $\frac{a^{11}}{110}$. 3521. $2e-5$.

3522. $\frac{1}{2}\left(\ln 2 - \frac{5}{8}\right)$. 3523. $\frac{1}{180}$. 3524. $\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$.

3525. 1) $\int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{R} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\, \rho\, d\rho$;

2) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{a\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\, \rho\, d\rho$;

3) $\int\limits_{0}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{b\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\, \rho\, d\rho$.

3526. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} 2} d\varphi \int\limits_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\, \rho\, d\rho$.

3527. $\int\limits_{0}^{\operatorname{arctg}\frac{a}{b}} d\varphi \int\limits^{b\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\, \rho\, d\rho +$

$$+ \int\limits_{\operatorname{arctg}\frac{a}{b}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{a\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\, \rho\, d\rho.$$

3528. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{0}^{\sec\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\, \rho\, d\rho$.

3529. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{\sqrt{2}\sec\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)}^{2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho.$

3530. $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho.$

3531. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\sin 2\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho.$

3532. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{R} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho.$

3533. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{\frac{R}{2\sin\varphi}}^{2R\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho.$

3534. $\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{R} f(\rho^2)\,\rho\,d\rho.$ 3535. $\frac{R^2}{2}\int\limits_0^{\operatorname{arctg} R} f(\operatorname{tg}\varphi)\,d\varphi.$

3536. $\frac{\pi}{4}[(1+R^2)\ln(1+R^2)-R^2].$

3537. $\frac{\pi(\pi-2)}{8}.$ 3538. $\pi R^2 h.$

3539. $\frac{R^3}{3}\left(\pi-\frac{4}{3}\right).$ 3540. $\frac{\pi^2}{6}.$

3542. $x=2\rho\cos\varphi,\ y=3\rho\sin\varphi;\ I=6\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{1} f(2\rho\cos\varphi, 3\rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho.$

3543. $x=\rho\cos\varphi,\ y=\sqrt{3}\rho\sin\varphi;$

$$I=\sqrt{3}\int\limits_0^{\pi} d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{3}\cos^2\varphi\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi, \sqrt{3}\rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho.$$

3544. $x=a\rho\cos\varphi,\quad y=b\rho\sin\varphi;\quad I=ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int\limits_1^{2} f\left(\sqrt{4-\rho^2}\right)\rho\,d\rho.$

3545. $\frac{a^2b^2}{8}.$ 3546. $\frac{1}{\sqrt[4]{6}}.$

3547. $\int\limits_0^1 dz \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_0^R f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,\rho\,d\rho.$

3548. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho\,d\rho \int\limits_0^{\rho^2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,dz.$

3549. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\,d\theta \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^R f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\,\rho^2\,d\rho.$

3550. $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{R\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho\,d\rho \int\limits_{-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{\sqrt{R^2-\rho^2}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,dz.$

3551. $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{R\sqrt{3}}{2}} \rho\,d\rho \int\limits_{R-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{\sqrt{R^2-\rho^2}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,dz$ or

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\theta\,d\theta \int\limits_0^R f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\,\rho^2\,d\rho +$$

$$+\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\,d\theta \int\limits_0^{2R\cos\theta} f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\,\rho^2\,d\rho.$$

3552. $\frac{\pi a}{2}$. 3553. $\frac{8}{9}a^2$. 3554. $\frac{4}{15}\pi R^5$. 3555. $\frac{\pi}{8}$.

3556. $\frac{4}{15}\pi(R^5-r^5)$. 3557. $\frac{2\pi}{3}$.

3558. $\pi\left[3\sqrt{10}+\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{10}-3}-\sqrt{2}-8\right]$.

3559. $186\frac{2}{3}$. 3560. $\frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{p}+\frac{b^2}{q}\right)$.

3561. $\frac{abc}{6}$. 3562. 12. 3563. $\frac{1}{6}$. 3564. $78\frac{15}{32}$.

3565. $\frac{48}{5}\sqrt{6}$. 3566. 16. 3567. 45. 3568. $13\frac{1}{3}$.

3569. $16\frac{1}{5}$. 3570. $ar^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\right)$. 3571. $22\pi$.

3572. $\frac{16}{3}R^3$. 3573. $12\frac{4}{21}$. 3574. $\frac{4R^5}{15a^2}$. 3575. 27.

3576. $\frac{3}{8}$. 3577. $\frac{88}{105}$. 3578. $\frac{1}{3}abc$. 3579. $\frac{\pi a^3}{4}$.

3580. $2\left(e^2-\frac{2e^3+1}{9}\right)$. 3581. $3e-8$.

3582*. $4e-e^2-1$. Le solide est symétrique par rapport au plan $y=x$.

3583. $2\left(\pi^2-\frac{35}{9}\right)$. 3584. $\frac{1}{45}$.

3585. $\frac{16}{9}$. 3586. $\frac{\pi}{4}$. 3587. $40\pi$. 3588. $2\pi$.

3589. $\frac{5}{2}\pi R^3$. 3590. $\frac{3}{2}\pi a^3$. 3591. $\frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$. 3592. $\frac{a^3}{24}$.

3593. $\frac{15}{8}\left(\frac{3\pi}{8}+1\right)$. 3594. $\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$. 3595. $\frac{\pi\sqrt{2}}{24}$.

3596. $\frac{\pi^2R^2h}{16}$. 3597. $\frac{1}{2}$. 3598. 2. 3599. $\pi ab$.

3600. $\frac{ab}{6}$. 3601. $\frac{16}{3}$. 3602*. $\frac{5}{8}\pi a^2$. Passer aux coordonnées polaires.

3603. $\frac{3}{4}\pi$. 3604. $2a^2$. 3605. $\frac{2}{3}$. 3606. $\frac{1}{60}$.

3607. $\frac{1}{1260}$. 3608*. 1) $\frac{a^2b^2}{2c^2}$; 2) $\frac{39}{25}\pi$. Se servir du résultat de l'exercice 3541. 3609. 8. 3610. $\frac{7}{12}$.

3611. $\frac{3}{35}$. 3612. $4(4-3\ln 3)$. 3613*. $\frac{\pi}{2}$. La projection du corps sur le plan $Oxy$ est un cercle.

3614. $\frac{\pi}{8}$. Transporter l'origine des coordonnées en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$.

3615*. $\frac{19}{6}\pi$ et $\frac{15}{2}\pi$. Passer aux coordonnées cylindriques.

3616. $\frac{5}{12}\pi R^3$. 3617. $\frac{\pi}{96}$. 3618. $\frac{92}{75}\pi R^3$.

3619*. $\frac{1}{3}\pi a^3$. Passer aux coordonnées sphériques.

3620. $\frac{a^3}{360}$. 3621. $\frac{4}{21}\pi a^3$. 3622. $\frac{4}{3}\pi a^3$.

3623. $\frac{64}{105}\pi a^3$. 3624. $\frac{\pi^2a^3}{6}$.

3625. $\frac{21(2-\sqrt{2})}{4}\pi$. 3626. 14. 3627. 36. 3628. $8\pi$.

3629. $2\sqrt{2}\pi p^2$. 3630*. $2\pi R^2$. Projeter la surface sur le plan $Oyz$.

3631. $8\sqrt{2}ab$. 3632. $\frac{16}{3}(\sqrt{8}-1)$. 3633. $\frac{2\pi}{3}\{(1+R^2)^{\frac{3}{2}}-1\}$.

3634. $\frac{2\pi}{3}(\sqrt{8}-1)$. 3635. $4\pi a\left(a-\sqrt{a^2-R^2}\right)$.

3636. $2R^2(\pi-2)$. 3637. $2R^2(\pi+4-4\sqrt{2})$.

3638. $\frac{\pi}{4}\left\{3\sqrt{2}-\sqrt{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 2+\sqrt{2}\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})\right\}$. 3639. $\frac{2a^2}{\sin 2\alpha}$.

3640*. $\frac{\pi R^2}{12}(\sqrt{3}-\sqrt{2})\approx 3{,}42\cdot 10^8$ km$^2$. Passer aux coordonnées sphériques.

3641. $\frac{16}{3}\pi a^2$. 3642. $8R^2$. 3643. $\frac{ab^2}{2}$.

3644. $\frac{2}{3}R^3$. 3645. $\pi R^3$. 3646. $\frac{9}{4}a^3$.

3647. Le moment statique est égal à $\frac{ah^2}{6}$.

3648. Le centre de gravité se trouve sur le petit axe à une distance $\frac{4b}{3\pi}$ du grand axe ($b$ désigne le petit axe).

3649. $\xi=\left(1-\frac{\pi}{4}\right)(\sqrt{2}+1)$, $\eta=\frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)(2+\sqrt{2})$.

3650. Le centre de gravité se trouve sur la bissectrice de l'angle $\alpha$ à une distance $\frac{4}{3}R\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha}$ du centre du cercle.

3651. Le centre de gravité se trouve sur la bissectrice de l'angle $\alpha$ à une distance $\frac{4}{3}R\frac{\sin^3\frac{\alpha}{2}}{\alpha-\sin\alpha}\alpha$ du centre du cercle.

3652. $\xi=\frac{3\pi}{16}$, $\eta=0$. 3653. $\frac{5}{4}\pi R^4$. 3654. $\frac{2}{3}a^4$.

3655. $\frac{\pi ab}{4}(a^2+b^2)$. 3656. $\frac{ab(a^2+b^2)}{12}$.

3657. $\frac{ah}{48}(a^2+12h^2)$. 3658. $\frac{3\pi R^4}{2}$. 3659. $ah\left(\frac{2h^2}{7}+\frac{a^2}{30}\right)$.

3662*. Choisir le système de coordonnées tel que son origine se confonde avec le centre de gravité de la figure et un axe de coordonnées soit parallèle à l'axe par rapport auquel on calcule le moment d'inertie.

3663. $\frac{a^2bc}{2}$, $\frac{ab^2c}{2}$ et $\frac{abc^2}{2}$. 3664. $\frac{\pi R^2H^2}{4}$.

3665. $\frac{\pi abc^2}{4}$. 3666. $\xi=\frac{14}{15}$, $\eta=\frac{26}{15}$, $\zeta=\frac{8}{3}$.

3667. $\xi=\frac{3}{8}a$, $\eta=\frac{3}{8}b$, $\zeta=\frac{3}{8}c$. 3668. $\xi=\frac{6}{5}$, $\eta=\frac{12}{5}$, $\zeta=\frac{8}{5}$.

3669. $\xi=\frac{18}{7}$, $\eta=\frac{15}{16}\sqrt{6}$, $\zeta=\frac{12}{7}$.

3670. $\xi=0$, $\eta=0$, $\zeta=\frac{5a}{83}(6\sqrt{3}+5)$.

3671. $\xi=0$, $\eta=0$, $\zeta=\frac{3R}{8}(1+\cos\alpha)$.

3672. $\xi=0$, $\eta=0$, $\zeta=\frac{9a}{20}$.

3673. $\xi=\frac{R}{2}$, $\eta=\frac{R}{2}$, $\zeta=\frac{R}{2}$.

3674. $\xi=0$, $\eta=0$, $\zeta=\frac{55+9\sqrt{3}}{130}$.

3675. $\frac{1}{3}M(b^2+c^2)$, $\frac{1}{3}M(c^2+a^2)$, $\frac{1}{3}M(a^2+b^2)$ et $\frac{1}{12}M(a^2+b^2+c^2)$.

3676. $\frac{7}{5}MR^2$. 3677. $\frac{1}{5}M(b^2+c^2)$, $\frac{1}{5}M(c^2+a^2)$, $\frac{1}{5}M(a^2+b^2)$.

3678. $M\left(\frac{R^2}{4}+\frac{H^2}{3}\right)$ et $\frac{M}{12}(H^2+3R^2)$.

3679. $\frac{2}{5}M\frac{R^5-r^5}{R^3-r^3}$. 3680. $\frac{1}{36}\pi R^2H(3R^2+H^2)$. 3681. $\frac{1}{2}M\left(R^2+\frac{1}{6}H^2\right)$.

3682. $\frac{55+9\sqrt{3}}{65}Mc^2$. 3683. $\frac{M}{2}(R^2+r^2)$. 3684. $\frac{4}{3}a^2$.

3685. $2\pi r(R-r)$. 3686. $\frac{4}{3}\gamma ab^2$.

3687. $2\pi\gamma(R^2-r^2)$. 3688. $\frac{\pi R^2H}{6}(3R^2+2H^2)$.

3689*. $\frac{\pi\gamma h^{n+3}\operatorname{tg}^2\alpha}{n+3}$. Si pour axe $Oz$ on prend l'axe du cône et pour origine des coordonnées son sommet, alors son équation s'écrira $x^2+y^2-z^2\operatorname{tg}^2\alpha=0$.

3690. $\frac{2}{3}\pi\gamma R^6$. 3691. $\frac{\pi a^5}{5}\left(18\sqrt{3}-\frac{97}{6}\right)$.

3692*. $\xi=0$, $\eta=0$, $\zeta=\frac{5}{4}R$. Passer aux coordonnées cylindriques.

3693*. $\frac{59}{480}\pi R^5$. Voir indication de l'exercice précédent.

3694*. Choisir le système de coordonnées tel que son origine se confonde avec le centre de gravité du corps et un axe de coordonnées soit parallèle à l'axe par rapport auquel on calcule le moment d'inertie.

3695. $\frac{kMm}{a^2}$, où $M$ est la masse de la boule et $k$ la constante de gravitation.

3696*. Utiliser le résultat de l'exercice précédent.

3697. $\frac{17}{56}\frac{kM}{R^2}$, $k$ est la constante de gravitation.

3699. Le centre de poussée se trouve sur celui des axes de symétrie du rectangle qui est perpendiculaire au côté $a$, à une distance $\frac{2}{3}b$ du côté confondu avec la surface libre. Dans le deuxième cas (le côté $a$ est situé à une profondeur $h$) la distance du centre de poussée au côté supérieur sera égale à $\frac{2b}{3}\frac{b+\frac{2}{3}l}{b+2l}$, où $l=\frac{h}{\sin\alpha}$. (Si $l\gg b$, le centre de poussée coïncide avec le centre du rectangle.)

3700. a) $h/2\sin\alpha$; b) $3/4h\sin\alpha$.

3701. Le centre de poussée se trouve sur le grand axe de l'ellipse à la distance $a+\frac{a^2}{4(a+h)}$ de son extrémité supérieure.

3702*. Choisir le système de coordonnées tel qu'un plan de coordonnées se confonde avec le plan de la lame et l'un des axes avec l'intersection de la surface du liquide avec le plan de la lame.

3703. Diverge. 3704. $2\pi$. 3705. $\frac{\pi}{4a^2}$. 3706. 4. 3707. 2. 3708. 1/4.

3709*. $\frac{\alpha}{2\sin\alpha}$. Passer aux coordonnées polaires.

3710*. 1/2. Intervertir l'ordre d'intégration.
3711. 1/16. Voir l'indication de l'exercice précédent. 3712. Converge.
3713. Diverge. 3714. Converge. 3715. Diverge. 3716. Non. 3717. 8/15.

3718. $\pi/16$. 3719*. $\pi\sqrt{\pi}$; se servir de l'intégrale de Poisson $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 3720. Diverge. 3721. Converge. 3722. Diverge.

3723. $\frac{8}{3}\pi R^3\left(\ln R - \frac{1}{3}\right)$.

3724*. $\pi$. (Voir l'indication de l'exercice 3719.)

3725. $\frac{\pi}{4}$. 3726. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 3727. $2\pi km\gamma\left(R + H - \sqrt{R^2 + H^2}\right)$. La force est dirigée suivant l'axe du cylindre, $k$ est la constante de gravitation.

3728. $\frac{2\pi km\gamma H}{l}(l - H)$, où $l$ est la génératrice du cône. La force est dirigée suivant l'axe du cône.

3729. a) $a = 4\gamma_C - 3\gamma_0$, $b = \frac{4}{R}(\gamma_C - \gamma_0)$; b) $\frac{4}{3}\pi kR\gamma_C = \frac{kMm}{R^2}$.

3730. Partout définie sauf pour $x = 0$. 3731. $3\pi$.

3733. $\frac{b}{8a^4}\left\{\frac{5a^2 + 3b^2}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{3}{ab}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right\}$.

3734. $\frac{1\cdot 3\cdot 5\ \ldots\ (2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ \ldots\ (2n-2)}\frac{\pi}{2a^{2n-1}}$ $(n > 1)$.

3735. $\frac{(n-1)!}{a^n}$. 3736*. $\frac{\pi(a^2 + b^2)}{4|ab|^3}$. Dériver par rapport à $a$ puis à $b$ et ajouter les expressions obtenues. 3737. $\ln(1 + a)$. 3738. $\frac{1}{2}\ln(1 + a)$.

3739. $\frac{\pi}{2}\ln\left(a + \sqrt{1 + a^2}\right)$. 3740. $\pi\left(\sqrt{1 - a^2} - 1\right)$.

3741. $\frac{\pi}{2}\ln(1 + a)$, si $a \geqslant 0$. $-\frac{\pi}{2}\ln(1 - a)$, si $a \leqslant 0$.

3742. $\pi\ln\frac{1 + \sqrt{1 - a^2}}{2}$. 3743. $\pi\arcsin a$. 3744. $\pi\arcsin a$. 3745. $\sqrt{\pi a}$.

3746*. $\sqrt{\pi}\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right)$. Dériver par rapport à $a$ puis à $b$.

3747*. $\operatorname{arctg}\frac{b}{a} - \operatorname{arctg}\frac{c}{a} = \operatorname{arctg}\frac{a(b - c)}{a^2 + bc}$. Dériver par rapport à $b$ ou $c$.

3748. $\frac{1}{2}\ln\frac{a^2 + b^2}{a^2 + c^2}$. 3749*. $\pi\ln\frac{a + b}{2}$. Dériver par rapport à $a$ ou $b$.

3750. $\frac{\pi}{2}\ln(1+a)$, si $a>0$; $-\frac{\pi}{2}\ln(1-a)$, si $a<0$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\operatorname{tg} x}\,dx=\frac{\pi}{2}\ln 2$.

3751*. $\ln\frac{1+\beta}{1+\alpha}$. Intégrer par rapport au paramètre $n$ de $\alpha$ à $\beta$.

3752. $\sqrt{\pi}\,(b-a)$. 3753. $\int_0^\infty\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{x}}=\int_0^\infty\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{x}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

3755. $\frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}$. 3756. $\frac{1}{n}\ln\frac{b}{a}$.

3757*. $I=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left[\int_\varepsilon^\infty\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx\right]=$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_\varepsilon^\infty\frac{f(ax)}{x}\,dx-\int_\varepsilon^\infty\frac{f(bx)}{x}\,dx\right]=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(x)}{x}\,dx.$$

On évalue la dernière intégrale en remplaçant $f(x)$ par son maximum et son minimum dans l'intervalle $[a\varepsilon, b\varepsilon]$ et on passe à la limite.

3758. $\ln b/a$. 3759. $\ln b/a$. 3760. $1/2\ln\left|\frac{a+b}{a-b}\right|$.

3761. $ab\ln b/a$.

3762*. 3/4 ln 3. En écrivant $\sin^3 x$ sous la forme d'une différence de sinus d'angles multiples, on ramène ce problème au précédent ($a$ et $b$ étant dûment choisis).

3763*. On peut se servir de deux méthodes pour la démonstration: 1) intégrer par parties; 2) intervertir l'ordre d'intégration dans l'intégrale double que l'on obtient en remplaçant $\Phi(ax)$ par l'intégrale.

3764*. Voir indication de l'exercice 3763*.

3765*. Utiliser la seconde méthode de résolution de l'exercice 3763. Pour démontrer la seconde relation il importe d'étudier l'intégrale

$$\int_0^\infty\frac{\sin ax\cos(x\sin\theta)}{x}\,dx$$

pour $|a|>1$ et $|a|\leqslant 1$. Pour cela il faut transformer le numérateur et se rappeler que $\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}$ (intégrale de Dirichlet).

3767*. Porter dans l'équation les expressions de $y'$ et $y''$ obtenues par dérivation de l'intégrale $y$ par rapport au paramètre. Intégrer par parties l'un des termes obtenus.

3768*. Voir indication de l'exercice 3767.

3769*. Voir indication de l'exercice 3767.

## Chapitre XIII

3770. $\sqrt{5}\ln 2$. 3771. 24. 3772. $\frac{p^2}{3}(5\sqrt{5}-1)$.

3773. $2\pi a^{2n+1}$. 3774. $\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$.

3775. $4\pi a\sqrt{a}$. 3776. $\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi$.

3777*. $\frac{\pi a^2}{2}$. Passer aux coordonnées polaires.

3778. $\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. 3779. $\frac{1}{12}\left[(R^2+4)^{\frac{3}{2}}-8\right]$.

3780. $\frac{8a\pi^3\sqrt{2}}{3}$. 3781. $\frac{R^4\sqrt{3}}{32}$.

3782. $\frac{2\sqrt{2}}{3}\left[(1+2\pi^2)^{\frac{3}{2}}-1\right]$. 3783. $R^2\sqrt{2}$.

3784. $\frac{1}{3}\{(x_2^2+1)^{\frac{3}{2}}-(x_1^2+1)^{\frac{3}{2}}\}$.

3785. $\delta a$. 3786. $\frac{b^2}{2}+\frac{ab}{2\varepsilon}\arcsin\varepsilon$, où $\varepsilon$ est l'excentricité de l'ellipse.

3787. $\left(2\pi a^2+\frac{8\pi^3b^2}{3}\right)\sqrt{a^2+b^2}$. 3788. $(1-e^{-t})\sqrt{3}$.

3789. $\left(0,\ \frac{2a}{\pi},\ \frac{b\pi}{2}\right)$. 3790. $\frac{8k\sqrt{2}}{15}\left[(3\pi^2-1)(2\pi^2+1)^{\frac{3}{2}}+1\right]$.

3791. $I_x=I_y=\left(\frac{a^2}{2}+\frac{h^2}{3}\right)\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}$, $I_z=a^2\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}$.

3792. $3\pi R^2$. 3793. $\frac{\pi p^2}{4}$. 3794. $\frac{11}{3}$. 3795. $R^2$.

3796. $ka\left(a+\frac{b^2}{2c}\ln\frac{a+c}{a-c}\right)$, où $c=\sqrt{a^2-b^2}$. Pour $a=b$ $S=2ka^2$.

3797. $\frac{98}{81}p^2$. 3798. $8R^2$. 3799. $4R^2$. 3800. $\frac{2Im}{a}$. 3801. $\frac{8mI\sqrt{2}}{a}$.

3803. $\frac{2\pi mIa}{b^2}$, où $a$ et $b$ sont les demi-axes de l'ellipse. 3804. $\frac{2\pi mI}{p}$.

3805. $\frac{2\pi mIR^2}{(h^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$. Pour $R=h\sqrt{2}$. 3806. 3. 3807. $\frac{ab}{2}$.

3808. $-\frac{56}{15}$. 3809. $37\frac{1}{3}$. 3810. $4\pi$. 3811. 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{12}$; 3) $\frac{17}{30}$ 4) $-\frac{1}{20}$.

3812. Dans les quatre cas l'intégrale est égale à 1.

3813. 0. 3814. $-2\pi ab$. 3815. $-\frac{4}{3}a$. 3816. $\pi a^2$.

3817. $\frac{3}{16}\pi R\sqrt[3]{R}$. 3818. 13. 3819. 0. 3820. $3\sqrt{3}$.

3821. $-\frac{\pi R^3}{4}$. 3822. $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$.

3823. $\iint\limits_D (y-x)\,e^{xy}\,dx\,dy$. 3824. $\frac{\pi R^4}{2}$.

3825. 1) 0; 2) $-\frac{\pi a^3}{8}$. 3827. 1/3.

3836*. Appliquer la formule de Green au domaine doublement connexe limité par le contour $L$ et une circonférence centrée en l'origine des coordonnées et ne coupant pas le contour $L$.

3837. $\pi$. 3838. 8. 3839. 4. 3840. $\ln\frac{13}{5}$. 3841. $R_2-R_1$.

3842. $\frac{10}{3}$. 3843. 0. 3844. $-\frac{9}{2}$.

3845. $u=\frac{x^3+y^3}{3}+C$. 3846. $u=(x^2-y^2)^2+C$.

3847. $u=\ln|x+y|-\frac{y}{x+y}+C$. 3848. $u=\frac{\sqrt{x^2+y^2}+1}{y}+C$.

3849. $u=\ln|x-y|+\frac{y}{x-y}+\frac{x^2}{2}-\frac{y^3}{3}+C$.

3850. $u=x^2\cos y+y^2\cos x+C$. 3851. $u=\frac{e^y-1}{1+x^2}+y+C$.

3852. $u=\frac{x-y}{(x+y)^2}+C$.

3853. $n=1$, $u=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+C$.

3854. $a=b=-1$, $u=\frac{x-y}{x^2+y^2}+C$. 3855. $u=\ln|x+y+z|+C$.

3856. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}+C$. 3857. $\operatorname{arctg} xyz+C$.

3858. $u=\frac{2x}{x-yz}+C$. 3859. $u=\frac{x-3y}{z}+\frac{z^2}{2}+C$.

3860. $u=e^{\frac{y}{z}}(x+1)+e^{yz}-e^{-z}$.

3861. $\pi ab$. 3862. $\frac{3}{8}\pi a^2$. 3863. $6\pi a^2$. 3864*. $\frac{3}{2}a^2$. Passer à la forme paramétrique en posant $y=tx$.

3865. $\frac{1}{60}$. 3866. $\frac{1}{210}$. 3867*. $2a^2$. Poser $y=x\operatorname{tg} t$.

3868*. $\frac{1}{30}$. Poser $y=xt^2$. 3869. $FR$. 3870. 1) $\frac{4}{3}$; 2) $\frac{17}{12}$; 3) $\frac{3}{2}$ et 1.

3871. a) $\frac{a^2-b^2}{2}$; b) 0. 3872. 0.

3873. $\frac{k\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{c}\ln 2$, où $k$ est le coefficient de proportionnalité.

3874. $0{,}5\,k\ln 2$, où $k$ est le coefficient de proportionnalité.

3876. $4\sqrt{61}$. 3877. $\frac{\sqrt{3}}{120}$. 3878. $\frac{\pi R^3}{4}$.

3879. 0. 3880. $\pi R^3$. 3881. $\frac{2\pi R^6}{15}$.

3882. $2\pi\operatorname{arctg}\frac{H}{R}$. 3883. $\frac{2\pi R}{c(n-2)}\left[\frac{1}{(c-R)^{n-2}}-\frac{1}{(c+R)^{n-2}}\right]$ pour $n\neq 2$; $\frac{2\pi R}{c}\ln\frac{c+R}{c-R}$ pour $n=2$.

3884. $\pi\left[R\sqrt{R^2+1}+\ln\left(R+\sqrt{R^2+1}\right)\right]$.

3885*. $\pi^2R^3$. Passer aux coordonnées sphériques.

3886. $\frac{8}{3}\pi R^4$. 3887. 3. 3888. $\frac{2\pi R^7}{105}$. 3889. $\frac{4}{3}\pi abc$. 3890. 0.

3891. $\frac{1}{8}$. 3892. $R^2H\left(\frac{2R}{3}+\frac{\pi H}{8}\right)$. 3893. $\frac{\pi}{8}$.

3894. $2\iint\limits_S (x-y)\,dx\,dy+(y-z)\,dy\,dz+(z-x)\,dx\,dz$.

3895. $-\frac{\pi R^6}{8}$. 3896. $2\iiint\limits_\Omega (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$.

3897. $\iiint\limits_\Omega \frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dx\,dy\,dz$. 3898. 0. 3899. $\frac{12}{5}\pi R^5$.

## Chapitre XIV

3901. $1+y^2=C(1-x^2)$. 3902. $x^2+y^2=\ln Cx^2$.

3903. $y=\sqrt[3]{C+3x-3x^2}$.

3904. $y=C\sin x-a$. 3905. $Cx=\frac{y-1}{y}$.

3906. $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=C$. 3907. $\sqrt{1-y^2}=\arcsin x+C$.

3908. $e^t=C(1-e^{-S})$. 3909. $10^x+10^{-y}=C$.

3910. $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{y}{4}\right|=C-2\sin\frac{x}{2}$. 3911. $t=\frac{1}{a}\left(l+\frac{b\cdot l^{1-n}}{1-n}\right)$.

3912. $t=\frac{v^2}{2\sqrt{k_1k_2}}\ln\frac{\sqrt{k_1}(1-x)+x\sqrt{k_2}}{\sqrt{k_1}(1-x)-x\sqrt{k_2}}$.

3913. $y=e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$. 3914. $y=\frac{1+x}{1-x}$.

3915. $\cos x=\sqrt{2}\cos y$. 3916. $y=\frac{b+x}{1+bx}$.

3917. L'hyperbole $xy=6$.

3918. La tractrice $y=\sqrt{4-x^2}+2\ln\left|\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}\right|$.

3919. Les paraboles $y^2=Cx$. 3920. $y^k=Cx$.

3921. $y=e^{\frac{x-a}{a}}$. 3922. $(x-C)^2+y^2=a^2$.

3923. $y=\frac{1}{k}\ln|C(k^2x^2-1)|$.

3924. $x=y^n$. 3925. $\approx 2{,}7$ m/s. 3927. 0,467 km/h; 85,2 m.

3928. $H=\left[\sqrt{h}-\frac{\sqrt{2g}}{4S}qT\right]^2$. 3929. $\ln\left|\frac{\theta_0-\theta_1}{\theta-\theta_1}\right|=\frac{k_0}{2}(2t+\alpha t^2)$.

3930*. Si $t$ est le temps compté en heures à partir de minuit l'équation différentielle de l'exercice s'écrit :

$$\frac{dS}{S\sqrt{S}}=k\cos\frac{\pi(t-12)}{12}\,dt\,;\ \text{d'où } S=\frac{160\,000}{\left[9-\sin\frac{\pi(t-12)}{12}\right]^2}.$$

La fonction $S(t)$ est définie pour $6\leqslant t\leqslant 18$.

3931. $x+\operatorname{cotg}\frac{x-y}{2}=C$. 3932. $4y-6x-7=Ce^{-2x}$.

3933. $x+C=2u+\frac{2}{3}\ln|u-1|-\frac{8}{3}\ln(u+2)$, où $u=\sqrt{1+x+y}$.

3934. $y-2x=Cx^3(y+x)$. 3935. $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln C\sqrt{x^2+y^2}$.

3936. $\ln|y|+\frac{x}{y}=C$. 3937. $x^2+y^2=Cy$.

3938. $y=\pm x\sqrt{2\ln|Cx|}$. 3939. $x^2=C^2+2Cy$. 3940. $e^{\frac{y}{x}}=Cy$.

3941. $\ln|Cx|=-e^{-\frac{y}{x}}$.

3942. $y=xe^{1+Cx}$. 3943. $(x+y)^2=Cx^3e^{-\frac{x}{x+y}}$.

3944. $Cx=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. 3945. $\sqrt{x^2+y^2}=e^{\frac{y}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$.

3946. $y^3=y^2-x^2$. 3947. $y=-x$. 3948. $y^2=5\pm2\sqrt{5}x$.

3949. *Si* $\frac{y}{x}=u$ alors $\ln|x|=\int\frac{du}{\varphi\left(\frac{1}{u}\right)}$;

$$\varphi(u)=-\frac{1}{u^2} \text{ ou } \varphi\left(\frac{x}{y}\right)=-\frac{y^2}{x^2}.$$

3950. $x=Ce^{\pm2\sqrt{\frac{y}{x}}}$. 3951. $x=y\ln|Cy|$. 3952. $x^2=2Cy+C^2$.

3953*. Un paraboloïde de révolution. Soit $Oxy$ le plan méridien de la surface du miroir; ce plan contient la courbe cherchée que l'on déduit de l'équation différentielle obtenue en égalant les tangentes des angles de réfraction et de réflexion, exprimées en fonction de $x$, $y$ et $y'$.

3954. $y=Ce^{-2x}+2x-1$. 3955. $y=e^{-x^2}\left(C+\frac{x^2}{2}\right)$.

3956. $y=Cx^2e^{\frac{1}{x}}+x^2$. 3957. $y=(x+C)(1+x^2)$.

3958. $y=Ce^{-x}+\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)$.

3959. Si $m\neq-a$, alors $y=Ce^{-ax}+\frac{e^{mx}}{m+a}$;

si $m=-a$, alors $y=(C+x)e^{mx}$.

3960. $y^2-2x=Cy^3$. 3961. $x=Ce^{2y}+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}$.

3962. $x=y\ln y+\frac{C}{y}$. 3963. $y=e^x\left(\ln|x|+\frac{x^2}{2}\right)+Ce^x$.

3964. $y=Ce^{-\Phi(x)}+\Phi(x)-1$. 3965. $y=\frac{x}{\cos x}$.

3966. $y=\frac{e^x+ab-e^a}{x}$. 3967. $y=\frac{x}{x+1}(x-1+\ln|x|)$.

3968. $x=-t\operatorname{arctg}t$. 3969. b) $\alpha+\beta=1$.

3971. $y=Cx-x\ln|x|-2$.

3972*. $y=Cx\pm\frac{a^2}{2x}$. L'équation différentielle de l'exercice s'écrit $|xy-x^2y'|=a^2$.

3973*. $x=Cy\pm\frac{a^2}{y}$. L'équation différentielle de l'exercice s'écrit $\left|xy-y^2\frac{dx}{dy}\right|=2a^2$. 3974. $v=\frac{k_1}{k}\left(t-\frac{m}{k}+\frac{m}{k}e^{-\frac{kt}{m}}\right)$.

3975. $v=(v_0+b)e^{-at^2}+b(at^2-1)$, où $a=\frac{k_1}{2m}$; $b=\frac{2km}{k_1^2}$.

3976. $\theta-\theta_0=e^{-kt}\int\limits_0^t\varphi(t)^{kt}e\,dt$. 3977. 9,03 $a$.

3978. $I=\frac{E_0}{R^2+\omega^2L^2}\cdot[\omega Le^{-\frac{Rt}{L}}+R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t]$.

3979. $x=Ce^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$. 3980. $y=Cx^2+\frac{1}{x}$.

3981. $y=\frac{C}{x}\sqrt{x^2+1}+\frac{(1+x^2)^2}{3x}$. 3982. $y=Cx-1$.

3983. $(1+x^2)(1+y^2)=Cx^2$. 3984. $(x+y)^2(2x+y)^3=C$.

3985. $x=Ce^{-\frac{x^2}{2y^2}}$. 3986. $\sin\frac{y}{x}=Cx$.

3987. $\sin\frac{y}{x}+\ln|x|=C$. 3988. $y=Ce^{-e^x}+e^x-1$.

3989. $y(y-2x)^3=C(y-x)^2$. 3990. $y=Ce^{\sin y}-2(1+\sin y)$.

3991. $x=y^2(1+Ce^{\frac{1}{y}})$. 3992. $y=Ce^{-\sin x}+\sin x-1$.

3993. $y=(C+e^x)(1+x)^n$. 3994. $y^4=4xy+C$.

3995. $y=C\cdot e^x$ et $y=C+\frac{x^2}{2}$. 3996*. $y^2=\frac{2}{3}\sin x+\frac{C}{\sin^2 x}$. Ramener l'équation donnée à une équation linéaire en $z=y^2$.

3997. $\operatorname{arctg}(x+y)=x+C$. 3999. $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\ln(x^2+y^2)=\frac{\pi}{4}+\ln 2$.

4000. $y=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}[2+x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x]$.

4001. $(1+y)e^{-y}=\ln\frac{1+e^x}{2}+1-x$. 4002. $y=\frac{5}{3}e^{x^3}-\frac{1}{3}(2+x^3)$.

4004. $y=\frac{1}{2k}[e^{kx+C}+e^{-(kx+C)}]$. 4005. $x^2+y^2=Cx$.

4006. $(y-x)^2(x+2y)=1$. 4007. Les paraboles $y=x+Cx^2$.
4008. $(2y^2-x^2)^3=Cx^2$. 4009. La chaînette. 4010. $y=Cx^2$.
4011*. Le faisceau de droites $y-y_0=C(x-x_0)$. L'équation différentielle $y-y_0=y'(x-x_0)$.
4012. La circonférence centrée au point $(x_0, y_0)$: $x^2+y^2=2(xx_0+yy_0)$.
4013. Toute circonférence centrée sur l'axe $Oy$ et tangente à l'axe $Ox$.

4014. Si $S$ est l'espace et $t$ le temps, alors $S=S_0+Ce^{-k_2t}-\frac{k_1}{k_2^2}t+\frac{k_1}{2k_2}t^2$, où $S_0$ est l'espace initial, $k_1$ et $k_2$ les coefficients de proportionnalité.

4016. 1) $\frac{8}{9}$ de tour par seconde; 2) dans 6 mn 18 s. 4017. 0,00082 s.

4018*. $v=v_0\left(1-\frac{m}{M_0}t\right)^{-1}e^{-\frac{3f_0}{mv_0}}\left(1-\sqrt[3]{1-\frac{m}{M_0}t}\right)$.

L'action $F$ est égale à $\frac{d(m\cdot v)}{dt}$. Pour résoudre ce problème et les deux suivants il faut tenir compte du fait que la masse $m$ est une grandeur variable qui dépend du temps $t$; la vitesse $v$ est la fonction cherchée.

4019*. $v=\frac{g}{2m-k}(M_0-mt)\left[\left(1-\frac{m}{M_0}t\right)^{\frac{k}{m}-2}-1\right]$. Voir indication de l'exercice 4018.

4020*. $v=\frac{g}{\mu}e^{k_1\mu^{2/3}}\int\limits_0^t \mu e^{-k_1\mu^{2/3}}dt$, où $\mu=M_0-mt$, $k_1=\frac{3k}{m}\sqrt[3]{\frac{9\pi}{2\gamma^2}}$.

Voir l'indication de l'exercice 4018.

4021*. $y=m_0+\frac{m_0}{k_1-k_2}(k_2e^{-k_1t}-k_1e^{-k_2t})$, où $t$ est le temps, $y$ la quantité de second produit. Si $x$ est la quantité de premier produit formé dans le temps $t$, on a $\frac{dx}{dt}=k_1(m_0-x)$. D'où l'on tire $x=x(t)$. La vitesse $\frac{dy}{dt}$ de formation du second produit est proportionnelle à la différence $x-y$.

4022. 2,97 kg de sel. Le maximum est atteint pour $t=33\frac{1}{3}$ mn et égal à 3,68 kg.

4023. $I=1+(I_0-1)e^{-t^2}$. 4024*. $p=\frac{p_0le^{k\omega^2x^2}}{\int\limits_0^l e^{k\omega^2x^2}dx}$, où $k=\frac{M}{2p_0lS}$.

Un cas important dans la pratique est celui où $\omega$ est très grand (les centrifuges). Au lieu de calculer l'intégrale qui figure au dénominateur pour $\omega$ donné (celle-ci ne s'exprime pas par des fonctions élémentaires) on calcule $\lim\limits_{\omega\to\infty} p$ (voir exercice 2439). L'équation différentielle de l'exercice s'écrit

$$S\,dp=\omega^2x\,dm,$$

où $dm$ est la masse de l'élément $CD$. Par ailleurs $\gamma=2kp$ (c'est une forme de la loi de Boyle-Mariotte dans laquelle le coefficient de proportionnalité a été désigné par $2k$ pour simplifier l'écriture ultérieure); $dm=\gamma S\,dx=2kp\,S\,dx$. Finalement on obtient l'équation différentielle à variables séparables: $\frac{dp}{p}=$ $=2k\omega^2x\,dx$. Son intégration donne $p=Ce^{k\omega^2x^2}$. D'autre part $M=\int\limits_0^M dm=$ $=C\cdot 2kS\cdot\int\limits_0^l e^{k\omega^2x^2}dx$, d'où l'on déduit $C$. On a

$$p=\frac{Me^{k\omega^2x^2}}{2kS\int\limits_0^l e^{k\omega^2x^2}dx},\ \text{or}\ \gamma_0=2kp_0=\frac{M}{lS},\ k=\frac{M}{2p_0lS}$$

donc :

$$p=\frac{p_0 l e^{k\omega^2 x^2}}{\int\limits_0^l e^{k\omega^2 x^2}\,dx}.$$

4025. $(x+y-1)^3=C(x-y+3)$. 4026. $x^2-xy+y^2+x-y=C$.

4027. $x-2y+\ln|x+y|=C$. 4028. $e^{-2\operatorname{arctg}\frac{y+2}{x-3}}=C(y+2)$.

4029. $y^2=x+(x+1)\ln\frac{C}{x+1}$. 4030. $y^2e^{-\frac{y^2}{x}}=C$.

4031. $y=\frac{1}{x}\operatorname{tg}\ln|Cx|$. 4032. $x^2y^2+1=Cy$.

4033. $Cx=1-\frac{x}{x^2+y^2}$.

4034. $(1+Cx)e^y=1$. 4035. $y^4+2x^2y^2+2y^2=C$.

4036. $x^2+y^2=C(y-1)^2$. 4037. $y=x\operatorname{tg}(x+C)$.

4038. $\frac{1}{y^2}=Ce^{2x^2}+x^2+\frac{1}{2}$. 4039. $y=\frac{1}{(1+x)[C+\ln|1+x|]}$.

4040. $ny^n=Ce^{\frac{-nx}{a}}+nx-a$. 4041. $x^2=y^2(C-y^2)$.

4042. $y(1+\ln x+Cx)=1$. 4043. $y(x+C)=\sec x$.

4044. $y=\left(\frac{C+\ln|\cos x|}{x}+\operatorname{tg}x\right)^2$.

4045. $y=\frac{x^4}{4}\ln^2|Cx|$. 4046. $y^2=Ce^{\frac{-2a}{x}}-\frac{b}{a}$.

4047. $y=\frac{\varphi(x)}{x+C}$. 4048. 1) $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$, 2) $\frac{a}{x^2}+\frac{b}{y^2}=1$.

4049. $\frac{\rho-k}{\rho}=\frac{(\rho_0-k)\varphi}{\rho_0\varphi_0}$. 4050. $x^4-x^2y^2+y^4=C$.

4051. $x+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=C$.

4052. $xe^y-y^2=C$. 4053. $x^y=C$. 4054. $\sqrt{x^2+y^2}+\frac{y}{x}=C$.

4055. $\operatorname{tg}(xy)-\cos x-\cos y=C$. 4056. $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3}+x-\frac{1}{2}y^2=C$.

4057. $\sin\frac{y}{x}-\cos\frac{x}{y}+x-\frac{1}{y}=C$.

4058. $x-\frac{y}{x}=C$. Le facteur intégrant est $\mu(x)=\frac{1}{x^2}$.

4059*. $x^2+\frac{2x}{y}=C$. Chercher le facteur intégrant sous la forme $\mu(y)$.

4060. $(x^2+y^2)e^x=C$. 4061. $\frac{y^2}{2}+\frac{\ln x}{y}=C$.

4062. $(x \sin y + y \cos y - \sin y)\, e^x = C$. 4064. $\mu = y^{-n} e^{-(n-1)\int P(x)\,dx}$.

4065. L'expression $\dfrac{Y'_x - X'_y}{X - Y}$ doit être fonction de $(x+y)$.

4066. L'expression $\dfrac{Y'_x - X'_y}{xX - yY}$ doit être fonction de $xy$.

4067. $abx + b^2y + a + bc = Ce^{bx}$. 4068. $y = \left[Ce^{\frac{(m-1)\,bx}{a}} - \dfrac{c}{b}\right]^{\frac{1}{1-m}}$,

4069. $x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C$.

4070. $\dfrac{2x}{x-y} + \ln|x+y| + 3\ln|y-x| = C$.

4071. $x + y = a \operatorname{tg}\left(C + \dfrac{y}{a}\right)$. 4072. $y^3 - 3xy = C$.

4073. $x^2 - y^2 = Cy^3$. 4074. $3x^2y + x^3y^3 = C$.

4075. $y\left(x^2 + \dfrac{1}{3}y^2\right) = Ce^{-x}$. 4076. $\ln|1+y| - \dfrac{1+y}{x} = C$.

4077. $y^2 - 1 + Cxy = 0$. 4078. $\dfrac{xy}{x-y} + \ln\left|\dfrac{x}{y}\right| = C$.

4079. $3\sqrt{y} = C\sqrt[4]{x^2-1} + x^2 - 1$. 4080. $y = \sin x + C\cos x$.

4081. $y = \dfrac{2e^x}{C + e^x(\cos x + \sin x)}$. 4082. $\operatorname{tg} x - \dfrac{\sin y}{\sin x} = C$.

4083. $xe^{\sin\frac{y}{x}} = C$. 4084. $xy\cos\dfrac{y}{x} = C$.

4085. $\sin y = x - 1 + Ce^{-x}$. 4086. $y = \dfrac{\operatorname{tg} x + \sec x}{C + \sin x}$.

4087. $\ln|Cx| = -e^{-\frac{x^2+y^2}{x}}$. 4088. $x + ye^{\frac{x}{y}} = C$.

4089. $y = x\ln|Cx|$. 4090. $y^2 - by - axy = C$.

4091. La circonférence $x^2 + y^2 - \dfrac{2k}{k+1}(ax+by) = C$ $(k \neq -1)$ ou la circonférence $x^2 + y^2 - \dfrac{2k}{k-1}(ax+by) = C$ $(k \neq 1)$; si $k = -1$ ou $k = 1$, la droite $ax + by = C$.

4092. Les spirales logarithmiques:

$$\sqrt{x^2+y^2} = Ce^{\pm \operatorname{arctg}\frac{y}{x}}.$$

4093*. $y^2 = \dfrac{x^4 + C^4}{2x^2}$. L'équation différentielle de l'exercice est $y^2 = x(x - yy')$.

4094. $I = \dfrac{t}{2}$.

4095. Le vecteur du champ est perpendiculaire au rayon polaire de tout point. Les courbes intégrales sont une famille de circonférences concentriques centrées en l'origine des coordonnées. L'équation de la famille est $x^2 + y^2 = C$. Les isoclines — une famille de droites passant par l'origine des coordonnées.

4096. 1) $y' = f(x \cdot y)$; 2) $y' = f\left(\frac{y^2}{x}\right)$; 3) $y' = f(x^2 + y^2)$.

4097. Les droites $y = Cx$. La solution peut être formulée par le théorème suivant: si une famille de paraboles d'axe et de sommet communs est coupée par une droite passant par le sommet alors les tangentes aux paraboles à leurs points d'intersection avec cette droite seront parallèles entre elles.

4099. $y' = \frac{ay+b}{x} + C$; $y' = ay + bx + C$.

4103. $y \approx 0{,}31$ pour $\Delta x = 0{,}05$. 4104. $y \approx 1{,}68$ pour $\Delta x = 0{,}05$.

4105. Solution exacte: $y = e^{\frac{x^2}{4}} = f(x)$; $f(0{,}9) = 1{,}2244$. Solution approchée: $f(0{,}9) = 1{,}1942$. Erreur relative $\sim 2{,}5\ \%$.

4106. En résolvant exactement on obtient pour $x = \sqrt[3]{3(e-1)} \approx 1{,}727$; une intégration numérique par division de l'intervalle en quatre parties donne $x \approx 1{,}72$.

4107. $y_2 = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{13}{24}x^4 + \frac{1}{4}x^5 + \frac{1}{18}x^6 + \frac{1}{63}x^7$.

4108. $-1{,}28$. 4109. $y = 1 + x + x^2 + 2x^3 + \frac{13}{4}x^4 + \ldots$

4110. $y = 1 - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5} + \ldots$

4111. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{7 \cdot 9}x^7 - \frac{2}{7 \cdot 11 \cdot 27}x^{11} - \ldots$

4112. $y = 1 + 2x - x^2 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4 + \ldots$

4113. $y = 0$. 4114. $y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + \frac{11x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots$

4115. $y = -\frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^6}{6!} - \ldots$

4116. $y = 1 + (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{2(x-1)^3}{3!} + \frac{4(x-1)^4}{4!} - \frac{60(x-1)^5}{5!} + \ldots$

4117. $y = Cx + C^2$; intégrale singulière $x^2 + 4y = 0$.

4118. $y = Cx - 3C^3$; intégrale singulière $9y \pm 2x\sqrt{x} = 0$.

4119. $y = Cx + \frac{1}{C}$; intégrale singulière $y^2 = 4x$.

4120. $y = Cx + \sqrt{1 + C^2}$; intégrale singulière $x^2 + y^2 = 1$.

4121. $y = Cx + \sin C$; solution singulière $y = x(\pi - \arccos x) + \sqrt{1 - x^2}$.

4122. $x = Cx - \ln C$; solution singulière $y = \ln x + 1$.

4123. $y = (\sqrt{x+1} + C)^2$; solution singulière $y = 0$.

4124. $y = Cx^2 + \frac{1}{C}$; intégrale singulière $y^2 - 4x^2 = 0$.

4125. $2Cx = C^2 - y^2$; pas d'intégrale singulière.

4126. $x = Ce^{-p} + 2(1-p)$, $y = x(1+p) + p^2$; pas d'intégrale singulière.

4127. $y = Cx - e^C$; solution singulière $y = x(\ln x - 1)$.

4128. $y = Cx + C + C^2$; solution singulière $y = -\frac{1}{4}(x+1)^2$.

4129. $y = Cx + a\sqrt[3]{1 - C^3}$; intégrale singulière $\sqrt{y^3} - \sqrt{x^3} = \sqrt{a^3}$.

4130. $(C - x)y = C^2$; solution singulière $y = 4x$.

**4131.** $y^2 - 4e^x = 0$. **4132.** $xy = 1$. **4133.** $2y - x^2 = 0$.

**4135.** L'hyperbole équilatère $2xy = \pm a^2$ où $a^2$ est l'aire du triangle; solution triviale: toute droite de la famille $y = \pm \frac{C^2}{2} x + aC$.

**4136.** $(y - x - 2a)^2 = 8ax$. **4137.** L'ellipse et l'hyperbole.

**4138.** $x = \frac{Ce^{-\frac{1}{2p^2}}(1+p^2)}{p^2}$, $y = \frac{Ce^{-\frac{1}{2p^2}}}{p}$,

$$\text{ou } x = \frac{(p^2+1)C}{\sqrt{p}\sqrt[4]{(p^2+2)^3}}, \quad y = \frac{-C\sqrt{p}}{\sqrt[4]{(p^2+2)^3}}.$$

**4139.** $y^2 = Cx^{-\frac{1}{k}} + \frac{k^2x^2}{2k+1}$. **4140*.** $\begin{cases} y = \cos\alpha\left(C + \frac{a}{2}\sin^2\alpha\right), \\ x = \sin\alpha\left(a - C - \frac{a}{2}\sin^2\alpha\right). \end{cases}$

Dans l'équation différentielle obtenue poser $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha$, puis exprimer $x$ en fonction de $y$ et du paramètre $\alpha$; calculer $dx$, le remplacer par $\frac{dy}{\operatorname{tg}\alpha}$ et résoudre l'équation différentielle obtenue en considérant $y$ comme fonction de $\alpha$.

**4141.** $S = at^2$ où $a$ est une constante déterminée.

**4142.** $x^2 + y^2 = 2a^2 \ln|Cx|$. **4143.** $y = Ce^{-\frac{x}{2}}$.

**4144.** $y = C(x^2 + y^2)$. **4145.** $(x^2 + y^2)^2 = C(y^2 + 2x^2)$.

**4146.** Si le paramètre de la parabole est égal à $2p$ et que la droite soit prise pour axe des ordonnées, l'équation des trajectoires s'écrira: $y = C + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2x^3}{p}}$.

**4147.** Les tractrices.

**4148.** En comptant l'angle $\alpha$ dans l'une des deux directions possibles, on obtient l'équation de la famille $xy = -\frac{\sqrt{3}}{2}(x^2 + y^2) = C$.

**4149.** En comptant l'angle $\alpha$ dans l'une des deux directions possibles, on obtient l'équation de la famille

$$\ln(2x^2 + xy + y^2) + \frac{6}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg}\frac{x+2y}{x\sqrt{7}} = C.$$

**4150*.** On peut considérer par exemple que le vent souffle le long de l'axe $Ox$. Les lignes de propagation du son sur le plan $Oxy$ seront les trajectoires orthogonales de la famille de circonférences $(x - at)^2 + y^2 = (v_0t)^2$ où $t$ est le temps écoulé depuis l'émission du son, et $v_0$ la vitesse du son dans l'air immobile.

Pour tout $t$ fixe l'équation différentielle des trajectoires orthogonales cherchées $y' = \frac{y}{x - at}$ est confondue avec l'équation de la famille de circonférences.

En éliminant $t$ on obtient une équation de Lagrange dont la solution générale est

$$x = C(\cos\varphi + b)\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{1}{b}}, \quad y = C\sin\varphi\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{1}{b}},$$

ou $b = \pm\frac{a}{v}$, $\varphi$ un paramètre.

4151. $x = C \sin t + R(\cos t + t \sin t)$, $y = -C \cos t + R(\sin t - t \cos t)$.

4152. $x = \dfrac{C}{\operatorname{ch} t} + a(t - \operatorname{th} t)$, $y = C \operatorname{th} t + \dfrac{a}{\operatorname{ch} t}$.

4153. $x = a(\cos t + t \sin t) - \cos t \left(\dfrac{at^2}{2} + C\right)$,

$y = a(\sin t + t \cos t) - \sin t \left(\dfrac{at^2}{2} + C\right)$.

4154. $x = C \sin t + 2 \operatorname{tg} t$, $y = \operatorname{tg}^2 t - C \cos t - 2$.

4155. $y = \dfrac{x^3}{6} - \sin x + C_1 x + C_2$.

4156. $y = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{2}(x^2 - 1) - \dfrac{x}{2} \ln(1 + x^2) + C_1 x + C_2$.

4157. $y = \dfrac{x^2}{2}\left[\ln x - \dfrac{3}{2}\right] + C_1 x + C_2$. 4158. $y = C_1 x^2 + C_2$.

4159. $y = C_1 e^x + C_2 - x - \dfrac{x^2}{2}$. 4160. $y = \dfrac{1}{3} x^3 + C_1 x^2 + C_2$.

4161. $y = (1 + C_1^2) \ln|x + C_1| - C_1 x + C_2$.

4162. $y = (C_1 x - C_1^2) e^{\frac{x}{C_1} + 1} + C_2$. 4163. $y = \dfrac{1}{12}(x + C_1)^3 + C_2$.

4164. $y = \dfrac{2}{3C_1} \sqrt{(C_1 x - 1)^3} + C_2$.

4165. $y = -\dfrac{1}{3} \sin^3 x + C_1 \left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\sin 2x}{4}\right) + C_2$.

4166. $(x + C_2)^2 = 4C_1(y - C_1)$.

4167. $y = C_1 (x + C_2)^{\frac{2}{3}}$. 4168. $y = C_1 e^{\frac{x}{a}} + C_2 e^{-\frac{x}{a}}$.

4169. $x = \dfrac{4}{3}(y^{\frac{1}{2}} - 2C_1) \sqrt{y^{\frac{1}{2}} + C_1} + C_2$. 4170. $y = \dfrac{x + C_1}{x + C_2}$.

4171. $(x + C_2)^2 - y^2 = C_1$. 4172. $y = C_1 e^{C_2 x}$.

4173. $y \cos^2(x + C_1) = C_2$. 4174. $(x + C_2) \ln y = x + C_1$.

4175. Si la constante arbitraire de la première intégration est positive $(+C_1^2)$ alors $y = C_1 \operatorname{tg}(C_1 x + C_2)$; si elle est négative $(-C_1^2)$ alors

$$y = C_1 \frac{1 + e^{2(C_1 x + C_2)}}{1 - e^{2(C_1 x + C_2)}} = -C_1 \operatorname{cth}(C_1 x + C_2)\text{; si } C_1 = 0\text{, alors } y = -\frac{1}{x + C_2}.$$

4176. $x = C_1 + \cos C_2 \ln\left|\operatorname{tg} \dfrac{y + C_2}{2}\right|$. 4177. $C_1 x + C_2 = \ln\left|\dfrac{y}{y + C_1}\right|$.

4178. $\dfrac{x + C_2}{2} = C_1 \operatorname{arctg}(C_1 \ln y)$, $C_1 > 0$.

4179. $\ln|C_1 y| = 2 \operatorname{tg}(2x + C_2)$.

4180. $y = \ln|x^2 + C_1| + \dfrac{1}{\sqrt{-C_1}} \ln\left|\dfrac{x - \sqrt{-C_1}}{x + \sqrt{-C_1}}\right| + C_2$,

si $C_1 < 0$, et $y = \ln|x^2 + C_1| + \dfrac{2a}{\sqrt{C_1}} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{\sqrt{C_1}} + C_2$, si $C_1 > 0$.

4181*. Après la substitution $y' = p$ l'équation se décompose en deux dont l'une du type de Clairault. Sa solution générale est $y = C_1 + C_2 e^{C_1 x}$, et ses solutions singulières $y = \frac{4}{C-x}$. L'autre équation est $y' = 0$.

4182. $y = C_1 x (x - C_1) + C_2$. Solutions singulières : $y = \frac{x^3}{3} + C$.

4183. $y^2 = C_1 x^4 + C_2$. 4184. $x = \ln \left| \frac{C_1 x^{C_1}}{C_2 - x^{C_1}} \right|$.

4185. $y = \sqrt{\frac{1}{3} x^3 + C_1 x + C_2}$. 4186. $y = C_1 x + \frac{C_2}{x}$.

4187. $y = C_1 x e^{\frac{C_2}{x}}$. 4188. $\ln |y + C_1| + \frac{C_1}{y + C_1} = x + C_2$.

4189. $y = x^3 + 3x + 1$.

4190. $y = 2 + \ln \frac{x^2}{4}$. 4191. $y = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{2x} - \frac{16}{5}$.

4192. $y = \frac{4}{(x+4)^2}$. 4193. $y - x = 2 \ln |y|$.

4194. $y = \sqrt{2x - x^2}$.

4195. $y = \sqrt{1 + e^{2x}}$. 4196. $y = -\ln |1 - x|$. 4197. $y = \frac{x+1}{x}$.

4198*. $y = x$. Faire le changement $y = ux$. 4199. $y = 2e^{\frac{1}{2} x^2} - 1$.

4200*. Equation différentielle de la courbe $dx = \frac{dy}{\sqrt{(C_1 y)^{\frac{2}{k}} - 1}}$, où $k$ est le coefficient de proportionnalité. Si $k = 1$, alors $y = \frac{1}{2C_1} [e^{C_1 x + C_2} + e^{-(C_1 x + C_2)}] = \frac{\operatorname{ch}(C_1 x + C_2)}{C_1}$ ; c'est une chaînette. Si $k = -1$, alors $(x + C_2)^2 + y^2 = C_1^2$ ; c'est une circonférence. Si $k = 2$, alors $(x + C_2)^2 = 4C(y - C_1)$ ; c'est une parabole. Si $k = -2$, alors $dx = \sqrt{\frac{C_1 y}{1 - C_1 y}} dy$ ; c'est l'équation différentielle de la cycloïde.

4201. $e^{y/a} = C_2 \sec \left( \frac{x}{a} + C_1 \right)$. 4202. $Cx = y^{2k-1}$.

4203. La chaînette. 4204. $v = \sqrt{\frac{mgv_0^2}{mg + kv_0^2}}$.

4205. Une parabole. 4206. $S = \frac{m}{3k} \left[ \sqrt{\left( \frac{2k}{m} t + C \right)^3} - \sqrt{C^3} \right]$.

4207*. Supposons que l'axe des abscisses est orientée verticalement vers le bas, que l'origine des coordonnées est sur la surface du liquide et que l'équation du rayon est $y = f(x)$. A une profondeur $x$ on a $\frac{\sin \alpha}{\sin (\alpha + d\alpha)} = \frac{m + dm}{m}$, où $m$ est l'indice de réfraction à la profondeur $x$ et $\alpha$ l'angle que fait la verticale avec la tangente au rayon de lumière. On a visiblement $\operatorname{tg} \alpha = y'$. Si l'on développe l'équation $m \sin \alpha = (m + dm)(\sin \alpha \cos d\alpha + \cos \alpha \sin d\alpha)$ et que l'on néglige les infiniment petits d'ordre supérieur à 1 on obtient : $m\, d\alpha =$

$= -dm \operatorname{tg} \alpha$ d'où $\frac{dm}{m} = -\frac{dy'}{y'(1+y'^2)}$. En intégrant cette équation on détermine $y'$ comme une fonction de $m$. En remplaçant $m$ par son expression en $x$ et en intégrant une seconde fois on obtient la solution:

$$y = \frac{m_0 h \sin \alpha_0}{m_2 - m_1} \ln \left| m + \sqrt{m^2 - m_0^2 \sin^2 \alpha_0} \right| + C,$$

où $m = \frac{(m_2 - m_1)x + m_1 h}{h}$.

4208. $y = x^2 \ln \sqrt{x} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$.

4209. $y = -\frac{1}{8} \sin 2x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$.

4210. $y = \frac{e^{ax}}{a^{10}} + P_9$ ($P_9$ est un polynôme du 9-ième degré en $x$ à coefficients arbitraires).

4211. $y = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 - C_1^2 (x + C_1) \ln |x + C_1|$.

4212. $y = C_1 x^5 + C_2 x^3 + C_3 x^2 + C_4 x + C_5$.

4213. $y = \frac{1}{3}(C_1 - 2x)^{\frac{3}{2}} + C_2 x + C_3$. 4214. $x = C_1 y^2 + C_2 y + C_3$.

4215. Les solutions peuvent s'écrire sous trois formes: $y = C_1 \sin (C_2 x + C_3)$; $y = C_1 \operatorname{sh} (C_2 x + C_3)$; $y = C_1 \operatorname{ch} (C_2 x + C_3)$.

4216. $(x + C_2)^2 + (y + C_3)^2 = C_1^2$.

4217. $y = C_2 \left( x e^{C_1 x} - \frac{1}{C_1} e^{C_1 x} \right) + C_3$.

4219. 2) $y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} + \frac{3x^4}{4!} + \frac{14x^5}{5!} + \ldots$

4220. $y = 1 - \frac{(x-1)^2}{2!} - \frac{2(x-1)^4}{4!} + \frac{3(x-1)^5}{5!} + \ldots$

4221. $y = \frac{\pi}{2}(x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3!} - \frac{(x-1)^4}{4!} - \frac{4(x-1)^5}{5!} + \ldots$

4222. $y = 1 + x + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + \frac{3x^5}{5!} + \ldots$ Si $f(x) \approx 1 + x + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!}$, alors pour $x = -0{,}5$ on obtient une série numérique alternée et le premier des cinq premiers termes négligés est inférieur à 0,001.

4223. $y = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{4x^5}{5!} - \frac{14x^6}{6!} + \ldots$; du cinquième.

4224. $y = x^2 - \frac{1}{10} x^5 + \frac{1}{80} x^8 - \frac{7}{4400} x^{11} + \ldots$; 0,318; 0,96951.

4225*. Equation différentielle $E = L \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{dQ}{dt} \cdot \frac{V_0 - kQ}{k_1}$, où $Q$ est la quantité d'électricité qui a traversé le circuit dans le temps $t$ écoulé depuis le début de l'expérience. En exprimant $Q$ en fonction de $V$ ($V$ étant la quantité d'eau contenue dans le voltamètre à l'instant $t$) et en définissant les coefficients à partir des hypothèses de l'exercice, on aboutit à l'équation $V'' + aVV' + b = 0$, où $a = \frac{1}{k_1 L} = 0{,}005$, $b = \frac{kE}{L} = 0{,}00935$. En l'intégrant

avec les conditions initiales $V_0 = 1000$ cm³, $V_0' = -kI_0 = -0{,}00187$ cm³/s, on obtient la série $V = 1000 - 0{,}00187t - 10^{-9}[2{,}91t^3 - 3{,}64t^4 + 3{,}64t^5 - 3{,}04t^6 + 2{,}17t^7 - \ldots]$. La série est alternée, les coefficients décroissent à partir du sixième et tendent vers 0, ce qui simplifie les calculs.

**4226*.** L'équation différentielle s'écrit

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{dQ}{dt}\cdot\frac{k_1}{M_0 - kQ} = E.$$

Si l'on prend pour fonction inconnue la quantité $y$ de gaz chlorhydrique non décomposé à l'instant $t$, on aboutit à une équation de la forme $yy'' + ay' + by = 0$, où $a = \frac{k_1}{L} = 50$, $b = \frac{kE}{L} = 0{,}0191$. En intégrant cette équation avec les conditions initiales $y_0 = M_0 = 10$; $y_0' = -kI_0 = -0{,}00381$ on obtient la série

$$y = 10 - 0{,}00381t + 10^{-10}t^3\cdot(1{,}21 - 1{,}52t + \ldots).$$

**4227.** $x^2y'' - 6xy' + 12y = 0$.

**4228.** $xy'' - (2x + 1)\,y' + (x + 1)\,y = 0$.

**4229.** $(x^3 - 3x^2 + 3x)\,y''' - (x^3 - 3x + 3)\,y'' - 3x\,(1 - x)\,y' + 3\,(1 - x)\,y = 0$.

**4230.** $y = 3x^2 - 2x^3$.

**4231.** a) $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \neq \text{const}$; b) $y''\sin 2x - 2y'\cos 2x = 0$.

**4232*.** 3) En vertu de la formule d'Ostrogradski

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = C\cdot e^{-\int P(x)\,dx},$$

ou en développant le déterminant (le wronskien): $y_1y_2' - y_1'y_2 = Ce^{-\int P(x)\,dx}$. Divisons les deux membres de l'équation par $y_1^2$, on a $\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{C}{y_1^2}e^{-\int P(x)\,dx}$, d'où l'on déduit la relation cherchée.

**4233.** $y = C_1x\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - 2C_1 + C_2x$.

**4234.** $y = C_1\frac{\sin x}{x} + C_2\frac{\cos x}{x}$. **4235.** $y = x^2 - e^{x-1}$.

**4236*.** Entre les fonctions $P$ et $Q$ on doit avoir la relation $Q' + 2P\cdot Q = 0$. Porter $y_1 = 1/y_2$ dans la formule (qui découle de la formule d'Ostrogradski) de l'exercice 4232, dériver deux fois l'expression obtenue et porter $y_2'$ et $y_2''$ dans l'équation donnée.

**4237*.** $y = C_1(4x^3 - 3x) + C_2\sqrt{1 - x^2}\,(4x^2 - 1)$. Par hypothèse $y_1 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$. Portant $y_1$ dans l'équation donnée on déduit $B = 0$, $D = 0$, $A/C = 4/-3$ ou $A = 4k$ et $C = -3k$. Donc la solution particulière sera $y_1 = k(4x^3 - 3x)$. En vertu de la propriété de l'équation linéaire on peut prendre $k = 1$ et il s'ensuit que $y_1 = 4x^3 - 3x$. Connaissant une solution particulière on en détermine une autre, puis on compose la solution générale.

**4238.** $y = C_1\sin x + C_2\left[1 - \sin x\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right|\right]$.

**4239.** $y = C_1x + C_2x\int\frac{e^x\,dx}{x^2}$. **4240.** $y = C_1x + C_2(x^2 - 1)$.

**4241.** $y = C_1x + C_2x^2 + C_3x^3$. **4242.** $y = x^3 + x(C_1 + C_2\ln|x|)$.

4243. $y = C_1e^x + C_2x - x^2 - 1$. 4244. $y = C_1x^3 + C_2(x+1) - x$.

4245. $y=2+3x+x\left(\frac{\pi}{2}+2\operatorname{arctg} x\right)+x^2$.

4246. $y=-2+2x-x^2+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{7x^5}{60}-\ldots$

4247. $y=1+\frac{2x^4}{4!}-\frac{2x^5}{5!}+\frac{2x^6}{6!}-\frac{2x^7}{7!}+\frac{62x^8}{8!}-\ldots$

4248. $y=\frac{x^2}{2}+\left[\frac{x^4}{4!}+\frac{3x^6}{6!}+\frac{5x^8}{8!}+\ldots+\frac{(2n-1)x^{2n+2}}{(2n+2)!}+\ldots\right]$.

4249. $y=C_1\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}+\frac{x^5}{24}+\ldots\right)+$
$+C_2\left(x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}+\frac{x^5}{30}+\ldots\right)$.

4250. $y=C_1\left(1+\frac{x^4}{12}+\ldots\right)+C_2\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\ldots\right)$.

4251. $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$. 4252. $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$.

4253. $y=C_1e^{4x}+C_2$. 4254. $y=C_1e^{(1+\sqrt{2})x}+C_2e^{(1-\sqrt{2})x}$.

4255. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-\frac{4}{3}x}$. 4256. $y=C_1\cos x+C_2\sin x$.

4257. $y=e^{-3x}(C_2\cos 2x+C_2\sin 2x)$.

4258. $y=e^x\left(C_1\cos\frac{x}{2}+C_2\sin\frac{x}{2}\right)$. 4259. $y=e^x(C_1+C_2x)$.

4260. $x=(C_1+C_2t)e^{2,5t}$. 4261. $y=(C_1+C_2x)e^{-\frac{1}{4}x}$.

4262. $y=4e^x+2e^{3x}$. 4263. $y=3e^{-2x}\sin 5x$.

4264. $y=e^{-\frac{x}{2}}(2+x)$.

4265. $y=[1+(1-m)x]e^{mx}$. 4266. $y=\cos 3x-\frac{1}{3}\sin 3x$.

4267. Si $k>0$, alors $y=\frac{a}{\sqrt{k}}\sin[\sqrt{k}(x-x_0)]+y_0\cos[\sqrt{k}(x-x_0)]$; si $k<0$, alors $y=\frac{1}{2\sqrt{k_1}}[(y_0\sqrt{k_1}+a)e^{\sqrt{k_1}(x-x_0)}+(y_0\sqrt{k_1}-a)e^{-\sqrt{k_1}(x-x_0)}]$, où $k_1=-k$.

4268. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{\frac{x}{2}}+e^x$. 4269. $y=C_1\cos ax+C_2\sin ax+\frac{e^x}{a^2+1}$.

4270. $y=C_1e^{6x}+C_2e^x+\frac{5\sin x+7\cos x}{74}$.

4271. $y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)-\frac{1}{2}\cos 2x-2\sin 2x$.

4272. $y=(C_1+C_2x)e^{3x}+\frac{2}{9}x^2+\frac{5}{27}x+\frac{11}{27}$.

4273. $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)+x+1$. 4274. $y=C_1e^x+C_2e^{-5x}-0,2$.

4275. $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\bar{y}$, où $\bar{y}$ est égal à : 1) $\frac{5}{3}e^{-x}$; 2) $3xe^{2x}$; 3) $\frac{3}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x$; 4) $x^3+\frac{9}{2}x^2+\frac{21}{2}x-\frac{15}{4}$;

5) $-\frac{8}{5}e^x\left[\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\right]$;

6) $\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}-\frac{1}{12}e^{-2x}$; 7) $e^x(2x^2+x)$; 8) $\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}(9+3\cos 2x-\sin 2x)$;

9) $-2xe^x-\frac{1}{12}e^{-2x}$; 10) $\frac{1}{20}\cos x-\frac{3}{20}\sin x+\frac{7}{260}\cos 3x+\frac{9}{260}\sin 3x$;

11) $-\frac{1}{12}e^{-x}-\frac{1}{2}xe^x$.

4276. $y=C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}x}+\bar{y}$, où $\bar{y}$ est égal à: 1) $\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{5}x^2+\frac{7}{25}x$;

2) $\frac{1}{7}e^x$; 3) $5\sin x-2\cos x$; 4) $\frac{1}{10}x+\frac{5}{164}\sin 2x-\frac{1}{41}\cos 2x$; 5) $\cos 2{,}5x+$

$+\sin 2{,}5x-0{,}02xe^{-2{,}5x}$; 6) $\left(-5x-\frac{16}{29}\right)\cos x-\left(2x-\frac{185}{29}\right)\sin x$;

7) $e^{-x}[(10x+18)\sin x-(20x+1)\cos x]$; 8) $\frac{3}{10}\left(\frac{1}{5}e^{\frac{5}{2}x}-xe^{-\frac{5}{2}x}\right)$.

4277. $y=e^{2x}(C_1+C_2x)+\bar{y}$, où $\bar{y}$ est égal à: 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{9}e^{-x}$;

3) $\frac{3}{2}x^2e^{2x}$; 4) $\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$: 5) $\frac{1}{169}\left(\frac{-5}{2}\sin 3x+6\cos 3x\right)-$

$-\frac{1}{50}\left(3\sin x+4\cos x\right)$; 6) $\frac{3}{100}(3\sin x+4\cos x)+\frac{1}{676}(5\sin 3x-12\cos 3x)$;

7) $2x^2+4x+3+4x^2e^{2x}+\cos 2x$; 8) $\frac{1}{4}\left(x^2e^{2x}-\frac{1}{8}e^{-2x}\right)$;

9) $\frac{1}{2}\left(e^x-\frac{1}{9}e^{-x}\right)+\frac{1}{25}(3\sin x+4\cos x)$; 10) $e^x-\frac{1}{2}e^{x-1}+\frac{1}{18}e^{1-x}$.

4278. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\bar{y}$, où $\bar{y}$ est égal à: 1) $2x^3-13x+2$; 2) $\cos 3x$;

3) $\frac{1}{2}x\sin x$; 4) $-\frac{1}{2}x\cos x-e^{-x}$; 5) $\frac{1}{4}\left(x\sin x-\frac{1}{4}\cos 3x\right)$;

6) $9+4\cos 2x-0{,}2\cos 4x$; 7) $0{,}5\operatorname{ch}x$; 8) $0{,}5+0{,}1\operatorname{ch}2x$.

4279. $y=e^{\frac{3}{5}x}\left(C_1\cos\frac{4}{5}x+C_2\sin\frac{4}{5}x\right)+\bar{y}$, où $\bar{y}$ est égal à: 1) $\frac{25}{16}e^{\frac{3}{5}x}$;

2) $\frac{15}{219}\sin\frac{4}{5}x+\frac{40}{219}\cos\frac{4}{5}x$; 3) $\frac{1}{13}e^{2x}+\frac{1}{5}\left(2x^3+\frac{36}{5}x^2+\frac{107}{25}x-\frac{908}{125}\right)$;

4) $-\frac{5}{9}\cos x\cdot e^{\frac{3}{5}x}$; 5) $-\frac{1}{8}xe^{\frac{3}{5}x}\cos\frac{4}{5}x$; 6) $0{,}5e^{2x}+1{,}3$.

4280. $y=2+C_1\cos x+C_2\sin x+\cos x\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$.

4281. $y=e^x(C_1+C_2x-\ln\sqrt{x^2+1}+x\operatorname{arctg}x)$.

4282. 1) $y=e^x(x+C_1)-(e^x+1)\ln(e^x+1)+C_2$; 2) $y=\frac{1}{2}e^x[\arcsin e^x+$

$+e^x\sqrt{1-e^{2x}}+C_1]+\frac{1}{3}\sqrt{(1-e^{2x})^3}+C_2$; 3) $y=C_1e^x-\cos e^x+C_2$.

4283. $y=(1+x)e^{-\frac{3}{2}}+2e^{-\frac{5}{2}x}$.

4284. $x=e^x(0{,}16\cos 3x+0{,}28\sin 3x)+x^2+2.2x+0{,}84$.

4285. $y = e^x + x^2$. 4286. $y = e^x (e^x - x^3 - x + 1)$.

4287. $y = \frac{1}{3}\sin 2x - \frac{1}{3}\sin x - \cos x$.

4288*. Dériver deux fois les expressions données de $y$; porter $y$, $y'$ et $y''$ dans l'équation; dans les trois cas on obtient une identité.

4289. $y = x^3 (C_1 + C_2 x^4)$. 4290. $y = \frac{x}{2} + C_1 \cos \ln |x| + C_2 \sin \ln |x|$.

4291. $y = x [C_1 + C_2 \ln |x| + \ln^2 |x|]$.

4292. $y = x \ln |x| + C_1 x + C_2 x^2 + x^3$.

4293. Si $\frac{1}{m\alpha} > \omega^2$, alors $y = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt +$

$$+ \frac{g}{k^2 - \omega^2} \cos \omega t + \frac{e\omega^2}{k^2}, \quad \text{où} \quad k^2 = \frac{1}{m\alpha} - \omega^2.$$

Si $\frac{1}{m\alpha} < \omega^2$, alors $y = C_2 e^{kt} + C_2 e^{-kt} - \frac{g}{k^2 + \omega^2} \cos \omega t - \frac{e\omega^2}{k^2}$, où $k^2 = \omega^2 - \frac{1}{m\alpha}$.

4294. $s = \frac{1}{5}(4e^t + e^{-4t})$.

4295. $s = e^{-0,2t} [10 \cos (0,245t) + 8,16 \sin (0,245t)]$; $s|_{t=3} \approx 7,07$ cm.

4296. $t = \sqrt{\frac{am}{f}} \ln \frac{F + \sqrt{f(2F - f)}}{F - f}$.

4297. $s = e^{-0,245t} [2 \cos (156,5t) + 0,00313 \sin (156,6t)]$.

4298*. $k = 33\frac{1}{3}\frac{g}{cm} = 33\frac{1}{3} \cdot g \frac{dyn}{cm}$; $t = 0,38$ s. La hauteur de la partie immergée du billot est $x = 5[3 + \cos (8,16t)]$. En composant l'équation on prendra $g = 1000$ cm/s$^2$.

4299*. $r = \frac{a_0}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t})$. Tout se passe comme si le tube était immobile et la boule soumise à l'action d'une force égale à $m\omega^2 r$ ($r$ étant la distance de l'axe de rotation à la boule).

4300. Si $k > m\omega^2$, alors $r = \frac{a_0}{k - m\omega^2}\left[k - m\omega^2 \cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2}\right)\right]$;

si $k = m\omega^2$, alors $r = a_0\left(1 + \frac{k}{2m}t^2\right)$;

si $k < m\omega^2$, alors $r = \frac{a_0}{m\omega^2 - k}\left[m\omega^2 \operatorname{ch}\left(t\sqrt{\omega^2 - \frac{k}{m}}\right) - k\right]$.

4301. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + C_3$.

4302. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{3x} + C_4 e^{-3x}$.

4303. $y = (C_1 + C_2 x) e^{2x} + (C_3 + C_4 x) e^{-2x}$.

4304. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$.

4305. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + C_3 e^{4x}$.

4306. $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x$.

4307. $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x}$.

4308. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 x^{n-3} + C_4 x^{n-4} + \ldots + C_{n-1} x + C_n$.

4309. $y = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_1 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_2 \sin \frac{x}{\sqrt{2}}\right) +$

$$+ e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_3 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_4 \sin \frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

4310. $y=(C_1+C_2x+C_3x^2)\cos\frac{x}{2}+(C_4+C_5x+C_6x^2)\sin\frac{x}{2}+C_7x+C_8.$

4311. $y=e^{-x}(C_1+C_2x+C_3x^2+\ldots+C_nx^{n-1}).$

4312. $y=1+\cos x.$ 4313. $y=e^x+\cos x-2.$

4314. $y=(C_1+C_2x)e^x+C_3e^{2x}-x-4.$

4315. $y=(C_1+C_2x)e^x+C_3e^{-2x}+(x^2+x-1)e^{-x}.$

4316. $y=(C_1+C_2x)\cos 2x+(C_3+C_4x)\sin 2x+\frac{1}{9}\cos x.$

4317. $y=(C_1+C_2x)\cos ax+(C_3+C_4x)\sin ax-\frac{x^2\cos ax}{8a^2}.$

4318. $y=\frac{1}{60}x^5-\frac{1}{2}x^3+C_1x^2+C_2x+C_3+C_4\cos x+C_5\sin x.$

4319. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\sin x+C_4\cos x+\frac{x^2-3x}{8}e^x-\frac{1}{4}x\sin x.$

4320. $y=(C_1+C_2x+x^2)e^x+(C_3+C_4x+x^2)e^{-x}+\sin x+\cos x.$

4321. $y=4-3e^{-x}+e^{-2x}.$ 4322. $y=e^x+x^3.$

4323. $y=x(C_1+C_2\ln|x|+C_3\ln^2|x|).$

4324.1. $\begin{cases} x=e^{-6t}(C_1\cos t+C_2\sin t),\\ y=e^{-6t}[(C_2+C_1)\cos t+(C_2-C_1)\sin t].\end{cases}$

4324.2. $\begin{cases} x=C_1e^t+C_2e^{5t},\\ y=-C_1e^t+3C_2e^{5t}.\end{cases}$ 4324.3. $\begin{cases} x=e^t(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t),\\ y=e^t(C_1\sin 3t-C_2\cos 3t).\end{cases}$

4324.4. $\begin{cases} x=C_1e^t+C_2e^{2t}+C_3e^{-t},\\ y=C_1e^t-3C_3e^{-t},\\ z=C_1e^t+C_2e^{2t}-5C_3e^{-t}.\end{cases}$

4324.5. $\begin{cases} x=C_1+3C_2e^{2t},\\ y=-2C_2e^{2t}+C_3e^{-t},\\ z=C_1+C_2e^{2t}-2C_3e^{-t}.\end{cases}$

4324.6. $\begin{cases} x=C_1e^t+C_2e^{2t}+C_3e^{5t},\\ y=C_1e^t-2C_2e^{2t}+C_3e^{5t},\\ z=-C_1e^t-3C_2e^{2t}+3C_3e^{5t}.\end{cases}$

4324.7. $\begin{cases} x=C_1e^{2t}+e^{3t}(C_2\cos t+C_3\sin t),\\ y=e^{3t}[(C_2+C_3)\cos t+(C_3-C_2)\sin t],\\ z=C_1e^{2t}+e^{3t}[(2C_2-C_3)\cos t+(C_2+2C_3)\sin t].\end{cases}$

4325. $\begin{cases} x=C_1e^t+C_2e^{-t}+t\,\mathrm{sh}\,t,\\ y=C_1e^t-C_2e^{-t}+\mathrm{sh}\,t+t\,\mathrm{ch}\,t.\end{cases}$

4326. $\begin{cases} x=C_1e^{-4t}+C_2e^{-7t}+\frac{7}{40}e^t+\frac{1}{5}e^{-2t},\\ y=\frac{1}{2}C_1e^{-4t}-C_2e^{-7t}+\frac{1}{40}e^t+\frac{3}{10}e^{-2t}.\end{cases}$

4327. $\begin{cases} z=C_1y;\\ zy^2-\frac{3}{2}x^2=C_2.\end{cases}$ 4328. $\begin{cases} y=\dfrac{\sqrt{C_1+x^2}}{\ln\left|\dfrac{C_2}{x+\sqrt{x^2+C_1}}\right|},\\ z=\sqrt{C_1+x^2}\ln\left|\dfrac{C_2}{x+\sqrt{x^2+C_1}}\right|.\end{cases}$

4329. $\begin{cases} \frac{y}{x}=C_1;\\ x^2+y^2+z^2=C_2.\end{cases}$ 4330. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=C_1y;\\ z=C_2y.\end{cases}$

4331. $\begin{cases} y^2-z^2=C_1; \\ yz-y^2-x=C_2. \end{cases}$ 4332. $\begin{cases} x=C_1e^{-t}+C_2e^{-3t}, \\ y=C_1e^{-t}+3C_2e^{-3t}+\cos t. \end{cases}$

4333. $\begin{cases} x=C_1e^t+C_2e^{-t}+C_3\cos t+C_4\sin t, \\ y=C_1e^t+C_2e^{-t}-C_3\cos t-C_4\sin t. \end{cases}$

4334. $\begin{cases} x=C_1+C_2t-C_3t^2-\frac{1}{6}t^3+e^t, \\ y=C_4-(C_1+2C_3)t-\frac{1}{2}(C_2-1)t^2-\frac{1}{3}C_3t^3+\frac{t^4}{24}+e^t. \end{cases}$

4335. $\begin{cases} x+y+z=C_1; \\ x^2+y^2+z^2=C_2. \end{cases}$ 4336. $\begin{cases} z=x-y; \\ y(y-2x)^3=(x-y)^2. \end{cases}$

4337. $\begin{cases} x=\frac{t}{3}, \\ y=-\frac{t}{3}. \end{cases}$

4338. $\begin{cases} x=\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{1}{6}e^{2t}+\frac{1}{2}e^{-2t}, \\ y=\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{1}{6}e^{2t}-\frac{1}{2}e^{-2t}, \\ z=-\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t}. \end{cases}$ 4339. $\begin{cases} x=-e^{-t}, \\ y=e^{-t}, \\ z=0. \end{cases}$

4340. Les courbes $y_1=\frac{C_1x^2-C_2}{2x}$ et $y_2=-\frac{C_1x^2+C_2}{2x}$. Avec les conditions initiales données on obtient les hyperboles

$$y_1=\frac{3-x^2}{2x}, \quad y_2=\frac{3+x^2}{2x}.$$

4341. $y=e^{2x}$. 4342. La courbe plane $\begin{cases} x-y+z=0; \\ x=\pm\frac{z\ln|z|}{\sqrt{2}}. \end{cases}$

4343. $\begin{cases} x=\frac{1}{2}\left[gt^2+(l_1-l_0)\left(1-\cos\frac{\pi t}{2T}\right)\right], \\ y=\frac{1}{2}\left[gt^2+l_0+l_1+(l_1-l_0)\cos\frac{\pi t}{2T}\right]. \end{cases}$

4344. $\begin{cases} x=10\operatorname{ch}2t-\frac{4}{49}\cos 14t+\frac{200}{49}, \\ y=10\operatorname{ch}2t+\frac{6}{49}\cos 14t-\frac{300}{49}. \end{cases}$

$x$ représente ici l'espace parcouru par la boule la plus lourde, $y$ par la moin lourde.

4345 $A=\frac{k\alpha^2}{2k_1}\left[1-\left(\frac{1-\beta e^{\alpha kt}}{1+\beta e^{\alpha kt}}\right)^2\right]$, $B=\alpha\frac{1-\beta e^{\alpha kt}}{1+\beta e^{\alpha kt}}$, où

$$\alpha=\sqrt{B_0^2+\frac{2k_1}{k}A_0}, \quad \beta=\frac{\alpha-B_0}{\alpha+B_0}.$$

4346*. Si $T$ est la quantité de poison, alors $\frac{dN}{dt}=aN-bNT$, $\frac{dT}{dt}=cN$ et $\frac{dN}{dt}=0$ au moment où $N=M$.

4347. $h_1 = \frac{S_1H_1+S_2H_2}{S_1+S_2} + \frac{S_2}{S_1+S_2}(H_1-H_2)\, e^{-\alpha\frac{S_1+S_2}{S_1S_2}}$,

$$h_2 = \frac{S_1H_1+S_2H_2}{S_1+S_2} - \frac{S_1}{S_1+S_2}(H_1-H_2)\, e^{-\alpha\frac{S_1+S_2}{S_1S_2}}.$$

4348. 1) $\theta-\theta_0+0{,}002(\theta^2-\theta_0^2) = 0{,}00008\frac{E_1^2t^3}{R_0T^2}$; de 53°;

2) $\theta-\theta_0+0{,}002(\theta^2-\theta_0^2) = \frac{6E_0^2}{\pi R_0\cdot 10^7}\cdot(200\pi t-\sin 200\pi t)$; de 76°.

4349. 1) 44,5°; 2) 46,2°.

4350.

| $x$ | 1,00 | 1,05 | 1,10 | 1,15 | 1,20 | 1,25 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1,000 | 1,000 | 0,997 | 0,992 | 0,984 | 0,973 |

| $x$ | 1,30 | 1,35 | 1,40 | 1,45 | 1,50 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0,959 | 0,942 | 0,923 | 0,901 | 0,876 |

4351. $y|_{x=1} = 3{,}43656\ldots$

| $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ |
|---|---|---|---|---|
| 2,5 | 3,16667 | 3,37500 | 3,42500 | 3,43472 |

$y_5$ donne une erreur relative de l'ordre de 0,1 %.

4352. 0,46128; la formule de Simpson donne le même résultat pour $2n = 10$. Toutes les décimales sont vraies.

4353. $y_4 = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+\frac{7x^4}{12}+\frac{5x^5}{12}+\frac{16x^6}{75}+\ldots$ etc.;

$$y_4(0{,}3) \approx 1{,}543;$$

$$f(x) = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+\frac{7x^4}{12}+\frac{11x^5}{20}+\frac{22x^6}{45}+\ldots \text{ etc.};$$

$$f(0{,}3) \approx 1{,}545.$$

L'erreur est inférieure à 0,2 %.

4354. 0,808.

4355*. 1,001624. On obtient ce résultat plus rapidement si l'on cherche la fonction immédiatement sous la forme d'une série entière.

4356*. 1,0244. Voir indication de l'exercice précédent.

4357. $x = x+\frac{2}{4!}x^4+\frac{2\cdot 5}{7!}x^7+\ldots+\frac{2\cdot 5\ldots(3n-1)}{(3n+1)!}x^{3n+1}+\ldots$;

$k = 0{,}2297$.

4358. $\sin^{2k}x=\frac{C_{2k}^k}{2^{2k}}+\frac{(-1)^k}{2^{2k-1}}[\cos 2kx-C_{2k}^1\cos(2k-2)x+$

$$+C_{2k}^2\cos(2k-4)x-\ldots+(-1)^{k-1}C_{2k}^{k-1}\cos 2x];$$

$$\sin^{2k+1}x=\frac{(-1)^k}{2^{2k}}[\sin(2k+1)x-C_{2k+1}^1\sin(2k-1)x+$$

$$+C_{2k+1}^2\sin(2k-3)x-\ldots+(-1)^kC_{2k+1}^k\sin x];$$

$$\cos^{2k}x=\frac{C_{2k}^k}{2^{2k}}+\frac{1}{2^{2k-1}}[\cos 2kx+C_{2k}^1\cos(2k-2)x+$$

$$+C_{2k}^2\cos(2k-4)x+\ldots+C_{2k}^{k-1}\cos 2x];$$

$$\cos^{2k+1}x=\frac{1}{2^{2k}}[\cos(2k+1)x+C_{2k+1}^1\cos(2k-1)x+$$

$$+C_{2k+1}^2\cos(2k-3)x+\ldots+C_{2k+1}^k\cos x].$$

4360. $\cos nx=\cos^n x-C_n^2\cos^{n-2}x\sin^2 x+C_n^4\cos^{n-4}x\sin^4 x\ldots$

Comme $\sin x$ ne figure que comme une puissance paire on peut exprimer $\cos nx$ comme une fonction rationnelle de $\cos x$.

4363. 1) $\varphi=\nu\frac{2\pi}{n}$ et $\varphi=\nu\frac{2\pi}{n+1}$, où $\nu=0, 1, 2, \ldots, n$;

2) $\varphi=\nu\frac{2\pi}{n}$, où $\nu=1, 2, \ldots, n-1$ pour $n$ impair et $\nu=1, 2, \ldots, n$ pour $n$ pair, et $\varphi=(2\nu-1)\frac{\pi}{n+1}$, où $\nu=1, 2, \ldots, n+1$.

4365*. On remarquera que $\int_0^{2\pi}\Phi_n(\varphi)\,d\varphi=0$. 4366. Oui.

4371. a) $b_1=b_2=b_3=\ldots=0$ et $a_1=a_3=a_5=\ldots=0$;
b) $a_0=a_1=a_2=\ldots=0$ et $b_1=b_3=b_5=\ldots=0$.

4372. $\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$. 4373. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{2n}$.

4374. $x=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}\ (-\pi, \pi)$;

$$\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}\ (0, 2\pi).$$

4375. $\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$.

4376. 1) $\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$;

2) $\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}-4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$;

$$S_1=\frac{\pi^2}{6},\quad S_2=\frac{\pi^2}{12},\quad S_3=\frac{\pi^2}{8}.$$

4377. $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left\{\frac{\pi^2}{n}+\frac{2}{n^3}[(-1)^n-1]\right\}\sin nx.$

4378. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{12}{n^3}-\frac{2\pi^2}{n}\right)\sin nx.$

4379. $2+\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}.$ 4380. $\frac{2h}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nh}{nh}\cos nx\right].$

4381. $\frac{2h}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2\cos nx\right].$

4382. $\frac{l}{2}-\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\left[\frac{(2n+1)\pi x}{l}\right]}{(2n+1)^2}.$

4383. $\frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{1+n^2}-\frac{n\sin nx}{1+n^2}\right)\right]-1.$

4384. $$\frac{e^l-e^{-l}}{2l}+l(e^l-e^{-l})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\frac{n\pi x}{l}}{l^2+n^2\pi^2}+$$

$$+\pi(e^l-e^{-l})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n\sin\frac{n\pi x}{l}}{l^2+n^2\pi^2}=$$

$$=\operatorname{sh}l\left[\frac{1}{l}+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{l\cos\frac{n\pi x}{l}-\pi n\sin\frac{n\pi x}{l}}{l^2+n^2\pi^2}\right].$$

4385. $\frac{2\sin\pi a}{\pi}\left(\frac{1}{2a}+\frac{a\cos x}{1-a^2}-\frac{a\cos 2x}{2^2-a^2}+\ldots\right).$

4386. $\frac{2\sin\pi a}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1-a^2}-\frac{2\sin 2x}{2^2-a^2}+\frac{3\sin 3x}{3^2-a^2}-\ldots\right).$

4387. $\sin ax=\begin{cases}\frac{4a}{\pi}\left[\frac{\cos x}{a^2-1}+\frac{\cos 3x}{a^2-3^2}+\frac{\cos 5x}{a^2-5^2}+\ldots\right]\ (a\text{—pair});\\ \frac{4a}{\pi}\left[\frac{1}{2a^2}+\frac{\cos 2x}{a^2-2^2}+\frac{\cos 4x}{a^2-4^2}+\ldots\right]\ (a\text{—impair}).\end{cases}$

4388. $\cos ax=\begin{cases}-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin x}{a^2-1^2}+\frac{3\sin 3x}{a^2-3^2}+\frac{5\sin 5x}{a^2-5^2}+\ldots\right]\ (a\text{—pair});\\ -\frac{4}{\pi}\left[\frac{2\sin 2x}{a^2-2^2}+\frac{4\sin 4x}{a^2-4^2}+\frac{6\sin 6x}{a^2-6^2}+\ldots\right]\ (a\text{—impair}).\end{cases}$

4389. $\frac{2\operatorname{sh} a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{a^2+n^2}\sin nx.$

4390. $\frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{1+n^2}\right];\ \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n\operatorname{ch}\pi}{1+n^2}n\sin nx.$

4391. $$f(x)=\frac{1}{3}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\sin\frac{2\pi n}{3}}{n}-\frac{3\left(1-\cos\frac{2\pi n}{3}\right)}{2\pi n^2}\right]\times$$

$$\times\cos\frac{2\pi nx}{3}=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{\pi}\left(\frac{\cos\frac{2\pi x}{3}}{1}-\frac{\cos\frac{4\pi x}{3}}{2}+\frac{\cos\frac{8\pi x}{3}}{4}-\ldots\right)-$$

$$-\frac{9}{2\pi^2}\left(\frac{\cos\frac{2\pi x}{3}}{1^2}+\frac{\cos\frac{4\pi x}{3}}{2^2}+\frac{\cos\frac{8\pi x}{3}}{4^2}+\ldots\right).$$

4392*. $$f(x)=\frac{\pi}{6}+\frac{3}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{3}}{n^2}\left(\cos\frac{n\pi}{3}\sin 2nx-\sin\frac{n\pi}{3}\cos 2nx\right)=$$

$$=\frac{\pi}{6}+\frac{3\sqrt{3}}{8\pi}\left(\frac{\sin 2x}{1^2}-\frac{\sin 4x}{2^2}+\frac{\sin 8x}{4^2}-\frac{\sin 10x}{5^2}+\ldots\right)-$$

$$-\frac{9}{8\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1^2}+\frac{\cos 4x}{2^2}+\frac{\cos 8x}{4^2}+\frac{\cos 10x}{5^2}+\ldots\right).$$

Se servir de la solution de l'exercice 4368.

4393*. 1) $f(x)=\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin\alpha\cdot\sin x}{1^2}+\frac{\sin 3\alpha\cdot\sin 3x}{3^2}+\ldots\right);$

2) $$f(x)=\frac{\alpha(\pi-\alpha)}{\pi}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos 2n\alpha}{n^2}\cos 2nx=$$

$$=\frac{\alpha(\pi-\alpha)}{\pi}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin^2\alpha\cdot\cos 2x}{1^2}+\frac{\sin^2 2\alpha\cdot\cos 4x}{2^2}+\ldots\right).$$

Se servir de la solution de l'exercice 4371.

4394. $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3};\ \frac{\pi^3}{32}.$

4395. $\frac{8}{15}\pi^4-48\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^4}$; c) $\frac{7}{720}\pi^4.$

4396*. $\frac{\pi-x}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n(n^3+1)}$ (voir exercice 4374).

4397*. $\frac{x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n-1}{n(n^2+1)}\sin nx$ (voir exercice 4374).

4398*. $\frac{(\pi-x)^2}{4}-\frac{\pi^2}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{n^2(n^4+1)}\cos nx.$

Dériver la série et se servir de la solution de l'exercice 4374 et du fait que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. (Voir exercice 4376.)

4399. $\frac{\pi^3}{32}+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi x^2}{8}-2\cos x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n^3(n^2-1)}\cos nx\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$;

utiliser la série $\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{n}\cos nx$ $\left(\text{voir exercice 4380 pour } h=\frac{\pi}{2}\right)$ et le fait que $\sum\frac{(-1)^{n-1}}{n^3}=\frac{\pi^3}{32}$ (voir exercice 4394).

4400. $f_1(x)\approx 27{,}8+6{,}5\cos x-0{,}1\sin x-3{,}2\cos 2x+0{,}1\sin 2x$;
$f_2(x)\approx 0{,}24+0.55\cos x+0{,}25\sin x-0{,}08\cos 2x-0{,}13\sin 2x$;
$f_3(x)\approx 0{,}12+1{,}32\cos x+0{,}28\sin x-0{,}07\cos 2x+0{,}46\sin 2x$.

## Chapitre XVI

4401. Les droites parallèles au vecteur $\boldsymbol{A}\{a, b, c\}$: $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$.

4402. Les circonférences centrées en l'origine des coordonnées $x^2+y^2=R^2$.

4403. Les spirales de pas $\frac{2\pi h}{\omega}$ situées sur les cylindres dont les axes se confondent avec l'axe $z$: $x=R\cos(\omega t+\alpha)$, $y=R(\sin\omega t+\alpha)$, $z=ht+z_0$ où $R$, $\alpha$ et $z_0$ sont des constantes arbitraires.

4404. Les circonférences obtenues par intersection des sphères centrées à l'origine des coordonnées avec les plans parallèles au plan bissecteur $y-z=0$: $x^2+y^2+z^2=R^2$, $y-z+C=0$ où $R$ et $C$ sont des constantes arbitraires.

2) Les circonférences obtenues par intersection des sphères centrées en l'origine des coordonnées avec les plans qui découpent sur les axes de coordonnées des segments orientés égaux: $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x+y+z=C$.

3) Les courbes d'intersection des sphères $x^2+y^2+z^2=R^2$ avec les paraboloïdes hyperboliques $zy=Cx$.

4405. div $\boldsymbol{A}=3$, rot $\boldsymbol{A}=0$.

4406. div $\boldsymbol{A}=0$, rot $\boldsymbol{A}=2[(y-z)\boldsymbol{i}+(z-x)\boldsymbol{j}+(x-y)\boldsymbol{k}]$.

4407. div $\boldsymbol{A}=6xyz$, rot $\boldsymbol{A}=x(z^2-y^2)\boldsymbol{i}+y(x^2-z^2)\boldsymbol{j}+z(y^2-x^2)\boldsymbol{k}$.

4408. div $\boldsymbol{A}=6$, rot $\boldsymbol{A}=0$. 4409. div $\boldsymbol{A}=0$, rot $\boldsymbol{A}=0$.

4410. div $\boldsymbol{A}=\frac{k^3}{r^3}$ où $k$ est le coefficient de proportionnalité et $r$ la distance du point d'application de la force à l'origine des coordonnées, rot $\boldsymbol{A}=0$.

4411. div $\boldsymbol{A}=0$, rot $\boldsymbol{A}=0$.

4412. div $\boldsymbol{A}=0$, rot $\boldsymbol{A}=0$. Le champ n'est pas défini sur l'axe $Oz$.

4413. $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = -\dfrac{k}{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ où $k$ est le coefficient de proportionnalité. Le champ n'est pas défini dans le plan $Oxy$.

4414. $3a$. 4416. $\operatorname{div} \boldsymbol{b}(\boldsymbol{ra}) = (\boldsymbol{ab})$, $\operatorname{div} \boldsymbol{r}(\boldsymbol{ra}) = 4(\boldsymbol{ra})$.

4417. 0. 4418. 1) 0, 2) 0, 3) 0.

4419. $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \dfrac{2f(r)}{r} + f'(r)$, si le champ est spatial, $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \dfrac{f(r)}{r} + f'(r)$, si le champ est plan.

4421. $\varphi \operatorname{rot} \boldsymbol{A} + (\operatorname{grad} \varphi \times \boldsymbol{A})$. 4422. $\dfrac{\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{r}|}$.

4423. $2a$. 4424. $2\omega \boldsymbol{n}^0$, où $\boldsymbol{n}^0$ est le vecteur unité parallèle à l'axe de rotation.

4430. $u = \boldsymbol{Ar} + C$.

4431. $u = -\dfrac{1}{2} k (x^2 + y^2 + z^2) + C$.

4432. Non. 4433. Non. 4434. $u = -\dfrac{1}{2} \ln (x^2 + y^2) + C$.

4435. Non. 4437. $\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}$. 4438. $k\delta \ln \dfrac{\sqrt{(l-x)^2+y^2}+l-x}{\sqrt{(l+x)^2+y^2}-l-x}$.

4439*). $4k(\sqrt{2}-1)$. 4440. $\dfrac{k\delta\sqrt{a^2+b^2}}{b} \ln \dfrac{2\pi b+\sqrt{a^2+4\pi^2b^2}}{a}$.

4441. $2k\delta a \ln (1+\sqrt{2})$.

4442. $\dfrac{2\pi k}{\sqrt{1-h^2}} \arccos h$, si $h < 1$, $2\pi k$, si $h = 1$,

$\dfrac{2\pi k}{\sqrt{h^2-1}} \ln (h+\sqrt{h^2-1})$, si $h > 1$.

4443*. 1) $2k\pi R\delta \ln \dfrac{H+\sqrt{H^2+R^2}}{R}$, 2) $4k\pi R\delta \ln \dfrac{H+\sqrt{H^2+4R^2}}{2R}$.

Diviser le cylindre en deux par une section parallèle à la base et calculer le potentiel de la surface latérale du cylindre comme la somme des potentiels des surfaces latérales des deux demi-cylindres en utilisant le résultat du 1).

4444. $2k\pi R\delta$.

4445*. 1) $k\pi\delta \left[H\sqrt{R^2+H^2} - H^2 + R^2 \ln \dfrac{H+\sqrt{R^2+H^2}}{R}\right]$,

2) $\dfrac{k\pi\delta}{2} \left[H\sqrt{4R^2+H^2} - H^2 + 4R^2 \ln \dfrac{H+\sqrt{4R^2+H^2}}{2R}\right]$;

Voir indication de l'exercice 4443.

4446. $\pi k\delta H(l - H)$, où $l$ est la génératrice du cône.

4447. $u = \dfrac{2}{3} k \dfrac{\pi R^3\delta}{a} \left[\left(1+\dfrac{a^2}{R^2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\dfrac{a}{R}\right)^3 - \dfrac{3n}{2R} + 1\right]$ pour $a \geqslant R$;

$u = \dfrac{2}{3} k\pi a^2\delta \left[\left(1+\dfrac{R^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\dfrac{R}{a}\right)^3 + \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{R}{a}\right)^2 - 2\right]$ pour $a \leqslant R$;

$u = \dfrac{k\pi R^2\delta}{3}(4\sqrt{2}-3)$ pour $a = R$.

---

*) Dans les réponses aux exercices 4439-4449 $k$ désigne la constante de gravitation.

**4448*.** $u = \frac{4k\pi\delta}{3a}(R^3 - r^3) = \frac{kM}{a}$ ($M$ est la masse du corps) pour $a \geqslant R$;

$u = 2k\pi\delta(R^2 - r^2)$ pour $a \leqslant r$;

$u = \frac{4k\pi\delta}{3a}(a^3 - r^3) + 2k\pi\delta(R^2 - a^2)$ pour $r \leqslant a \leqslant R$.

Tracer une sphère concentrique de rayon $a$ et appliquer les résultats des deux premiers cas.

**4449.** $\frac{kM}{a}\left[1 + \frac{2}{7}\left(\frac{R}{a}\right)^2\right]$ où $M$ est la masse de la boule.

**4450.** Le flux et la circulation sont nuls.

**4451.** Le flux est égal à $2aS$ où $S$ est l'aire limitée par le contour $L$. La circulation est nulle.

**4452.** Le flux et la circulation sont nuls.

**4453.** Le flux est égal à $3/2\pi R^4$, la circulation à $2\pi R^2$.

**4454.** Le flux est égal à $2\pi$ lorsque l'origine des coordonnées est située à l'intérieur du contour et à 0 dans le cas contraire. La circulation est nulle dans les deux cas.

**4455.** La circulation est égale à $2\pi$ si l'origine des coordonnées est située à l'intérieur du contour et à 0 dans le cas contraire. Dans les deux cas le flux est nul.

**4456.** 2. **4458.** $2\pi R^2 H$. **4459.** $\pi R^2 H$.

**4460.** $4\pi$. Calculer le flux en fonction de la base du cône et utiliser la solution de l'exercice 4457.

**4461.** $3/16\pi$.

**4462*.** 1/6. Se servir de la formule d'Ostrogradski et calculer le flux en fonction de la base de la pyramide.

**4463.** $2\pi^2 b^2$. **4464.** $2\pi\omega R^2$.

**4465.** $-\pi$. Appliquer le théorème de Stokes en prenant pour contour $L$ la courbe d'intersection du paraboloïde avec le plan $Oxy$.

# TABLES DE CERTAINES FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES

## 1. Fonctions trigonométriques

| α° | sin α | tg α | cotg α | cos α | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,0000 | 0,0000 | — | 1,000 | 90 |
| 1 | 0175 | 0175 | 57,3 | 1,000 | 89 |
| 2 | 0349 | 0349 | 28,6 | 0,999 | 88 |
| 3 | 0523 | 0524 | 19,1 | 999 | 87 |
| 4 | 0698 | 0699 | 14,3 | 998 | 86 |
| 5 | 0,0872 | 0,0875 | 11,4 | 0,996 | 85 |
| 6 | 1045 | 1051 | 9,51 | 995 | 84 |
| 7 | 1219 | 1228 | 8,14 | 993 | 83 |
| 8 | 139 | 141 | 7,11 | 990 | 82 |
| 9 | 156 | 158 | 6,31 | 988 | 81 |
| 10 | 0,174 | 0,176 | 5,67 | 985 | 80 |
| 11 | 191 | 194 | 5,145 | 982 | 79 |
| 12 | 208 | 213 | 4,705 | 978 | 78 |
| 13 | 225 | 231 | 4,331 | 974 | 77 |
| 14 | 242 | 249 | 4,011 | 970 | 76 |
| 15 | 0,259 | 0,268 | 3,732 | 0,966 | 75 |
| 16 | 276 | 287 | 487 | 961 | 74 |
| 17 | 292 | 306 | 271 | 956 | 73 |
| 18 | 309 | 325 | 3,078 | 951 | 72 |
| 19 | 326 | 344 | 2,904 | 946 | 71 |
| 20 | 0,342 | 0,364 | 2,747 | 0,940 | 70 |
| 21 | 358 | 384 | 605 | 934 | 69 |
| 22 | 375 | 404 | 475 | 927 | 68 |
| 23 | 391 | 424 | 356 | 921 | 67 |
| 24 | 407 | 445 | 246 | 914 | 66 |
| 25 | 0,423 | 0,466 | 2,145 | 0,906 | 65 |
| 26 | 438 | 488 | 2,050 | 899 | 64 |
| 27 | 454 | 510 | 1,963 | 891 | 63 |
| 28 | 469 | 532 | 881 | 883 | 62 |
| 29 | 485 | 554 | 804 | 875 | 61 |
| 30 | 0,500 | 0,577 | 1,732 | 0,866 | 60 |
| 31 | 515 | 601 | 664 | 857 | 59 |
| 32 | 530 | 625 | 600 | 848 | 58 |
| 33 | 545 | 649 | 540 | 839 | 57 |
| 34 | 559 | 675 | 483 | 829 | 56 |
| 35 | 0,574 | 0,700 | 1,428 | 0,819 | 55 |
| 36 | 588 | 727 | 376 | 809 | 54 |
| 37 | 602 | 754 | 327 | 799 | 53 |
| 38 | 616 | 781 | 280 | 788 | 52 |
| 39 | 629 | 810 | 235 | 777 | 51 |
| 40 | 0,643 | 0,839 | 1,192 | 0,766 | 50 |
| 41 | 656 | 869 | 150 | 755 | 49 |
| 42 | 669 | 900 | 111 | 743 | 48 |
| 43 | 682 | 933 | 072 | 731 | 47 |
| 44 | 695 | 966 | 036 | 719 | 46 |
| 45 | 0,707 | 1,000 | 1,000 | 0,707 | 45 |
| | cos α | cotg α | tg α | sin α | α° |

| α° | α radians | sin α | tg α |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,000 | 0,000 |
| 5,73 | 0,1 | 0,100 | +0,100 |
| 11,5 | 0,2 | 0,199 | +0,203 |
| 17,2 | 0,3 | 0,296 | +0,309 |
| 22,9 | 0,4 | 0,389 | +0,423 |
| 28,7 | 0,5 | 0,479 | +0,546 |
| 34,4 | 0,6 | 0,565 | +0,684 |
| 40,1 | 0,7 | 0,644 | +0,842 |
| 45,0 | $\frac{\pi}{4}$ | 0,707 | +1,000 |
| 45,8 | 0,8 | 0,717 | +1,030 |
| 51,6 | 0,9 | 0,783 | +1,260 |
| 57,3 | 1,0 | 0,841 | +1,557 |
| 63,0 | 1,1 | 0,891 | +1,965 |
| 68,8 | 1,2 | 0,932 | +2,572 |
| 74,5 | 1,3 | 0,964 | +3,602 |
| 80,2 | 1,4 | 0,985 | +5,798 |
| 86,1 | 1,5 | 0,997 | +14,10 |
| 90,0 | $\frac{\pi}{2}$ | 1,000 | — |
| 91,7 | 1,6 | 1,000 | −34,23 |
| 97,4 | 1,7 | 0,992 | −7,697 |
| 103,1 | 1,8 | 0,974 | −4,286 |
| 108,9 | 1,9 | 0,946 | −2,927 |
| 114,6 | 2,0 | 0,909 | −2,185 |
| 120,3 | 2,1 | 0,863 | −1,710 |
| 126,1 | 2,2 | 0,808 | −1,374 |
| 131,8 | 2,3 | 0,746 | −1,119 |
| 135,0 | $\frac{3\pi}{4}$ | 0,707 | −1,000 |
| 137,5 | 2,4 | 0,675 | −0,916 |
| 143,2 | 2,5 | 0,598 | −0,747 |
| 149,0 | 2,6 | 0,516 | −0,602 |
| 154,7 | 2,7 | 0,427 | −0,473 |
| 160,4 | 2,8 | 0,335 | −0,356 |
| 166,2 | 2,9 | 0,239 | −0,246 |
| 171,9 | 3,0 | 0,141 | −0,143 |
| 177,6 | 3,1 | 0,042 | −0,042 |
| 180,0 | π | 0,000 | 0,000 |

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \operatorname{cotg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3},$$

$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{4} = 1.$$

| α degrés | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| α radians | 0,017 | 0,035 | 0,052 | 0,070 | 0,087 | 0,105 | 0,122 | 0,140 | 0,157 |

1 radian = 57°17′45″

## 2. Fonctions hyperboliques

| $x$ | sh $x$ | ch $x$ | $x$ | sh $x$ | ch $x$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | | | |
| 0,1 | 0,100 | 1,005 | 2,1 | 4,022 | 4,144 |
| 0,2 | 0,201 | 1,020 | 2,2 | 4,457 | 4,568 |
| 0,3 | 0,305 | 1,045 | 2,3 | 4,937 | 5,037 |
| 0,4 | 0,411 | 1,081 | 2,4 | 5,466 | 5,557 |
| 0,5 | 0,521 | 1,128 | 2,5 | 6,050 | 6,132 |
| 0,6 | 0,637 | 1,185 | 2,6 | 6,695 | 6,769 |
| 0,7 | 0,759 | 1,255 | 2,7 | 7,406 | 7,474 |
| 0,8 | 0,888 | 1,337 | 2,8 | 8,192 | 8,253 |
| 0,9 | 1,027 | 1,433 | 2,9 | 9,060 | 9,115 |
| 1,0 | 1,175 | 1,543 | 3,0 | 10,02 | 10,07 |
| 1,1 | 1,336 | 1,669 | 3,1 | 11,08 | 11,12 |
| 1,2 | 1,509 | 1,811 | 3,2 | 12,25 | 12,29 |
| 1,3 | 1,698 | 1,971 | 3,3 | 13,54 | 13,58 |
| 1,4 | 1,904 | 2,151 | 3,4 | 14,97 | 15,00 |
| 1,5 | 2,129 | 2,352 | 3,5 | 16,54 | 16,57 |
| 1,6 | 2,376 | 2,578 | 3,6 | 18,29 | 18,31 |
| 1,7 | 2,646 | 2,828 | 3,7 | 20,21 | 20,24 |
| 1,8 | 2,942 | 3,107 | 3,8 | 22,34 | 22,36 |
| 1,9 | 3,268 | 3,418 | 3,9 | 24,69 | 24,71 |
| 2,0 | 3,627 | 3,762 | 4,0 | 27,29 | 27,31 |

Pour $x > 4$ on peut prendre $\operatorname{sh} x \approx \operatorname{ch} x \approx \frac{e^x}{2}$ à 0,01 près.

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

$$e^x = \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x; \qquad e^{xi} = \cos x + i \sin x.$$

## 3. Grandeurs inverses, racines carrées et cubiques, logarithmes, l'exponentielle

| $x$ | $\frac{1}{x}$ | $\sqrt{x}$ | $\sqrt{10x}$ | $\sqrt[3]{x}$ | $\sqrt[3]{10x}$ | $\sqrt[3]{100x}$ | lg $x$ | ln $x$ | $e^x$ | $x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,0 | 1,000 | 1,00 | 3,16 | 1,00 | 2,15 | 4,64 | 000 | 0,000 | 2,72 | 1,0 |
| 1,1 | 0,909 | 05 | 32 | 03 | 22 | 79 | 041 | 095 | 3,00 | 1,1 |
| 1,2 | 833 | 10 | 46 | 06 | 29 | 93 | 079 | 182 | 3,32 | 1,2 |
| 1,3 | 769 | 14 | 61 | 09 | 35 | 5,07 | 114 | 262 | 3,67 | 1,3 |
| 1,4 | 714 | 18 | 74 | 12 | 41 | 19 | 146 | 336 | 4,06 | 1,4 |
| 1,5 | 0,667 | 1,22 | 3,87 | 1,14 | 2,47 | 5,31 | 176 | 0,405 | 4,48 | 1,5 |
| 1,6 | 625 | 26 | 4,00 | 17 | 52 | 43 | 204 | 470 | 4,95 | 1,6 |
| 1,7 | 588 | 30 | 12 | 19 | 57 | 54 | 230 | 530 | 5,47 | 1,7 |
| 1,8 | 556 | 34 | 24 | 22 | 62 | 65 | 255 | 588 | 6,05 | 1,8 |

 BeatriceGloria_personal library

| $x$ | $\frac{1}{x}$ | $\sqrt{x}$ | $\sqrt{10x}$ | $\sqrt[3]{x}$ | $\sqrt[3]{10x}$ | $\sqrt[3]{100x}$ | $\lg x$ | $\ln x$ | $e^x$ | $x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,9 | 526 | 38 | 36 | 24 | 67 | 75 | 279 | 642 | 6,69 | 1,9 |
| 2,0 | 0,500 | 1,41 | 4,47 | 1,26 | 2,71 | 5,85 | 301 | 0,693 | 7,39 | 2,0 |
| 2,1 | 476 | 45 | 58 | 28 | 76 | 94 | 322 | 742 | 8,17 | 2,1 |
| 2,2 | 455 | 48 | 69 | 30 | 80 | 6,04 | 342 | 788 | 9,03 | 2,2 |
| 2,3 | 435 | 52 | 80 | 32 | 84 | 13 | 362 | 833 | 9,97 | 2,3 |
| 2,4 | 417 | 55 | 90 | 34 | 88 | 21 | 380 | 875 | 11,0 | 2,4 |
| 2,5 | 0,400 | 1,58 | 5,00 | 1,36 | 2,92 | 6,30 | 398 | 0,916 | 12,2 | 2,5 |
| 2,6 | 385 | 61 | 10 | 38 | 96 | 38 | 415 | 956 | 13,5 | 2,6 |
| 2,7 | 370 | 64 | 20 | 39 | 3,00 | 46 | 431 | 993 | 14,9 | 2,7 |
| 2,8 | 357 | 67 | 29 | 41 | 04 | 54 | 447 | 1,030 | 16,4 | 2,8 |
| 2,9 | 345 | 70 | 39 | 43 | 07 | 62 | 462 | 065 | 18,2 | 2,9 |
| 3,0 | 0,333 | 1,73 | 5,48 | 1,44 | 3,11 | 6,69 | 477 | 1,099 | 20,1 | 3,0 |
| 3,1 | 323 | 76 | 57 | 46 | 14 | 77 | 491 | 131 | 22,2 | 3,1 |
| 3,2 | 313 | 79 | 66 | 47 | 17 | 84 | 505 | 163 | 24,5 | 3,2 |
| 3,3 | 303 | 82 | 74 | 49 | 21 | 91 | 519 | 194 | 27,1 | 3,3 |
| 3,4 | 294 | 84 | 83 | 50 | 24 | 98 | 531 | 224 | 30,0 | 3,4 |
| 3,5 | 0,286 | 1,87 | 5,92 | 1,52 | 3,27 | 7,05 | 544 | 1,253 | 33,1 | 3,5 |
| 3,6 | 278 | 90 | 6,00 | 53 | 30 | 11 | 556 | 281 | 36,6 | 3,6 |
| 3,7 | 270 | 92 | 08 | 55 | 33 | 18 | 568 | 308 | 40,4 | 3,7 |
| 3,8 | 263 | 95 | 16 | 56 | 36 | 24 | 580 | 335 | 44,7 | 3,8 |
| 3,9 | 256 | 97 | 24 | 57 | 39 | 31 | 591 | 361 | 49,4 | 3,9 |
| 4,0 | 0,250 | 2,00 | 6,32 | 1,59 | 3,42 | 7,37 | 602 | 1,386 | 54,6 | 4,0 |
| 4,1 | 244 | 02 | 40 | 60 | 45 | 43 | 613 | 411 | 60,3 | 4,1 |
| 4,2 | 238 | 05 | 48 | 61 | 48 | 49 | 623 | 435 | 66,7 | 4,2 |
| 4,3 | 233 | 07 | 56 | 63 | 50 | 55 | 633 | 459 | 73,7 | 4,3 |
| 4,4 | 227 | 10 | 63 | 64 | 53 | 61 | 643 | 482 | 81,5 | 4,4 |
| 4,5 | 0,222 | 2,12 | 6,71 | 1,65 | 3,56 | 7,66 | 653 | 1,504 | 90,0 | 4,5 |
| 4,6 | 217 | 14 | 78 | 66 | 58 | 72 | 663 | 526 | 99,5 | 4,6 |
| 4,7 | 213 | 17 | 86 | 68 | 61 | 77 | 672 | 548 | 110 | 4,7 |
| 4,8 | 208 | 19 | 93 | 69 | 63 | 83 | 681 | 569 | 122 | 4,8 |
| 4,9 | 204 | 21 | 7,00 | 70 | 66 | 88 | 690 | 589 | 134 | 4,9 |
| 5,0 | 0,200 | 2,24 | 7,07 | 1,71 | 3,68 | 7,94 | 699 | 1,609 | 148 | 5,0 |
| 5,1 | 196 | 26 | 14 | 72 | 71 | 99 | 708 | 629 | 164 | 5,1 |
| 5,2 | 192 | 28 | 21 | 73 | 73 | 8,04 | 716 | 649 | 181 | 5,2 |
| 5,3 | 189 | 30 | 28 | 74 | 76 | 09 | 724 | 668 | 200 | 5,3 |
| 5,4 | 185 | 32 | 35 | 75 | 78 | 14 | 732 | 686 | 221 | 5,4 |
| 5,5 | 0,182 | 2,35 | 7,42 | 1,77 | 3,80 | 8,19 | 740 | 1,705 | 245 | 5,5 |
| 5,6 | 179 | 37 | 48 | 78 | 83 | 24 | 748 | 723 | 270 | 5,6 |
| 5,7 | 175 | 39 | 55 | 79 | 85 | 29 | 756 | 740 | 299 | 5,7 |
| 5,8 | 172 | 41 | 62 | 80 | 87 | 34 | 763 | 758 | 330 | 5,8 |
| 5,9 | 169 | 43 | 68 | 81 | 89 | 39 | 771 | 775 | 365 | 5,9 |

| $x$ | $\frac{1}{x}$ | $\sqrt{x}$ | $\sqrt{10x}$ | $\sqrt[3]{x}$ | $\sqrt[3]{10x}$ | $\sqrt[3]{100x}$ | $\lg x$ | $\ln x$ | $e^x$ | $x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6,0 | 0,167 | 2,45 | 7,75 | 1,82 | 3,91 | 8,43 | 778 | 1,792 | 403 | 6,0 |
| 6,1 | 164 | 47 | 81 | 83 | 94 | 48 | 785 | 808 | 446 | 6,1 |
| 6,2 | 161 | 49 | 87 | 84 | 96 | 53 | 792 | 825 | 493 | 6,2 |
| 6,3 | 159 | 51 | 94 | 85 | 98 | 57 | 799 | 841 | 545 | 6,3 |
| 6,4 | 156 | 53 | 8,00 | 86 | 4,00 | 62 | 806 | 856 | 602 | 6,4 |
| 6,5 | 0,154 | 2,55 | 8,06 | 1,87 | 4,02 | 8,66 | 813 | 1,872 | 665 | 6,5 |
| 6,6 | 152 | 57 | 12 | 88 | 04 | 71 | 820 | 887 | 735 | 6,6 |
| 6,7 | 149 | 59 | 19 | 89 | 06 | 75 | 826 | 902 | 812 | 6,7 |
| 6,8 | 147 | 61 | 25 | 89 | 08 | 79 | 833 | 917 | 898 | 6,8 |
| 6,9 | 145 | 63 | 31 | 90 | 10 | 84 | 839 | 932 | 992 | 6,9 |
| 7,0 | 0,143 | 2,65 | 8,37 | 1,91 | 4,12 | 8,88 | 845 | 1,946 | 1097 | 7,0 |
| 7,1 | 141 | 66 | 43 | 92 | 14 | 92 | 851 | 960 | 1212 | 7,1 |
| 7,2 | 139 | 68 | 49 | 93 | 16 | 96 | 857 | 974 | 1339 | 7,2 |
| 7,3 | 137 | 70 | 54 | 94 | 18 | 9,00 | 863 | 988 | 1480 | 7,3 |
| 7,4 | 135 | 72 | 60 | 95 | 20 | 05 | 869 | 2,001 | 1636 | 7,4 |
| 7,5 | 0,133 | 2,74 | 8,66 | 1,96 | 4,22 | 9,09 | 875 | 2,015 | 1808 | 7,5 |
| 7,6 | 132 | 76 | 72 | 97 | 24 | 13 | 881 | 028 | 1998 | 7,6 |
| 7,7 | 130 | 77 | 77 | 97 | 25 | 17 | 886 | 041 | 2208 | 7,7 |
| 7,8 | 128 | 79 | 83 | 98 | 27 | 21 | 892 | 054 | 2441 | 7,8 |
| 7,9 | 127 | 81 | 89 | 99 | 29 | 24 | 898 | 067 | 2697 | 7,9 |
| 8,0 | 0,125 | 2,83 | 8,94 | 2,00 | 4,31 | 9,28 | 903 | 2,079 | 2981 | 8,0 |
| 8,1 | 123 | 85 | 9,00 | 01 | 33 | 32 | 908 | 092 | 3294 | 8,1 |
| 8,2 | 122 | 86 | 06 | 02 | 34 | 36 | 914 | 104 | 3641 | 8,2 |
| 8,3 | 120 | 88 | 11 | 02 | 36 | 40 | 919 | 116 | 4024 | 8,3 |
| 8,4 | 119 | 90 | 17 | 03 | 38 | 44 | 924 | 128 | 4447 | 8,4 |
| 8,5 | 0,118 | 2,92 | 9,22 | 2,04 | 4,40 | 9,47 | 929 | 2,140 | 4915 | 8,5 |
| 8,6 | 116 | 93 | 27 | 05 | 41 | 51 | 935 | 152 | 5432 | 8,6 |
| 8,7 | 115 | 95 | 33 | 06 | 43 | 55 | 940 | 163 | 6003 | 8,7 |
| 8,8 | 114 | 97 | 38 | 06 | 45 | 58 | 944 | 175 | 6634 | 8,8 |
| 8,9 | 112 | 98 | 43 | 07 | 46 | 62 | 949 | 186 | 7332 | 8,9 |
| 9,0 | 0,111 | 3,00 | 9,49 | 2,08 | 4,48 | 9,65 | 954 | 2,197 | 8103 | 9,0 |
| 9,1 | 110 | 02 | 54 | 09 | 50 | 69 | 959 | 208 | 8955 | 9,1 |
| 9,2 | 109 | 03 | 59 | 10 | 51 | 73 | 964 | 219 | 9897 | 9,2 |
| 9,3 | 108 | 05 | 64 | 10 | 53 | 76 | 968 | 230 | 10938 | 9,3 |
| 9,4 | 106 | 07 | 69 | 11 | 55 | 80 | 973 | 241 | 12088 | 9,4 |
| 9,5 | 0,105 | 3,08 | 9,75 | 2,12 | 4,56 | 9,83 | 978 | 2,251 | 13360 | 9,5 |
| 9,6 | 104 | 10 | 80 | 13 | 58 | 86 | 982 | 262 | 14765 | 9,6 |
| 9,7 | 103 | 11 | 85 | 13 | 59 | 90 | 987 | 272 | 16318 | 9,7 |
| 9,8 | 102 | 13 | 90 | 14 | 61 | 93 | 991 | 282 | 18034 | 9,8 |
| 9,9 | 101 | 15 | 95 | 15 | 63 | 97 | 996 | 293 | 19930 | 9,9 |

| $x$ | $\frac{1}{x}$ | $\sqrt{x}$ | $\sqrt{10x}$ | $\sqrt[3]{x}$ | $\sqrt[3]{10x}$ | $\sqrt[3]{100x}$ | $\lg x$ | $\ln x$ | $e^x$ | $x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10,0 | 0,100 | 3,16 | 10,00 | 2,15 | 4,64 | 10,00 | 000 | 2,303 | 22026 | 10,0 |

Dans le graphe lg $x$ sont données les mantisses des logarithmes décimaux.

Pour trouver les logarithmes naturels des nombres supérieurs à 10 ou inférieurs à 1 on se servira de la formule

$$\ln(x \cdot 10^k) = \ln x + k \ln 10.$$

A remarquer que

$$\ln 10 = 2{,}303; \qquad \ln 10^2 = 4{,}605;$$

$$\lg x = 0{,}4343 \ln x; \qquad \ln x = 2{,}303 \lg x.$$

Formules de calcul approché des racines:

$$1)\ \sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{n} + \frac{1-n}{2n^2} x^2 \text{ pour } |x| < 1.$$

$$2)\ \sqrt[n]{a^n + b} \approx a\left(1 + \frac{b}{na^n} + \frac{1-n}{2n^2} \cdot \frac{b^2}{a^{2n}}\right) \text{ pour } \left|\frac{b}{a^n}\right| < 1.$$